

---

# **ANÁLISIS MATRICIAL DE ESTRUCTURAS MÉTODO DE LAS RIGIDECES**

---

**Por: MSc. ING. ARTURO RODRÍGUEZ SERQUÉN**  
ing\_ars@hotmail.com

CURSO : ANÁLISIS ESTRUCTURAL II  
PROFESOR : MSc ING ARTURO RODRÍGUEZ SERQUÉN

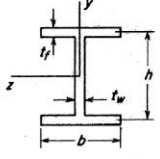
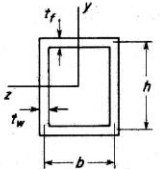
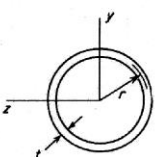
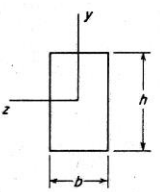
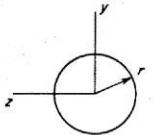
---

(Hoja en blanco)

CURSO : ANÁLISIS ESTRUCTURAL II  
 PROFESOR : MSc ING ARTURO RODRÍGUEZ SERQUÉN

## ANÁLISIS MATRICIAL DE ESTRUCTURAS – MÉTODO DE LAS RIGIDECES

### PROPIEDADES DE SECCIONES

	$I_z \approx \frac{h^3}{12} (ht_w + 6bt_f) \quad A \approx ht_w + 2bt_f$ $I_y \approx \frac{b^3 t_f}{6} \quad I_x = J \approx \frac{1}{3} (ht_w^3 + 2bt_f^3)$ $f = \frac{A}{ht_w}$
	$I_z \approx \frac{h^3}{6} (ht_w + 3bt_f) \quad A = 2(bt_f + ht_w)$ $I_y \approx \frac{b^3}{6} (bt_f + 3ht_w) \quad J \approx 2b^3 h^2 \frac{t_f t_w}{bt_w + ht_f}$ $f = \frac{A}{2ht_w}$
	$I_x = I_y \approx \pi r^3 t \quad J \approx 2\pi r^3 t$ $A \approx 2\pi r t \quad f = 2$
	$I_z = \frac{bh^3}{12} \quad J = \beta hb^3 \quad (\text{Tomar } b < h)$ $I_y = \frac{hb^3}{12} \quad \beta \approx \frac{1}{3} - 0.21 \frac{b}{h} \left( 1 - \frac{b^4}{12h^4} \right)$ $A = bh \quad f = \frac{6}{5}$
	$I_x = I_y = \frac{\pi r^4}{4} \quad J = \frac{\pi r^4}{2}$ $A = \pi r^2 \quad f = \frac{10}{9}$

### MÓDULO DE YOUNG (E) Y COEFICIENTE DE POISSON (μ)

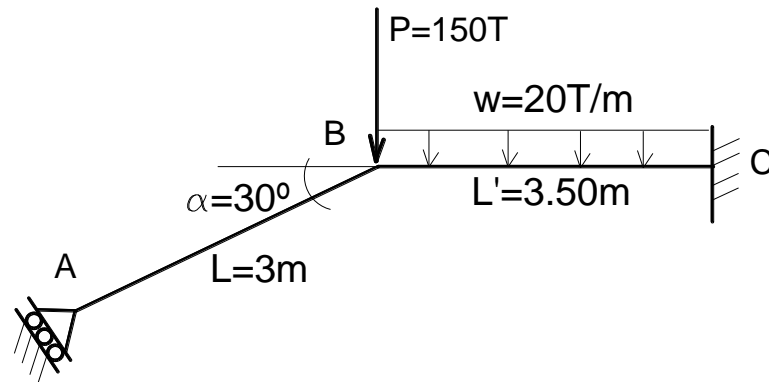
MATERIAL	E (GPa)	μ
Aleaciones de aluminio	68 – 73	0,33
Asbesto-cemento	24	
Bronce	78 – 110	0,36
Fierro fundido	80 – 170	0,25
Concreto	14 – 30	0,1 – 0,15
Cobre	107 – 131	0,34
Vidrio	46 – 73	0,24
Plomo	4,8 – 17	0,44
Acero	200 – 212	0,27
Plásticos		
ABS	1,7	0,33
Nylon	1,4 – 2,75	
Acrílico	6,0	0,33
Poliétileno	0,8	0,46
Polistireno	5,0	0,4
PVC rígido	2,4 – 2,75	
Rocas		
Granito	50	0,28
Limestone	55	0,21
Cuarzita	24,0 – 44,8	
Arenisca	2,75 – 4,8	0,28
Schist	6,5 – 18,6	

Equivalencia: 1 GPa= 10,200kg/cm<sup>2</sup>

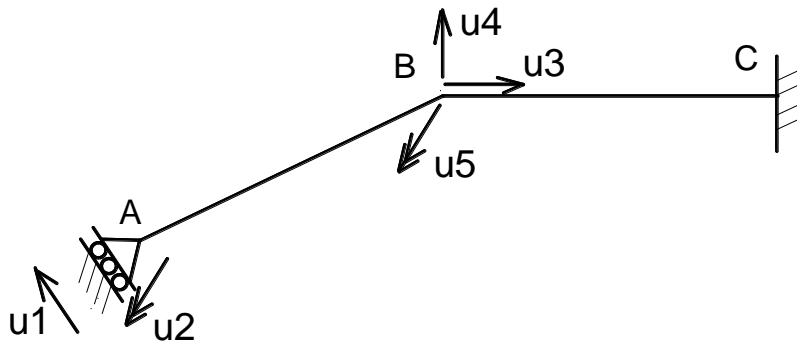
Módulo de Elasticidad Cortante G=E/2(1+μ)

CURSO : ANÁLISIS ESTRUCTURAL II  
 PROFESOR : MSc ING ARTURO RODRÍGUEZ SERQUÉN

**EJEMPLO 1.-** Resolver el caso mostrado aplicando los principios del método de las rigideces.

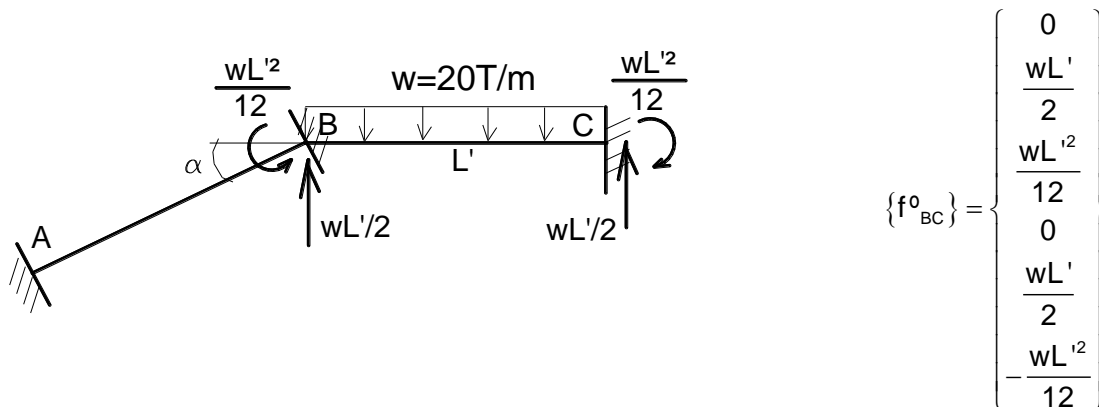


**SOLUCIÓN.-** La estructura tiene cinco desplazamientos desconocidos:  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$ ,  $u_4$  y  $u_5$ .



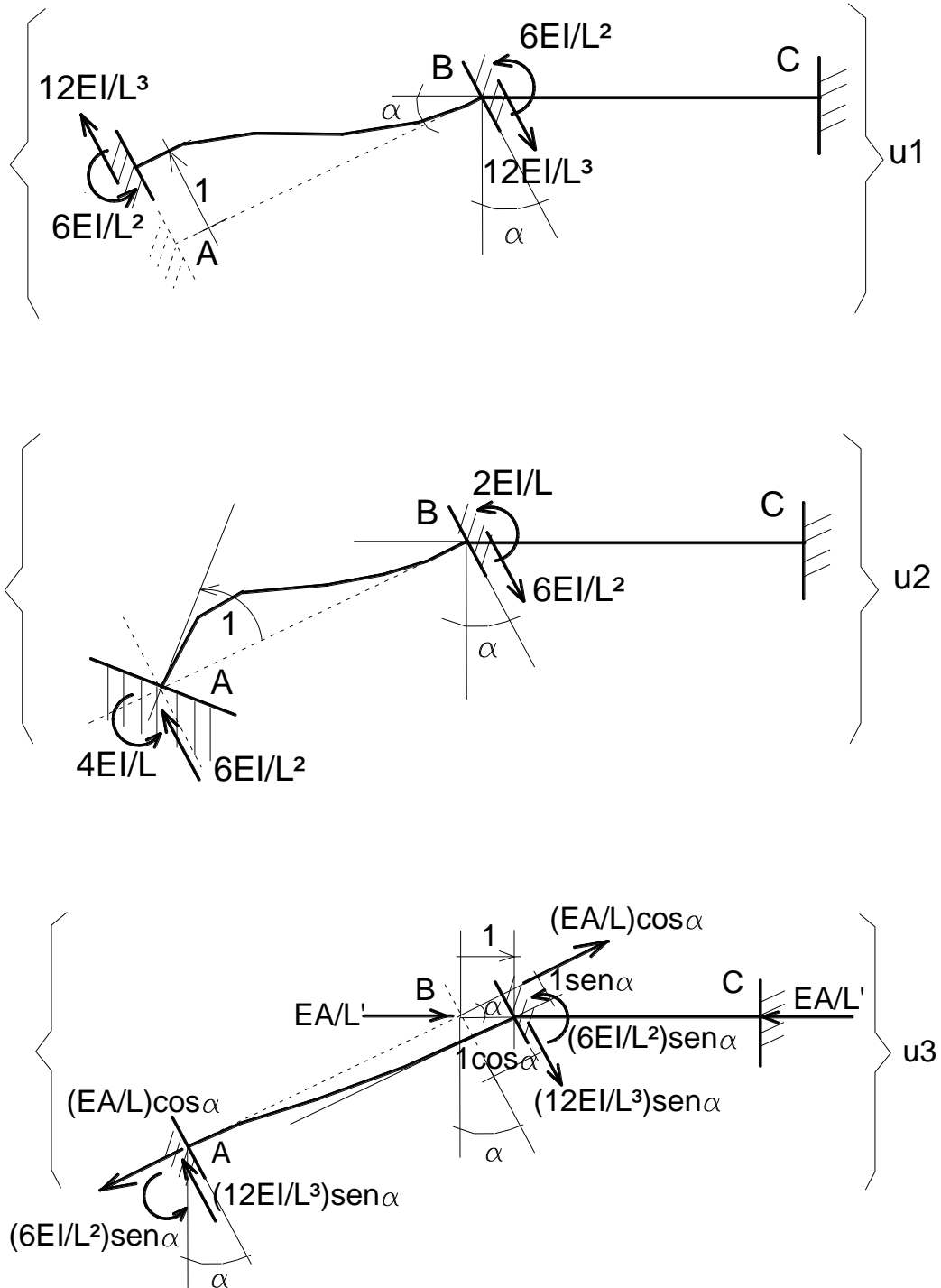
La estructura a solucionar se expresará a través de la suma de 6 gráficos: 1 en donde se fijan todos los nudos de la estructura y otros cinco en el que se van provocando uno a uno los 5 desplazamientos de la estructura, tal como se procede a continuación.

*Rigidización de los nudos para constituir el vector fuerzas de fijación:*

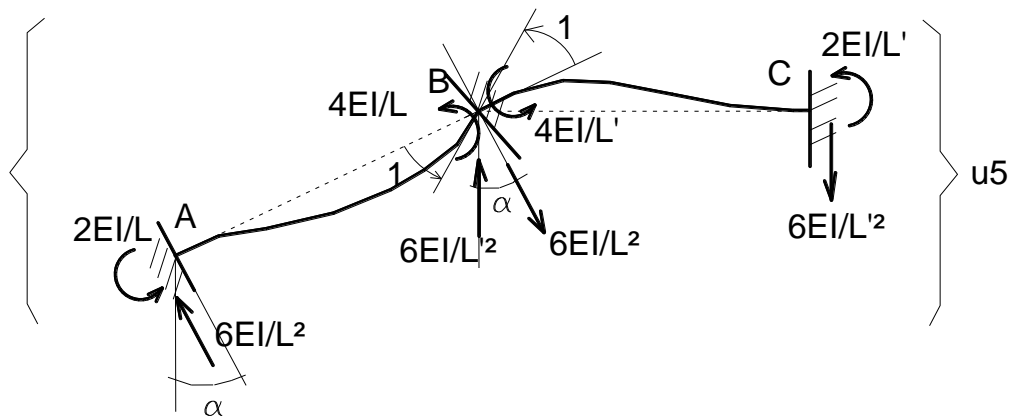
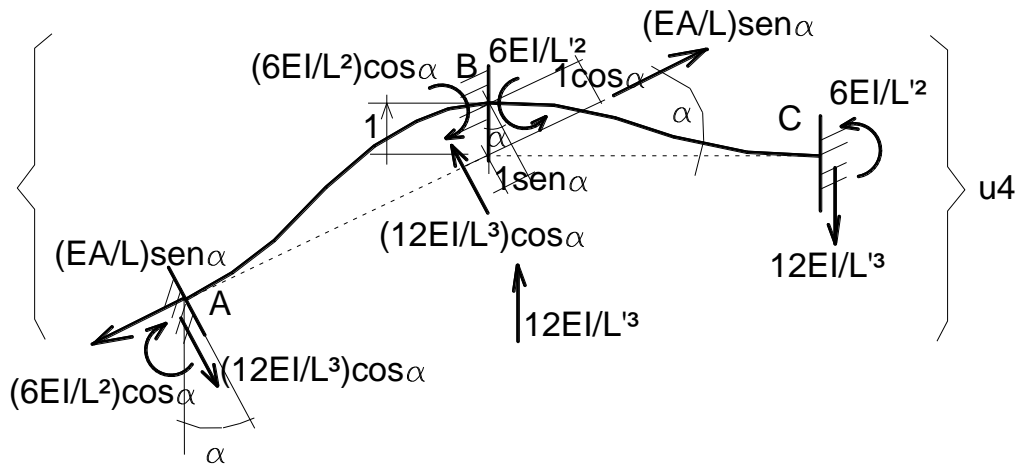


CURSO : ANÁLISIS ESTRUCTURAL II  
 PROFESOR : MSc ING ARTURO RODRÍGUEZ SERQUÉN

Introduciendo uno a uno los desplazamientos, se generará la Matriz de Rigidez de la estructura.  
 Cada desplazamiento conforma una columna de la matriz:



CURSO : ANÁLISIS ESTRUCTURAL II  
 PROFESOR : MSc ING ARTURO RODRÍGUEZ SERQUÉN



Al provocar el desplazamiento 1, obtenemos la primera columna de la matriz colocando ordenadamente los esfuerzos totales en los nudos siguiendo el orden de los grados de libertad 1,2,3, 4 y 5. Estos esfuerzos por desplazamientos unitarios pasan a denominarse Rigideces. Con el mismo proceder se obtienen las otras columnas. La Matriz de Rigidez de toda la estructura se detalla a continuación.

Por otro lado las fuerzas externas son aquellas que están aplicadas en los nudos; se colocan también siguiendo la dirección de los grados de libertad 1, 2, 3, 4 y 5.

Al aplicar la ecuación general de método se obtiene:

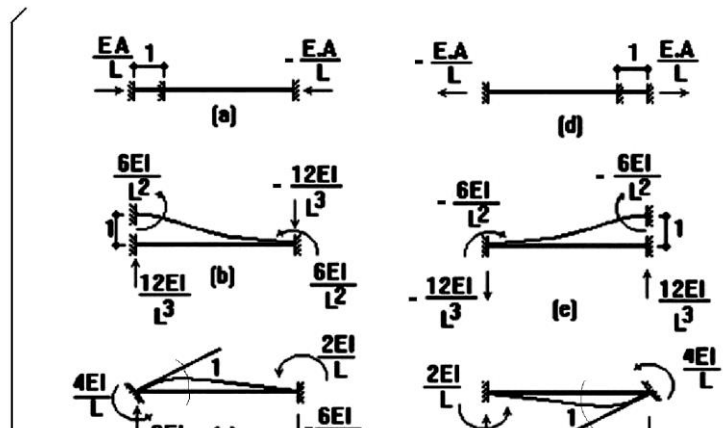
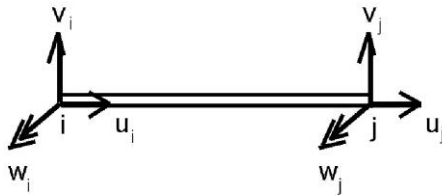
Aplicando la ecuación de equilibrio del método:

$$\{F\} + [K][U] = \{F_e\} \rightarrow [K][U] = \{F_e\} - \{F\}$$

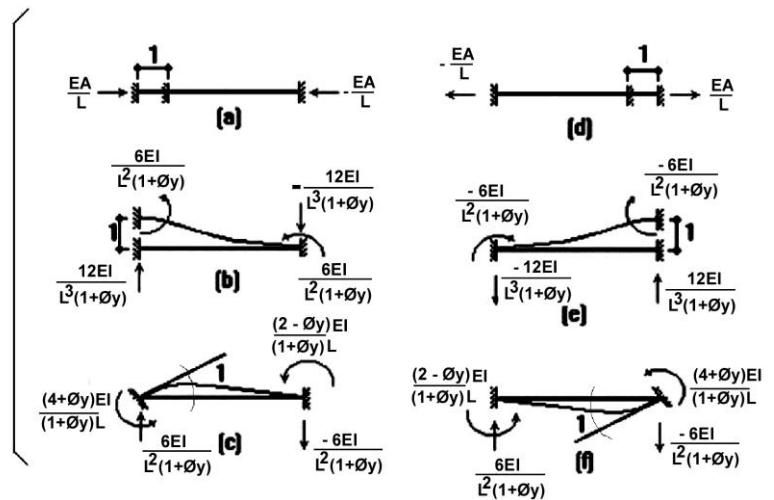
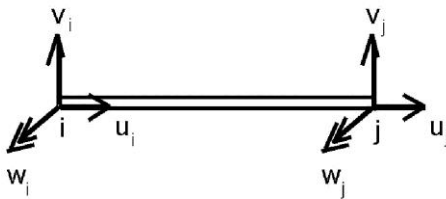
$$\begin{array}{c}
 \textcircled{u_1} \qquad \qquad \qquad \textcircled{u_2} \qquad \qquad \qquad \textcircled{u_3} \qquad \qquad \qquad \textcircled{u_4} \qquad \qquad \qquad \textcircled{u_5} \\
 \left[ \begin{array}{ccccc}
 \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} \text{sen} \alpha & -\frac{12EI}{L^3} \text{cos} \alpha & \frac{6EI}{L^2} \\
 \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} \text{sen} \alpha & -\frac{6EI}{L^2} \text{cos} \alpha & \frac{2EI}{L} \\
 \frac{12EI}{L^3} \text{sen} \alpha & \frac{6EI}{L^2} \text{sen} \alpha & \frac{EA}{L} \text{cos}^2 \alpha + \frac{12EI}{L^3} \text{sen}^2 \alpha + \frac{EA}{L'} & \frac{EA}{L} \text{sen} \alpha \text{cos} \alpha - \frac{12EI}{L^3} \text{cos} \alpha \text{sen} \alpha & \frac{6EI}{L^2} \text{sen} \alpha \\
 -\frac{12EI}{L^3} \text{cos} \alpha & -\frac{6EI}{L^2} \text{cos} \alpha & \frac{EA}{L} \text{sen} \alpha \text{cos} \alpha - \frac{12EI}{L^3} \text{cos} \alpha \text{sen} \alpha & \frac{EA}{L} \text{sen}^2 \alpha + \frac{12EI}{L^3} \text{cos}^2 \alpha + \frac{12EI}{L'^3} & \frac{6EI}{L'^2} - \frac{6EI}{L^2} \text{cos} \alpha \\
 \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} \text{sen} \alpha & \frac{6EI}{L'^2} - \frac{6EI}{L^2} \text{cos} \alpha & \frac{4EI}{L'} + \frac{4EI}{L}
 \end{array} \right]
 \begin{Bmatrix}
 u_1 \\
 u_2 \\
 u_3 \\
 u_4 \\
 u_5
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{Bmatrix}
 -
 \begin{Bmatrix}
 \frac{wL'}{2} \\
 \frac{wL'^2}{12} \\
 0 \\
 \frac{wL'}{2} \\
 -\frac{wL'^2}{12}
 \end{Bmatrix}
 \end{array}$$

# MATRIZ DE RIGIDEZ DE BARRA EN EL PLANO

## DESPLAZAMIENTOS UNITARIOS DE BARRA ij (sólo efectos de flexión)



## DESPLAZAMIENTOS UNITARIOS DE BARRA ij (efectos de flexión y corte)



CURSO : ANÁLISIS ESTRUCTURAL II  
 PROFESOR : MSc ING ARTURO RODRÍGUEZ SERQUÉN

## MATRIZ DE RIGIDEZ DE BARRA EN EL PLANO

(Sólo efectos de flexión)

K=

$\frac{EA}{L}$	0	0	$-\frac{EA}{L}$	0	0
0	$\frac{12EI}{L^3}$	$\frac{6EI}{L^2}$	0	$-\frac{12EI}{L^3}$	$\frac{6EI}{L^2}$
0	$\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{4EI}{L}$	0	$-\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{2EI}{L}$
$-\frac{EA}{L}$	0	0	$\frac{EA}{L}$	0	0
0	$-\frac{12EI}{L^3}$	$-\frac{6EI}{L^2}$	0	$\frac{12EI}{L^3}$	$-\frac{6EI}{L^2}$
0	$\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{2EI}{L}$	0	$-\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{4EI}{L}$

## MATRIZ DE RIGIDEZ DE BARRA EN EL PLANO

(Efectos de flexión y cortante)

K=

$\frac{EA}{L}$	0	0	$-\frac{EA}{L}$	0	0
0	$\frac{12EI_z}{L^3(1+\varnothing_y)}$	$\frac{6EI_z}{L^2(1+\varnothing_y)}$	0	$-\frac{12EI_z}{L^3(1+\varnothing_y)}$	$\frac{6EI_z}{L^2(1+\varnothing_y)}$
0	$\frac{6EI_z}{L^2(1+\varnothing_y)}$	$\frac{(4+\varnothing_y)EI_z}{(1+\varnothing_y)L}$	0	$-\frac{6EI_z}{L^2(1+\varnothing_y)}$	$\frac{(2-\varnothing_y)EI_z}{(1+\varnothing_y)L}$
$-\frac{EA}{L}$	0	0	$\frac{EA}{L}$	0	0
0	$-\frac{12EI_z}{L^3(1+\varnothing_y)}$	$-\frac{6EI_z}{L^2(1+\varnothing_y)}$	0	$\frac{12EI_z}{L^3(1+\varnothing_y)}$	$-\frac{6EI_z}{L^2(1+\varnothing_y)}$
0	$\frac{6EI_z}{L^2(1+\varnothing_y)}$	$\frac{(2-\varnothing_y)EI_z}{(1+\varnothing_y)L}$	0	$-\frac{6EI_z}{L^2(1+\varnothing_y)}$	$\frac{(4+\varnothing_y)EI_z}{(1+\varnothing_y)L}$

Siendo  $\varnothing_y = \frac{12EI_z f_y}{AGL^2}$  = constante adimensional de cortante

CURSO : ANÁLISIS ESTRUCTURAL II  
 PROFESOR : MSc ING ARTURO RODRÍGUEZ SERQUÉN

## MATRIZ DE ROTACIÓN [A] EN EL PLANO

$$[A]=$$

$\cos\alpha$	$\text{sen}\alpha$	0	0	0	0
$-\text{sen}\alpha$	$\cos\alpha$	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	0	0	$\cos\alpha$	$\text{sen}\alpha$	0
0	0	0	$-\text{sen}\alpha$	$\cos\alpha$	0
0	0	0	0	0	1

$$=$$

c	s	0	0	0	0
-s	c	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	0	0	c	s	0
0	0	0	-s	c	0
0	0	0	0	0	1

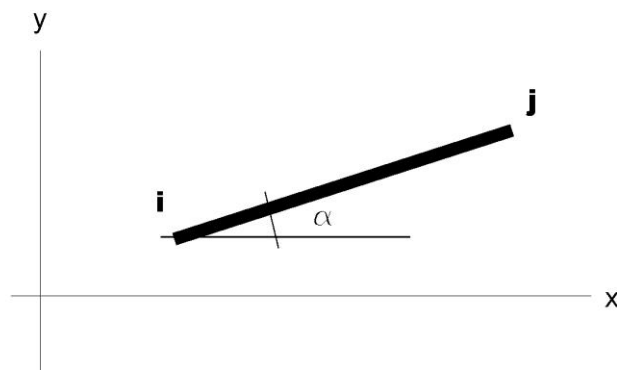
## MATRIZ DE ROTACIÓN [A<sup>T</sup>] EN EL PLANO

$$[A]^T=$$

$\cos\alpha$	$-\text{sen}\alpha$	0	0	0	0
$\text{sen}\alpha$	$\cos\alpha$	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	0	0	$\cos\alpha$	$-\text{sen}\alpha$	0
0	0	0	$\text{sen}\alpha$	$\cos\alpha$	0
0	0	0	0	0	1

$$=$$

c	-s	0	0	0	0
s	c	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	0	0	c	-s	0
0	0	0	s	c	0
0	0	0	0	0	1

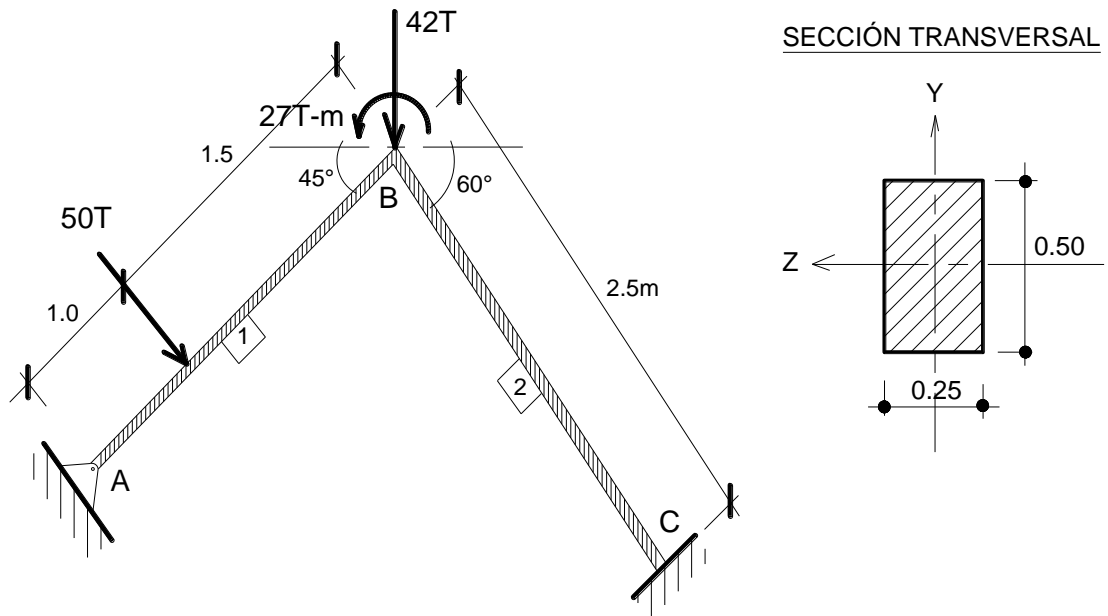




CURSO : ANÁLISIS ESTRUCTURAL II  
 PROFESOR : MSc ING ARTURO RODRÍGUEZ SERQUÉN

## ANÁLISIS MATRICIAL DE ESTRUCTURAS – MÉTODO DE LAS RIGIDECES

Resolver:



Datos:

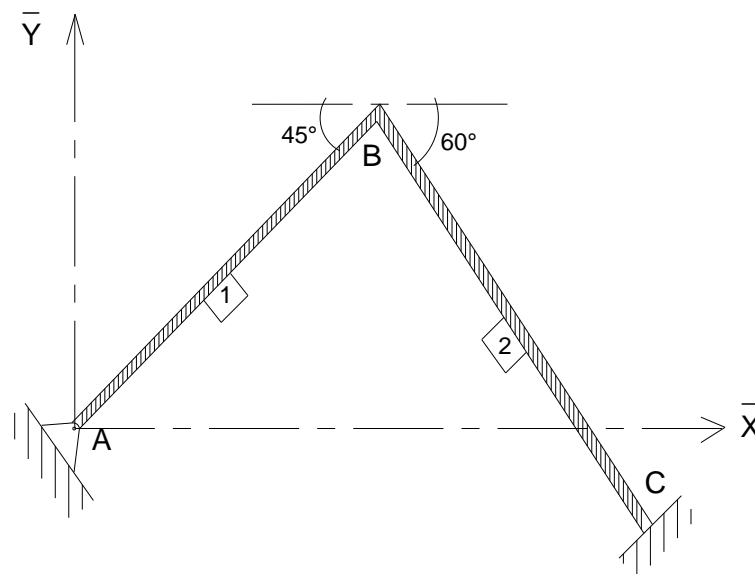
$$E = 2 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2, \quad G = \frac{E}{2(1+\mu)} \approx \frac{E}{2}$$

$$A = 25 \times 50 = 1250 \text{ cm}^2$$

$$I = \frac{25 \times 50^3}{12} = 260,417 \text{ cm}^4, \quad f_y = 1.2, \quad L = 250 \text{ cm}$$

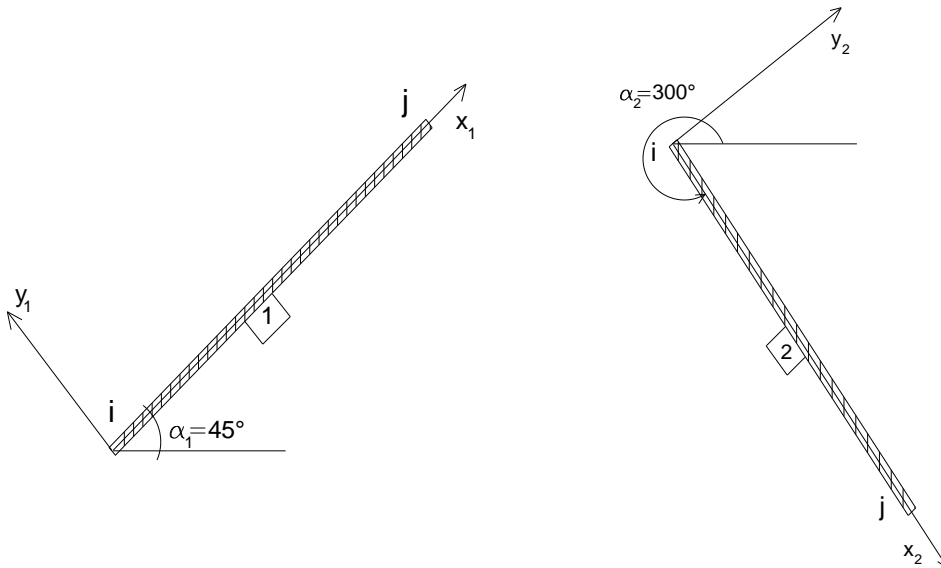
### SOLUCIÓN

Ejes Globales:



CURSO : ANÁLISIS ESTRUCTURAL II  
 PROFESOR : MSc ING ARTURO RODRÍGUEZ SERQUÉN

Ejes Locales:



## 1) COORDENADAS LOCALES

### 1.a) MATRIZ DE RIGIDEZ [K] DE BARRAS 1 y 2:

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3(1+\phi_y)} & \frac{6EI_z}{L^2(1+\phi_y)} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3(1+\phi_y)} & \frac{6EI_z}{L^2(1+\phi_y)} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2(1+\phi_y)} & \frac{(4+\phi_y)EI_z}{(1+\phi_y)L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2(1+\phi_y)} & \frac{(2-\phi_y)EI_z}{(1+\phi_y)L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3(1+\phi_y)} & -\frac{6EI_z}{L^2(1+\phi_y)} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3(1+\phi_y)} & -\frac{6EI_z}{L^2(1+\phi_y)} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2(1+\phi_y)} & \frac{(2-\phi_y)EI_z}{(1+\phi_y)L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2(1+\phi_y)} & \frac{(4+\phi_y)EI_z}{(1+\phi_y)L} \end{bmatrix}$$

$$\text{con } [\phi_y]_1 = [\phi_y]_2 = \frac{12EI_z f_y}{AGL^2} = 0.096$$

CURSO : ANÁLISIS ESTRUCTURAL II  
 PROFESOR : MSc ING ARTURO RODRÍGUEZ SERQUÉN

$$[K]_1 = [K]_2 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0.182482 & 22.810246 & 3892.94871 & 0 & -0.182482 & 22.810246 \\ \text{SIMÉTRICA} & & & 5 & 0 & 0 \\ & & & -0.182482 & -22.810246 & 3892.94871 \end{bmatrix} E$$

### 1.b) VECTOR FUERZAS DE FIJACIÓN $\{f^o\}$

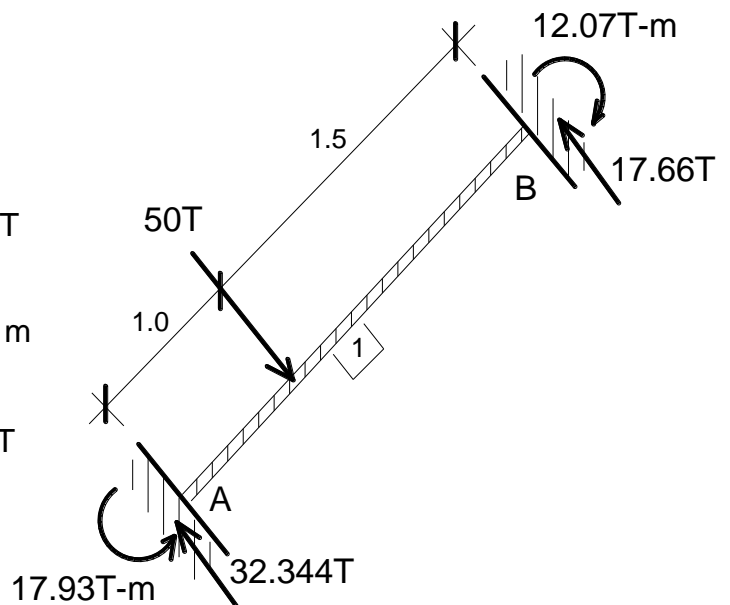
#### BARRA 1:

$$M_A = \frac{Pab^2}{L^2(1+\phi_y)} \left[ 1 + \frac{\phi_y L}{2b} \right] = 17.93 \text{ T-m}$$

$$R_A = \frac{Pb^2}{L^3(1+\phi_y)} \left[ 3a + b + \frac{\phi_y L^2}{b} \right] = 32.34 \text{ T}$$

$$M_B = -\frac{Pa^2b}{L^2(1+\phi_y)} \left[ 1 + \frac{\phi_y L}{2a} \right] = -12.07 \text{ T-m}$$

$$R_B = \frac{Pa^2}{L^3(1+\phi_y)} \left[ a + 3b + \frac{\phi_y L^2}{a} \right] = 17.66 \text{ T}$$



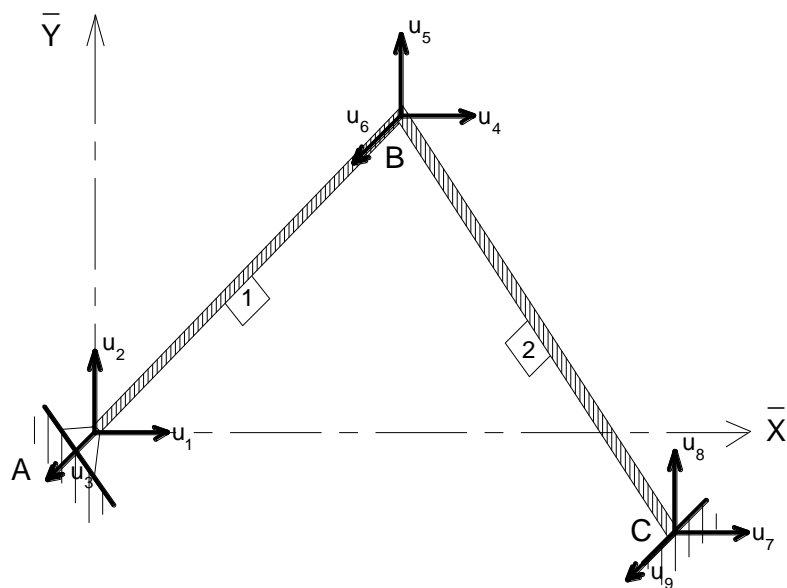
$$\{f^o\}_1 = \begin{Bmatrix} f_{ix}^o \\ f_{iy}^o \\ m_{iz}^o \\ f_{jx}^o \\ f_{jy}^o \\ m_{jz}^o \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 32,340\text{kg} \\ 17.93 \times 10^5 \text{kg-cm} \\ 0 \\ 17,660\text{kg} \\ -12.07 \times 10^5 \text{kg-cm} \end{Bmatrix}$$

CURSO : ANÁLISIS ESTRUCTURAL II  
 PROFESOR : MSc ING ARTURO RODRÍGUEZ SERQUÉN

BARRA 2 (sin cargas en el tramo):

$$\{f^o\}_2 = \begin{Bmatrix} f_{ix}^o \\ f_{iy}^o \\ m_{iz}^o \\ f_{jx}^o \\ f_{jy}^o \\ m_{jz}^o \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

## 2) COORDENADAS GLOBALES



### 2.a) MATRIZ DE RIGIDEZ $[\bar{k}]$

Barra 1 (Con  $\alpha_1 = 45^\circ$ ,  $s=0.7071$ ,  $c=0.7071$ )

$$[\bar{k}]_1 = \begin{bmatrix} \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} & \textcircled{4} & \textcircled{5} & \textcircled{6} \\ 2.591191 & 2.408713 & -16.129125 & -2.591191 & -2.408713 & -16.129125 \\ & 2.591191 & 16.129125 & -2.408713 & -2.591191 & 16.129125 \\ & & 3892.94871 & 16.129125 & -16.129125 & 1809.6127 \\ & & & 2.591191 & 2.408713 & 16.129125 \\ & \text{Simétrica} & & & 2.591191 & -16.129125 \\ & & & & & 3892.94871 \end{bmatrix} E$$

Barra 2 (Con  $\alpha_2 = 300^\circ$ ,  $s=-0.8660$ ,  $c=0.50$ )

CURSO : ANÁLISIS ESTRUCTURAL II  
 PROFESOR : MSc ING ARTURO RODRÍGUEZ SERQUÉN

$$\begin{matrix}
 & \textcircled{4} & \textcircled{5} & \textcircled{6} & \textcircled{7} & \textcircled{8} & \textcircled{9} \\
 \left[ \mathbf{k} \right]_2 = & \begin{bmatrix}
 1.386853 & -2.085985 & 19.753673 & -1.386853 & 2.085985 & 19.753673 \\
 & 3.795400 & 11.405123 & 2.085985 & -3.795400 & 11.405123 \\
 & & 3892.94871 & -19.753673 & -11.405123 & 1809.6127 \\
 & & & 1.386853 & -2.085985 & -19.753673 \\
 & \text{Simétrica} & & & 3.795400 & -11.405123 \\
 & & & & & 3892.94871
 \end{bmatrix} & \mathbf{E}
 \end{matrix}$$

## 2.b) VECTOR FUERZAS DE FIJACIÓN $\{\bar{f}^0\}$

Barra 1 (Con  $\alpha_1 = 45^\circ$ ,  $s=0.7071$ ,  $c=0.7071$ )

$$\{\bar{f}^0\}_1 = \begin{Bmatrix}
 cf_{ix}^0 - sf_{iy}^0 \\
 sf_{ix}^0 + cf_{iy}^0 \\
 m_{iz}^0 \\
 cf_{jx}^0 - sf_{jy}^0 \\
 sf_{jx}^0 + cf_{jy}^0 \\
 m_{jz}^0
 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}
 -22,820.44\text{kg} \\
 22,870.44\text{kg} \\
 1'793,000\text{kg} - \text{cm} \\
 -12,484.56\text{kg} \\
 12,484.56\text{kg} \\
 -1'207,000\text{kg} - \text{cm}
 \end{Bmatrix} \begin{matrix}
 \textcircled{1} \\
 \textcircled{2} \\
 \textcircled{3} \\
 \textcircled{4} \\
 \textcircled{5} \\
 \textcircled{6}
 \end{matrix}$$

Barra 2 (Con  $\alpha_2 = 300^\circ$ ,  $s=-0.8660$ ,  $c=0.50$ )

$$\{\bar{f}^0\}_2 = \begin{Bmatrix}
 cf_{ix}^0 - sf_{iy}^0 \\
 sf_{ix}^0 + cf_{iy}^0 \\
 m_{iz}^0 \\
 cf_{jx}^0 - sf_{jy}^0 \\
 sf_{jx}^0 + cf_{jy}^0 \\
 m_{jz}^0
 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{Bmatrix} \begin{matrix}
 \textcircled{4} \\
 \textcircled{5} \\
 \textcircled{6} \\
 \textcircled{7} \\
 \textcircled{8} \\
 \textcircled{9}
 \end{matrix}$$

## 3) EQUILIBRIO Y ENSAMBLE DE ELEMENTOS

$$\Sigma \{\bar{f}^0\}_m + \Sigma [k]_m [u]_m = \Sigma \{F_e\}_m \longrightarrow \{F\} + [K][U] = \{F_e\}$$

Con  $[K][U] = \{F_e\} - \{\bar{F}^0\}$ , luego eliminando filas y columnas correspondientes a desplazamientos nulos ( $u_1, u_2, u_7, u_8, u_9$ ), se tiene:



CURSO : ANÁLISIS ESTRUCTURAL II  
 PROFESOR : MSc ING ARTURO RODRÍGUEZ SERQUÉN

#### 4) PROCESO DE RETORNO (cálculo de esfuerzos en barras)

Habiendo calculado U:

$$U = \begin{Bmatrix} \overline{u}_3 \\ \overline{u}_4 \\ \overline{u}_5 \\ \overline{u}_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -824.48/E \text{ rad} \\ 1154.64/E \text{ cm} \\ -10166.79/E \text{ cm} \\ 681.94/E \text{ rad} \end{Bmatrix}$$

Se tiene:

$$\{\overline{u}\}_{j_1} = \begin{Bmatrix} \overline{u}_1 \\ \overline{u}_2 \\ \overline{u}_3 \\ \overline{u}_4 \\ \overline{u}_5 \\ \overline{u}_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -824.48/E \\ 1154.64/E \\ -10166.79/E \\ 681.94/E \end{Bmatrix} \quad \{\overline{u}\}_{j_2} = \begin{Bmatrix} \overline{u}_4 \\ \overline{u}_5 \\ \overline{u}_6 \\ \overline{u}_7 \\ \overline{u}_8 \\ \overline{u}_9 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1154.64/E \\ -10166.79/E \\ 681.94/E \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Los desplazamientos en coordenadas locales para cada barra son:

Barra 1 (Con  $\alpha_1 = 45^\circ$ ,  $s=0.7071$ ,  $c=0.7071$ )

$$\{u\}_{j_1} = [A]_{j_1} \{\overline{u}\}_{j_1} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -824.48/E \\ 1154.64/E \\ -10166.79/E \\ 681.94/E \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -824.48/E \\ -6372.55/E \\ -8005.46/E \\ 681.94/E \end{Bmatrix}$$

Barra 2 (Con  $\alpha_2 = 300^\circ$ ,  $s=-0.8660$ ,  $c=0.50$ )

$$\{u\}_{j_2} = [A]_{j_2} \{\overline{u}\}_{j_2} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1154.64/E \\ -10166.79/E \\ 681.94/E \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 9382.02/E \\ -4083.44/E \\ 681.94/E \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Elementos mecánicos de barra :

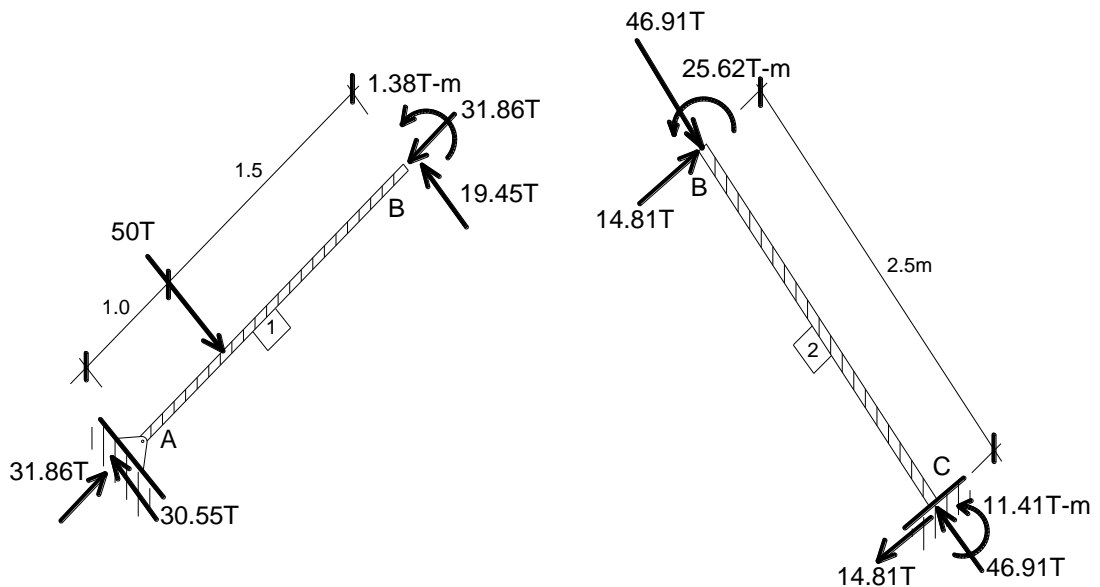
$$\{f_{em}\}_1 = \{f^o\}_1 + [k]_1 \{u\}_1$$

BARRA 1

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 32,344 \\ 17.93 \times 10^5 \\ 0 \\ 17,656 \\ -12.07 \times 10^5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 \\ & 0.182482 & 22.810246 & 0 & -0.182482 & 22.810246 \\ & & 3892.94871 & 0 & -22.810246 & 1809.6127 \\ \text{Simétrica} & & & 5 & 0 & 0 \\ & & & & 0.182482 & -22.810246 \\ & & & & & 3892.94871 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -824.48 \\ -6,372.55 \\ -8,005.46 \\ 681.94 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31.86T \\ 30.55T \\ 0T-m \\ -31.86T \\ 19.45T \\ 1.38T-m \end{bmatrix}$$

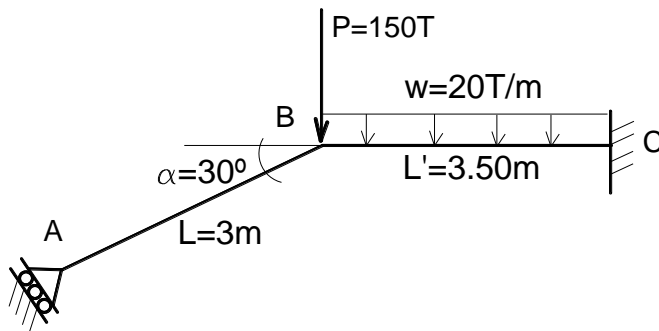
BARRA 2

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 \\ & 0.182482 & 22.810246 & 0 & -0.182482 & 22.810246 \\ & & 3892.94871 & 0 & -22.810246 & 1809.6127 \\ \text{Simétrica} & & & 5 & 0 & 0 \\ & & & & 0.182482 & -22.810246 \\ & & & & & 3892.94871 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9,382.02 \\ -4,083.44 \\ 681.94 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 46.91T \\ 14.81T \\ 25.62T-m \\ -46.91T \\ -14.81T \\ 11.41T-m \end{bmatrix}$$



CURSO : ANÁLISIS ESTRUCTURAL II  
 PROFESOR : MSc ING ARTURO RODRÍGUEZ SERQUÉN

**EJEMPLO 2.-** Resolver el caso mostrado aplicando el método de las rigideces.



**SOLUCIÓN.-**

1) COORDENADAS LOCALES

a) Matriz de Rigidez

BARRA AB

$$[k_{AB}] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

BARRA BC

$$[k_{BC}] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L'} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L'} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L'^3} & \frac{6EI}{L'^2} & 0 & -\frac{12EI}{L'^3} & \frac{6EI}{L'^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L'^2} & \frac{4EI}{L'} & 0 & -\frac{6EI}{L'^2} & \frac{2EI}{L'} \\ -\frac{EA}{L'} & 0 & 0 & \frac{EA}{L'} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L'^3} & -\frac{6EI}{L'^2} & 0 & \frac{12EI}{L'^3} & -\frac{6EI}{L'^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L'^2} & \frac{2EI}{L'} & 0 & -\frac{6EI}{L'^2} & \frac{4EI}{L'} \end{bmatrix}$$

CURSO : ANÁLISIS ESTRUCTURAL II  
 PROFESOR : MSc ING ARTURO RODRÍGUEZ SERQUÉN

## b) FIJACIONES

### BARRAS AB y BC

$$\{f_{AB}^0\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \{f_{BC}^0\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{wL'}{2} \\ \frac{wL'^2}{12} \\ 0 \\ \frac{wL'}{2} \\ -\frac{wL'^2}{12} \end{Bmatrix}$$

## 2) COORDENADAS GLOBALES

### a) Matriz de Rigidez

#### BARRA AB

Hallamos  $[\bar{K}] = [A^T][K][A]$ , con las matrices de rotación:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & -s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Luego:  $[\bar{K}_{AB}] =$

	①	②	③	④	⑤	
$k_{11}$	$k_{12}$	$k_{13}$	$(ck_{14} - sk_{15})$	$(sk_{14} + ck_{15})$	$k_{16}$	①
$k_{21}$	$k_{22}$	$k_{23}$	$(ck_{24} - sk_{25})$	$(sk_{24} + ck_{25})$	$k_{26}$	②
$k_{31}$	$k_{32}$	$k_{33}$	$(ck_{34} - sk_{35})$	$(sk_{34} + ck_{35})$	$k_{36}$	③
$(ck_{41} - sk_{51})$	$(ck_{42} - sk_{52})$	$(ck_{43} - sk_{53})$	$[c(ck_{44} - sk_{54}) - s(ck_{45} - sk_{55})]$	$[s(ck_{44} - sk_{54}) + c(ck_{45} - sk_{55})]$	$(ck_{46} - sk_{56})$	④
$(sk_{41} + ck_{51})$	$(sk_{42} + ck_{52})$	$(sk_{43} + ck_{53})$	$[c(sk_{44} + ck_{54}) - s(sk_{45} + ck_{55})]$	$[s(sk_{44} + ck_{54}) + c(sk_{45} + ck_{55})]$	$(sk_{46} + ck_{56})$	⑤
$k_{61}$	$k_{62}$	$k_{63}$	$(ck_{64} - sk_{65})$	$(sk_{64} + ck_{65})$	$k_{66}$	

CURSO : ANÁLISIS ESTRUCTURAL II  
 PROFESOR : MSc ING ARTURO RODRÍGUEZ SERQUÉN

$$[\bar{K}_{AB}] =$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccc}
 \textcircled{1} & \textcircled{2} & & \textcircled{3} & & \textcircled{4} & & \textcircled{5} \\
 \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} \cos \alpha & & -\frac{EA}{L} \sin \alpha & & 0 \\
 \frac{13EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & & \frac{12EI}{L^3} \sin \alpha & & \frac{12EI}{L^3} \cos \alpha & & \frac{6EI}{L^2} \\
 & \frac{4EI}{L} & & \frac{6EI}{L^2} \sin \alpha & & -\frac{6EI}{L^2} \cos \alpha & & \frac{2EI}{L} \\
 & & & \left( \frac{EA}{L} \cos^2 \alpha + \frac{12EI}{L^3} \sin^2 \alpha \right) & & \left( \frac{EA}{L} \sin \alpha \cos \alpha - \frac{12EI}{L^3} \sin \alpha \cos \alpha \right) & & \frac{6EI}{L^2} \sin \alpha \\
 & & & & & \left( \frac{EA}{L} \sin^2 \alpha + \frac{12EI}{L^3} \cos^2 \alpha \right) & & -\frac{6EI}{L^2} \cos \alpha \\
 & & & & & & & \frac{4EI}{L}
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \textcircled{1} \\
 \textcircled{2} \\
 \textcircled{3} \\
 \textcircled{4} \\
 \textcircled{5}
 \end{array}$$

### BARRA BC

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccc}
 \textcircled{3} & \textcircled{4} & \textcircled{5} & & & \\
 \frac{EA}{L'} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L'} & 0 & 0 \\
 0 & \frac{12EI}{L'^3} & \frac{6EI}{L'^2} & 0 & -\frac{12EI}{L'^3} & \frac{6EI}{L'^2} \\
 0 & \frac{6EI}{L'^2} & \frac{4EI}{L'} & 0 & -\frac{6EI}{L'^2} & \frac{2EI}{L'} \\
 -\frac{EA}{L'} & 0 & 0 & \frac{EA}{L'} & 0 & 0 \\
 0 & -\frac{12EI}{L'^3} & -\frac{6EI}{L'^2} & 0 & \frac{12EI}{L'^3} & -\frac{6EI}{L'^2} \\
 0 & \frac{6EI}{L'^2} & \frac{2EI}{L'} & 0 & -\frac{6EI}{L'^2} & \frac{4EI}{L'}
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \textcircled{3} \\
 \textcircled{4} \\
 \textcircled{5} \\
 \textcircled{3} \\
 \textcircled{4} \\
 \textcircled{5} \\
 \textcircled{4} \\
 \textcircled{5}
 \end{array}$$

### b) FIJACIONES

#### BARRAS AB y BC

CURSO : ANÁLISIS ESTRUCTURAL II  
 PROFESOR : MSc ING ARTURO RODRÍGUEZ SERQUÉN

---

$$\{\bar{f}^0_{AB}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \\ \textcircled{4} \\ \textcircled{5} \end{matrix}$$

$$\{\bar{f}^0_{BC}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{wL'}{2} \\ \frac{wL'^2}{12} \\ 0 \\ \frac{wL'}{2} \\ -\frac{wL'^2}{12} \end{Bmatrix} \begin{matrix} \textcircled{3} \\ \textcircled{4} \\ \textcircled{5} \end{matrix}$$

### 3) EQUILIBRIO Y ENSAMBLE DE ELEMENTOS

$$\Sigma \{\bar{f}^0\}_m + \Sigma [k]_m [\bar{u}]_m = \Sigma \{F_e\}_m \longrightarrow \{F\} + [K][U] = \{F_e\}$$

Con  $[K][U] = \{F_e\} - \{F^0\}$ , considerando sólo filas y columnas correspondientes a los desplazamientos  $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5$ , se tiene:

Aplicando la ecuación de equilibrio del método:

$$\{F\} + [K][U] = \{F_e\} \rightarrow [K][U] = \{F_e\} - \{F\}$$


$$\begin{array}{c}
 \textcircled{u_1} \qquad \qquad \qquad \textcircled{u_2} \qquad \qquad \qquad \textcircled{u_3} \qquad \qquad \qquad \textcircled{u_4} \qquad \qquad \qquad \textcircled{u_5} \\
 \left[ \begin{array}{ccccc}
 \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} \text{sen} \alpha & -\frac{12EI}{L^3} \text{cos} \alpha & \frac{6EI}{L^2} \\
 \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} \text{sen} \alpha & -\frac{6EI}{L^2} \text{cos} \alpha & \frac{2EI}{L} \\
 \frac{12EI}{L^3} \text{sen} \alpha & \frac{6EI}{L^2} \text{sen} \alpha & \frac{EA}{L} \text{cos}^2 \alpha + \frac{12EI}{L^3} \text{sen}^2 \alpha + \frac{EA}{L'} & \frac{EA}{L} \text{sen} \alpha \text{cos} \alpha - \frac{12EI}{L^3} \text{cos} \alpha \text{sen} \alpha & \frac{6EI}{L^2} \text{sen} \alpha \\
 -\frac{12EI}{L^3} \text{cos} \alpha & -\frac{6EI}{L^2} \text{cos} \alpha & \frac{EA}{L} \text{sen} \alpha \text{cos} \alpha - \frac{12EI}{L^3} \text{cos} \alpha \text{sen} \alpha & \frac{EA}{L} \text{sen}^2 \alpha + \frac{12EI}{L^3} \text{cos}^2 \alpha + \frac{12EI}{L'^3} & \frac{6EI}{L'^2} - \frac{6EI}{L^2} \text{cos} \alpha \\
 \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} \text{sen} \alpha & \frac{6EI}{L'^2} - \frac{6EI}{L^2} \text{cos} \alpha & \frac{4EI}{L'} + \frac{4EI}{L}
 \end{array} \right]
 \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}
 -
 \begin{Bmatrix} \frac{wL'}{2} \\ \frac{wL'^2}{12} \\ 0 \\ \frac{wL'}{2} \\ -\frac{wL'^2}{12} \end{Bmatrix}
 \end{array}$$

## EL MÉTODO DE LAS RIGIDECES

### PROCESO ALTERNATIVO PARA ESTRUCTURAS CON ARTICULACIONES

#### A) BARRAS CON ARTICULACIÓN A LA IZQUIERDA

En las barras con articulación a la izquierda se obtiene como esfuerzos:

$$\{f_{em}\} = \begin{Bmatrix} f_{ix}^{em} \\ f_{iy}^{em} \\ f_{iz}^{em} = 0 \\ f_{jx}^{em} \\ f_{jy}^{em} \\ f_{jz}^{em} \end{Bmatrix}$$


Como  $\{f_{em}\} = \{f^o\} + [k]\{u\}$ , para que el tercer valor sea nulo debe cumplirse que:

a)  $m_{iz}^o = 0$ ,

Lo cual ocurre utilizando las fijaciones del caso mostrado:



b) Así mismo la tercera fila del producto  $[k]\{u\}$  debe ser cero:

$$k_{11}u_i + k_{14}u_j \quad (1)$$

$$k_{22}v_i + k_{23}w_i + k_{25}v_j + k_{26}w_j \quad (2)$$

$$k_{32}v_i + k_{33}w_i + k_{35}v_j + k_{36}w_j = 0 \quad (3)$$

$$k_{41}u_i + k_{44}u_j \quad (4)$$

$$k_{52}v_i + k_{53}w_i + k_{55}v_j + k_{56}w_j \quad (5)$$

$$k_{62}v_i + k_{63}w_i + k_{65}v_j + k_{66}w_j \quad (6)$$

De la ecuación (3):  $w_i = -\frac{l}{k_{33}}(k_{32}v_i + k_{35}v_j + k_{36}w_j)$  (7)


La ecuación (7) nos expresa que el ángulo  $w_i$  puede encontrarse a partir de los otros desplazamientos, por lo tanto deja de ser una incógnita. Si se reemplaza (7) en las ecuaciones (1) a (6), separando rigideces de desplazamientos se obtiene la matriz de rigidez reducida:

CURSO : ANÁLISIS ESTRUCTURAL II  
 PROFESOR : MSc ING ARTURO RODRÍGUEZ SERQUÉN

$$[k_{redizq}] = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 & k_{14} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(1+\phi_y)}{(4+\phi_y)} k_{22} & 0 & 0 & \frac{(1+\phi_y)}{(4+\phi_y)} k_{25} & \frac{2(1+\phi_y)}{(4+\phi_y)} k_{26} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{41} & 0 & 0 & k_{44} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(1+\phi_y)}{(4+\phi_y)} k_{52} & 0 & 0 & \frac{(1+\phi_y)}{(4+\phi_y)} k_{55} & \frac{2(1+\phi_y)}{(4+\phi_y)} k_{56} \\ 0 & \frac{2(1+\phi_y)}{(4+\phi_y)} k_{62} & 0 & 0 & \frac{2(1+\phi_y)}{(4+\phi_y)} k_{65} & \frac{12(1+\phi_y)}{(4+\phi_y)^2} k_{66} \end{bmatrix}$$

## B) BARRAS CON ARTICULACIÓN A LA DERECHA

En las barras con articulación a la izquierda se obtiene como esfuerzos:

$$\{f_{em}\} = \begin{Bmatrix} f_{ix}^{em} \\ f_{iy}^{em} \\ f_{iz}^{em} \\ f_{jx}^{em} \\ f_{jy}^{em} \\ f_{jz}^{em} = 0 \end{Bmatrix}$$


Como  $\{f_{em}\} = \{f^o\} + [k]\{u\}$ , para que el tercer valor sea nulo debe cumplirse que:

a)  $m_{jz}^o = 0$ ,

Lo cual ocurre utilizando las fijaciones del caso mostrado:



b) Así mismo la sexta fila del producto  $[k]\{u\}$  debe ser cero:

$$k_{11}u_i + k_{14}u_j \quad (1)$$

$$k_{22}v_i + k_{23}w_i + k_{25}v_j + k_{26}w_j \quad (2)$$

$$k_{32}v_i + k_{33}w_i + k_{35}v_j + k_{36}w_j \quad (3)$$

CURSO : ANÁLISIS ESTRUCTURAL II  
 PROFESOR : MSc ING ARTURO RODRÍGUEZ SERQUÉN

$$k_{41}u_i + k_{44}u_j \quad (4)$$

$$k_{52}v_i + k_{53}w_i + k_{55}v_j + k_{56}w_j \quad (5)$$

$$k_{62}v_i + k_{63}w_i + k_{65}v_j + k_{66}w_j = 0 \quad (6)$$


$$\text{De la ecuación (6): } w_j = -\frac{1}{k_{66}}(k_{62}v_i + k_{65}v_j + k_{63}w_i) \quad (8)$$

La ecuación (8) nos expresa que el ángulo  $w_j$  puede encontrarse a partir de los otros desplazamientos, por lo tanto deja de ser una incógnita. Si se reemplaza (8) en las ecuaciones (1) a (6), separando rigideces de desplazamientos se obtiene la matriz de rigidez reducida:

$$[k_{red.der}] = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 & k_{14} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(1+\phi_y)}{(4+\phi_y)}k_{22} & \frac{2(1+\phi_y)}{(4+\phi_y)}k_{23} & 0 & \frac{(1+\phi_y)}{(4+\phi_y)}k_{25} & 0 \\ 0 & \frac{2(1+\phi_y)}{(4+\phi_y)}k_{32} & \frac{12(1+\phi_y)}{(4+\phi_y)^2}k_{33} & 0 & \frac{2(1+\phi_y)}{(4+\phi_y)}k_{35} & 0 \\ k_{41} & 0 & 0 & k_{44} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(1+\phi_y)}{(4+\phi_y)}k_{52} & \frac{2(1+\phi_y)}{(4+\phi_y)}k_{53} & 0 & \frac{(1+\phi_y)}{(4+\phi_y)}k_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

### C) BARRAS CON ARTICULACIÓN EN AMBOS EXTREMOS

En las barras con articulación a la izquierda se obtiene como esfuerzos:

$$\{f_{em}\} = \begin{Bmatrix} f_{ix}^{em} \\ f_{iy}^{em} \\ f_{iz}^{em} = 0 \\ f_{jx}^{em} \\ f_{jy}^{em} \\ f_{jz}^{em} = 0 \end{Bmatrix}$$


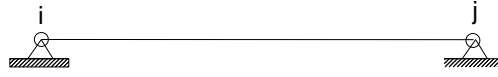
The diagram shows a horizontal bar with a node labeled 'i' at the left end and a node labeled 'j' at the right end. The bar is represented by a solid line connecting the two nodes.

Como  $\{f_{em}\} = \{f^0\} + [k]\{u\}$ , para que el tercer y sexto valor sean nulos debe cumplirse que:

CURSO : ANÁLISIS ESTRUCTURAL II  
 PROFESOR : MSc ING ARTURO RODRÍGUEZ SERQUÉN

a)  $m_{iz}^o = 0, m_{jz}^o = 0,$

Lo cual ocurre utilizando las fijaciones del caso mostrado:



b) Así mismo la tercera y sexta fila del producto  $[k]\{u\}$  deben ser cero:

$$k_{11}u_i + k_{14}u_j \quad (1)$$

$$k_{22}v_i + k_{23}w_i + k_{25}v_j + k_{26}w_j \quad (2)$$

$$k_{32}v_i + k_{33}w_i + k_{35}v_j + k_{36}w_j = 0 \quad (3)$$

$$k_{41}u_i + k_{44}u_j \quad (4)$$

$$k_{52}v_i + k_{53}w_i + k_{55}v_j + k_{56}w_j \quad (5)$$

$$k_{62}v_i + k_{63}w_i + k_{65}v_j + k_{66}w_j = 0 \quad (6)$$

De las ecuaciones (3) y (6) hallamos

$$w_i = -\frac{l}{k_{33}}(k_{32}v_i + k_{35}v_j + k_{36}w_j) \quad (7)$$

$$w_j = -\frac{l}{k_{66}}(k_{62}v_i + k_{65}v_j + k_{63}w_i) \quad (8)$$

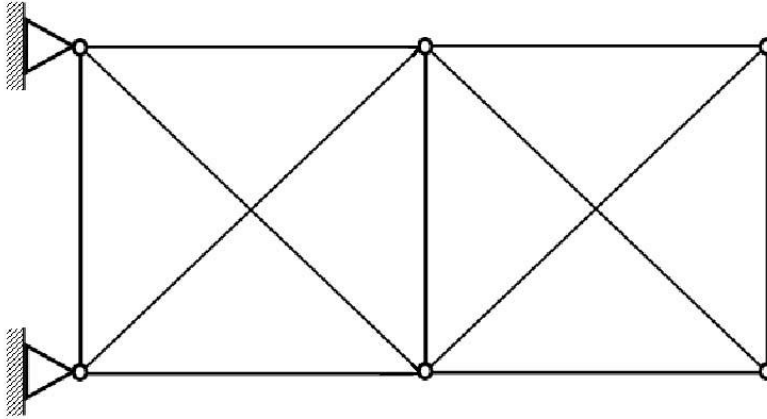
Las ecuaciones (7) y (8) nos expresan que los ángulo  $w_i$  y  $w_j$  pueden encontrarse a partir de los otros desplazamientos, por lo tanto dejan de ser incógnitas. Si se reemplaza (7) y (8) en las ecuaciones (1) a (6), separando rigideces de desplazamientos se obtiene la matriz de rigidez reducida:

$$[k_{red,izq,der}] = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 & k_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{41} & 0 & 0 & k_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

CURSO : ANÁLISIS ESTRUCTURAL II  
 PROFESOR : MSc ING ARTURO RODRÍGUEZ SERQUÉN

## ANÁLISIS MATRICIAL DE ESTRUCTURAS – MÉTODO DE LAS RIGIDECES

### ARMADURAS PLANAS



Las barras en este caso las consideramos como barras con articulaciones en ambos extremos. En tal razón, el vector de esfuerzos (elementos mecánicos) carecerá de los momentos  $\overline{m}_i$  y  $\overline{m}_j$ , los cuales son iguales a cero por la condición de articulación. La matriz de rigidez se obtiene por lo tanto eliminando la tercera y sexta filas y columnas de la matriz correspondiente al caso de barras de pórtico plano con articulación en ambos extremos, resultando una matriz de rigidez de orden cuatro.

#### 1) COORDENADAS LOCALES

##### GRADOS DE LIBERTAD [u]

Los cuatro grados de libertad a considerar son:



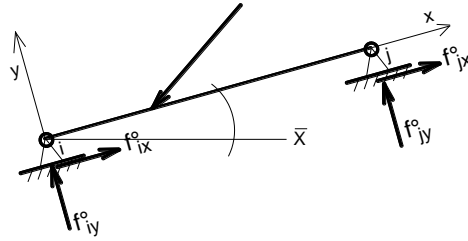
##### MATRIZ DE RIGIDEZ [k]

Con los cuatro grados de libertad considerados, se tiene:

$$[K] = \frac{EA_x}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

CURSO : ANÁLISIS ESTRUCTURAL II  
 PROFESOR : MSc ING ARTURO RODRÍGUEZ SERQUÉN

### FUERZAS DE FIJACIÓN {f<sup>o</sup>}



$$\{f^o\} = \begin{Bmatrix} f_{ix}^o \\ f_{iy}^o \\ f_{jx}^o \\ f_{jy}^o \end{Bmatrix}$$

### MATRIZ DE ROTACIÓN [A]

Para la transformación de coordenadas, eliminando 3ra fila y columna de la matriz de rotación  $[a]$  se tendrá la siguiente matriz:

$$[a] = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}$$

Y con ella:

$$[A] = \begin{bmatrix} [a] & [0] \\ [0] & [a] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix}$$

## 2) COORDENADAS GLOBALES

### MATRIZ DE RIGIDEZ $[\bar{k}]$

Con los cuatro grados de libertad considerados, se tiene:

$$[\bar{k}] = [A]^T [k] [A] = \frac{EA_x}{L} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix}$$

CURSO : ANÁLISIS ESTRUCTURAL II  
 PROFESOR : MSc ING ARTURO RODRÍGUEZ SERQUÉN

---

### FUERZAS DE FIJACIÓN $\{\bar{f}^o\}$

$$\{\bar{f}^o\} = [A]^T \{f^o\} = \begin{bmatrix} c & -s & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -s \\ 0 & 0 & s & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_{ix}^o \\ f_{iy}^o \\ f_{jx}^o \\ f_{jy}^o \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} cf_{ix}^o - sf_{iy}^o \\ sf_{ix}^o + cf_{iy}^o \\ cf_{jx}^o - sf_{jy}^o \\ sf_{jx}^o + cf_{jy}^o \end{Bmatrix}$$

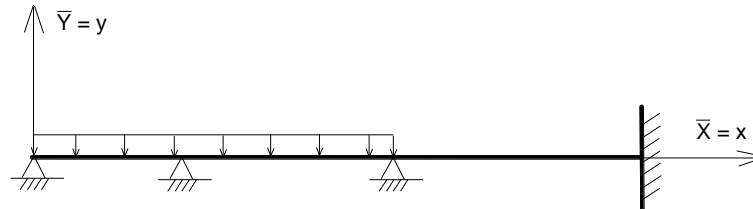
### ECUACIÓN DE EQUILIBRIO

$$\Sigma \{\bar{f}^o\}_m + \Sigma [\bar{k}]_m [\bar{u}]_m = \Sigma \{F_e\}_m \longrightarrow \{F\} + [K][U] = \{F_e\}$$

CURSO : ANÁLISIS ESTRUCTURAL II  
 PROFESOR : MSc ING ARTURO RODRÍGUEZ SERQUÉN

## ANÁLISIS MATRICIAL DE ESTRUCTURAS – MÉTODO DE LAS RIGIDECES

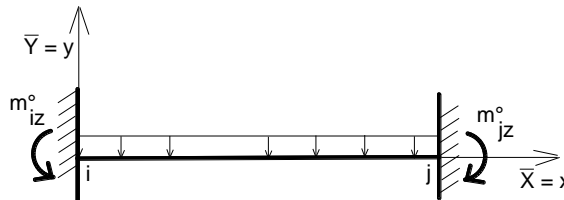
### VIGAS CONTÍNUAS



Los ejes globales se escogen de manera que coincidan con los ejes axiales de las barras. Al coincidir los ejes locales y globales no será necesaria la rotación de vectores y matrices. Por otro lado, los desplazamientos por fuerza axial, de no existir cargas en el sentido axial, se consideran nulos; igual ocurrirá con los desplazamientos transversales al eje. Como consecuencia, se eliminarán la 1ª, 2ª, 4ª y 5ª fila y columna de la matriz de rigidez de barras de pórtico. La matriz resultante se muestra:

$$[\bar{k}] = [k] = \frac{EI_z}{(1 + \phi_y)L} \begin{bmatrix} (4 + \phi_y) & (2 - \phi_y) \\ (2 - \phi_y) & (4 + \phi_y) \end{bmatrix}$$

Las fuerzas de fijación serán:



$$\{\bar{f}^o\} = \{f^o\} = \begin{Bmatrix} m_i^o \\ m_j^o \end{Bmatrix}$$

Siendo los grados de libertad de una barra:

$$\{\bar{u}\} = \{u\} = \begin{Bmatrix} \theta_i \\ \theta_j \end{Bmatrix}$$

### ECUACIÓN DE EQUILIBRIO

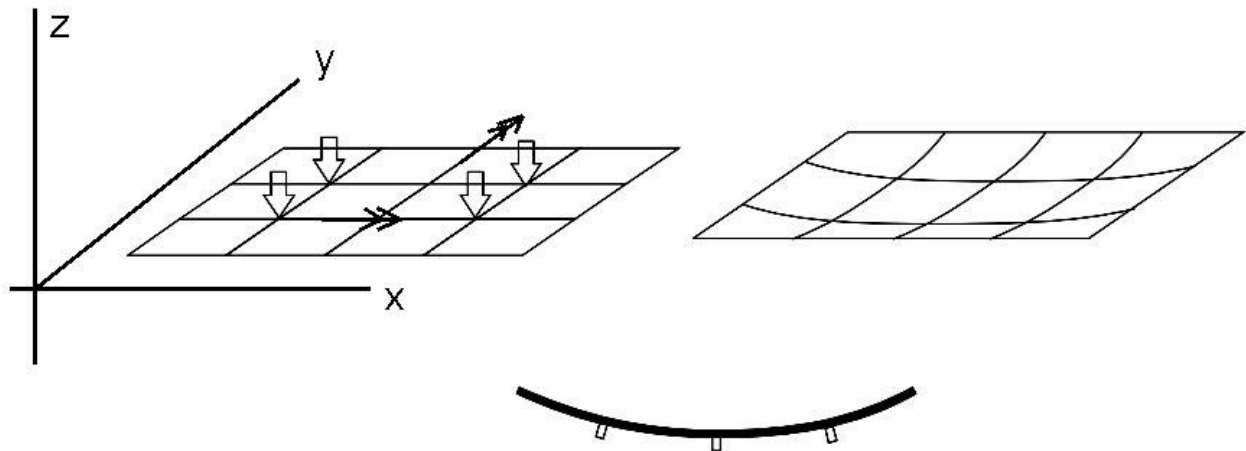
$$\sum \{\bar{f}^o\}_m + \sum [k]_m [u]_m = \sum \{F_e\}_m \longrightarrow \{F\} + [K][U] = \{F_e\}$$

CURSO : ANÁLISIS ESTRUCTURAL II  
 PROFESOR : MSc ING ARTURO RODRÍGUEZ SERQUÉN

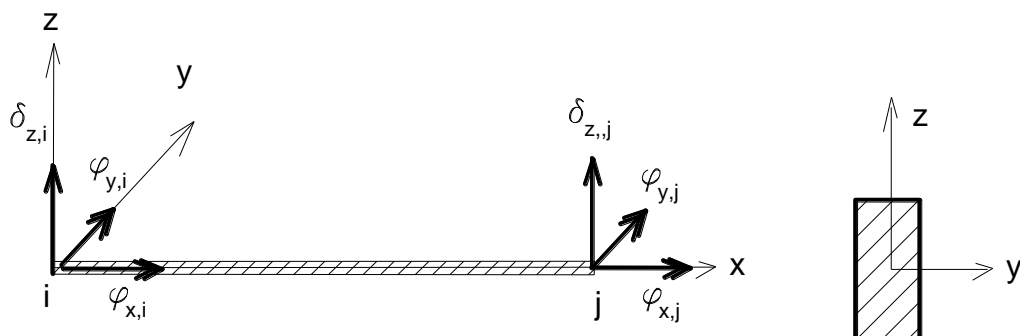
## ANÁLISIS MATRICIAL DE ESTRUCTURAS – MÉTODO DE LAS RIGIDECES

### CASO: PARRILLAS

Las parrillas son estructuras cuyas barras y nudos descansan en un mismo plano (XY), con conexiones rígidas de barras en todos los nudos (igual que en los pórticos). Las cargas son normales al plano XY y los pares aplicados se encuentran en el plano de la parrilla. Los desplazamientos a considerar en los nudos de una parrilla son tres: desplazamiento vertical ( $\delta_z$ ) y giros alrededor de los ejes X ( $\Theta_x$ ) i Y ( $\Theta_y$ ).



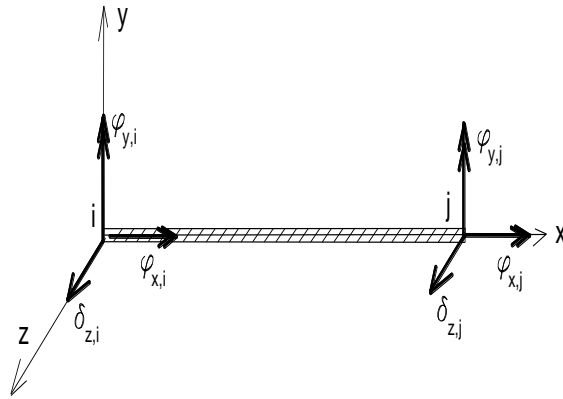
Grados de libertad considerados en barras de parrilla:



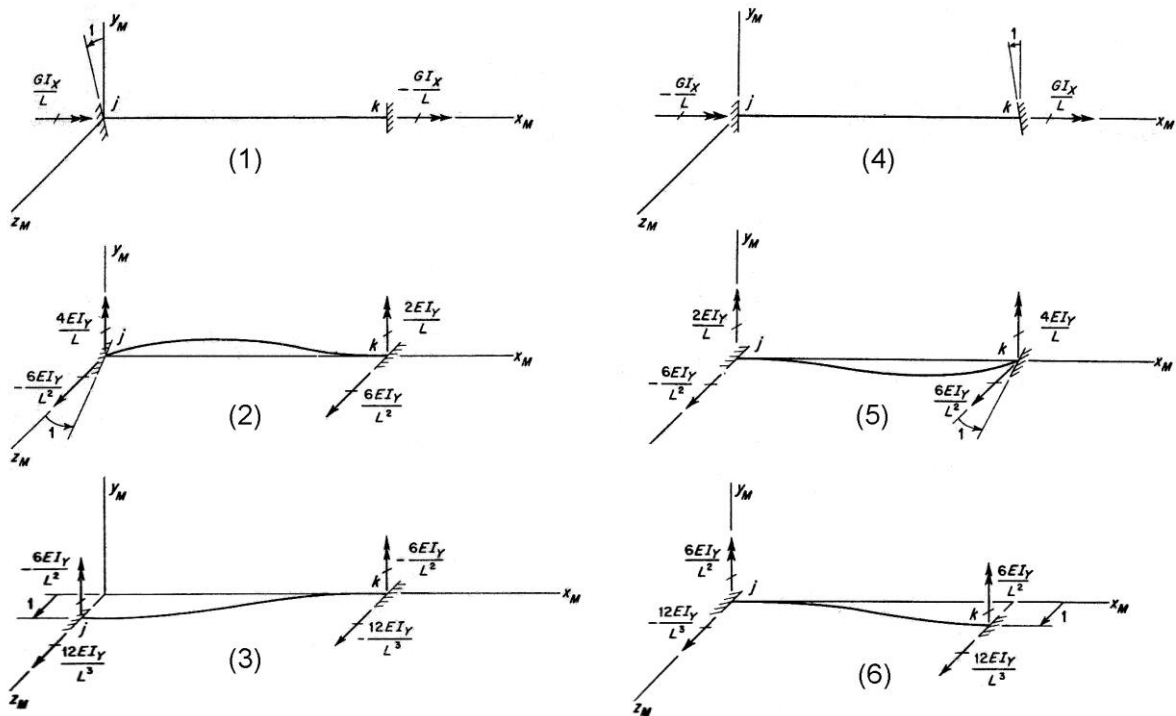
#### 4) COORDENADAS LOCALES

##### MATRIZ DE RIGIDEZ $[\bar{k}]$

Con los seis grados de libertad considerados, se tiene:



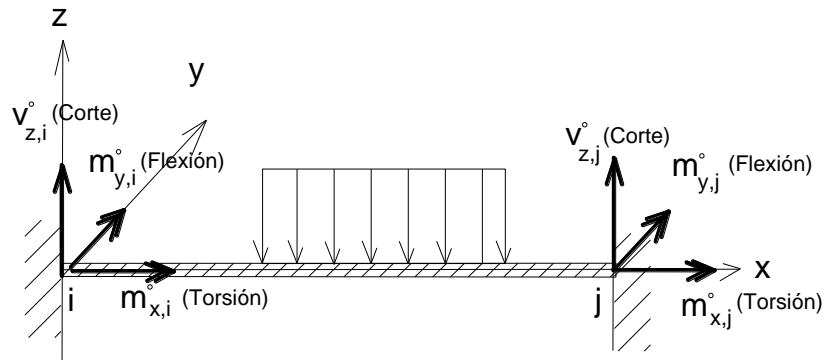
PARRILLAS  
 DESPLAZAMIENTOS UNITARIOS



$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 & -\frac{GI_x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EI_y}{L} & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & \frac{6EI_y}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & -\frac{12EI_y}{L^3} \\ -\frac{GI_x}{L} & 0 & 0 & \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2EI_y}{L} & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & \frac{6EI_y}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & \frac{12EI_y}{L^3} \end{bmatrix}$$

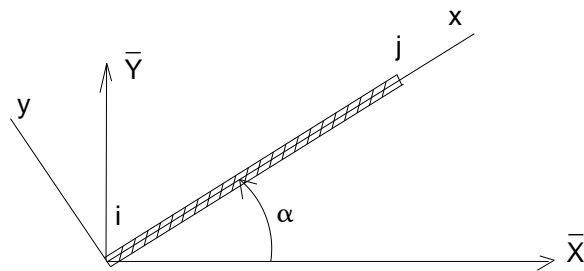
**FUERZAS DE FIJACIÓN {f<sup>o</sup>}**

$$\{f^o\} = \begin{Bmatrix} m_{xi}^o \\ m_{yi}^o \\ f_z^o \\ m_{xj}^o \\ m_{yj}^o \\ f_{zj}^o \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \text{torsión} \\ \text{flexión} \\ \text{cor tan te} \\ \text{torsión} \\ \text{flexión} \\ \text{cor tan te} \end{Bmatrix}$$



**MATRIZ DE ROTACIÓN [A]**

$$[A] = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



**5) COORDENADAS GLOBALES**

**MATRIZ DE RIGIDEZ [K-bar]**

$$[K\bar{]} = \begin{bmatrix} c^2k_{11} + s^2k_{22} & cs(k_{11} - k_{22}) & -sk_{23} & c^2k_{14} + s^2k_{25} & cs(k_{14} - k_{25}) & -sk_{26} \\ & s^2k_{11} + c^2k_{22} & ck_{23} & cs(k_{14} - k_{25}) & s^2k_{14} + c^2k_{25} & ck_{26} \\ & & k_{33} & -sk_{35} & ck_{35} & k_{36} \\ \hline & & & c^2k_{44} + s^2k_{55} & cs(k_{44} - k_{55}) & -sk_{56} \\ & & & s^2k_{44} + c^2k_{55} & s^2k_{44} + c^2k_{55} & ck_{56} \\ & & & & & k_{66} \end{bmatrix}$$

Simétrica

**FUERZAS DE FIJACIÓN [f-bar<sup>o</sup>]**

$$\{\bar{f}^o\} = [A]^T \{f^o\} = \begin{bmatrix} c & -s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & c & -s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m_{xi}^o \\ m_{yi}^o \\ f_{zi}^o \\ m_{xj}^o \\ m_{yj}^o \\ f_{zj}^o \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} cm_{xi}^o - sm_{yi}^o \\ sm_{xi}^o + cm_{yi}^o \\ f_{zi}^o \\ cm_{xj}^o - sm_{yj}^o \\ sm_{xj}^o + cm_{yj}^o \\ f_{zj}^o \end{Bmatrix}$$

CURSO : ANÁLISIS ESTRUCTURAL II  
 PROFESOR : MSc ING ARTURO RODRÍGUEZ SERQUÉN

---

## 6) EQUILIBRIO Y ENSAMBLE DE ELEMENTOS

$$\sum \{f^o\}_m + \sum [k]_m \{u\}_m = \sum \{F_e\}_m \longrightarrow \{F\} + [K]\{U\} = \{F_e\}$$

Con  $[K]\{U\} = \{F_e\} - \{F^o\}$ , se eliminan filas y columnas correspondientes a desplazamientos nulos.

## 7) PROCESO DE RETORNO (cálculo de esfuerzos en barras)

Habiendo calculado U, calcular  $\{\bar{u}\}_m$  y luego convertir a coordenadas locales con:

$$\{u\}_m = [A]_m \{\bar{u}\}_m$$

Entonces, los elementos\_mecánicos (esfuerzos) de barra serán:

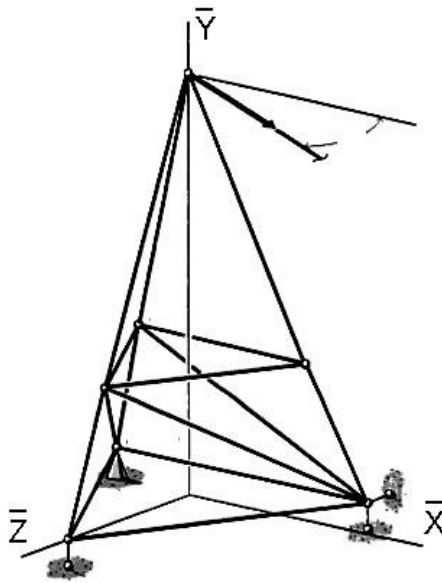
$$\{f_{em}\}_1 = \{f^o\}_1 + [k]_1 \{u\}_1$$

CURSO : ANÁLISIS ESTRUCTURAL II  
 PROFESOR : MSc ING ARTURO RODRÍGUEZ SERQUÉN

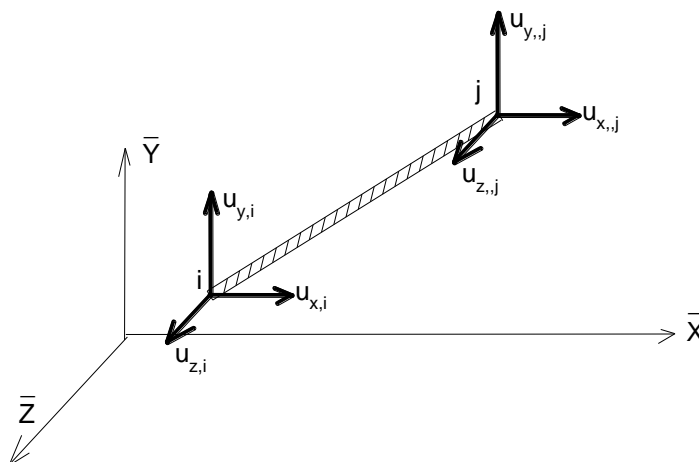
## ANÁLISIS MATRICIAL DE ESTRUCTURAS – MÉTODO DE LAS RIGIDECES

### CASO: ARMADURAS ESPACIALES

Las armaduras espaciales son estructuras con nudos considerados articulados. Los grados de libertad considerados en los nudos son tres y están referidos a los desplazamientos según los ejes principales: desplazamiento en X ( $\delta_x$ ), desplazamiento en Y ( $\delta_y$ ) y desplazamiento en Z ( $\delta_z$ ).



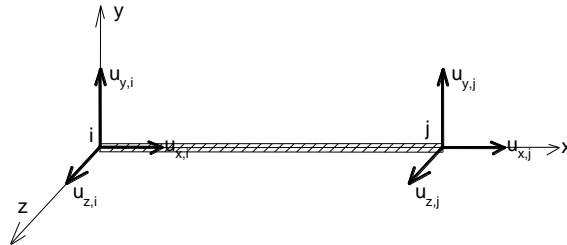
Grados de libertad considerados en barras de armadura espacial:



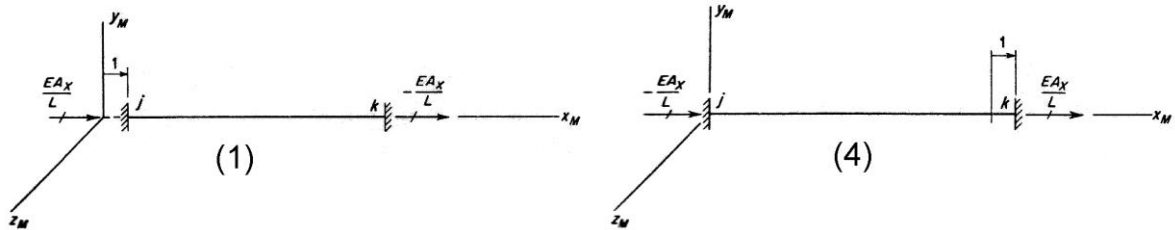
**3) COORDENADAS LOCALES**

**MATRIZ DE RIGIDEZ  $[K]$**

Con los seis grados de libertad considerados, se tiene:



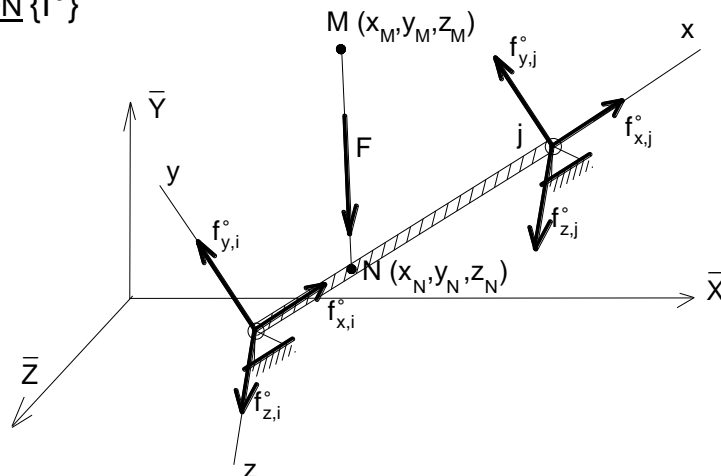
**ARMADURAS ESPACIALES  
 DESPLAZAMIENTOS UNITARIOS**



$$[K] = \frac{EA_x}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**FUERZAS DE FIJACIÓN  $\{f^o\}$**

$$\{f^o\} = \begin{Bmatrix} f_{xi}^o \\ f_{yi}^o \\ f_{zi}^o \\ f_{xj}^o \\ f_{yj}^o \\ f_{zj}^o \end{Bmatrix}$$



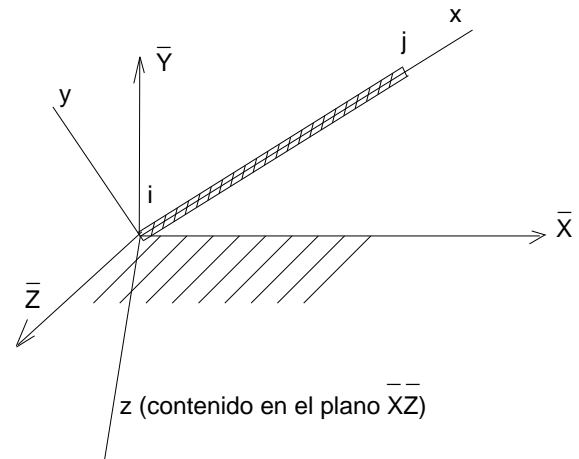
CURSO : ANÁLISIS ESTRUCTURAL II  
 PROFESOR : MSc ING ARTURO RODRÍGUEZ SERQUÉN

### MATRIZ DE ROTACIÓN [A]

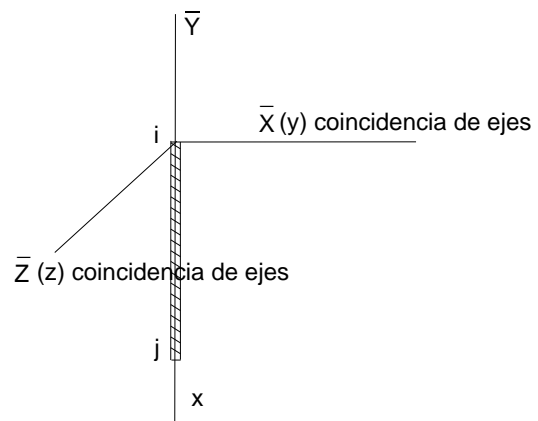
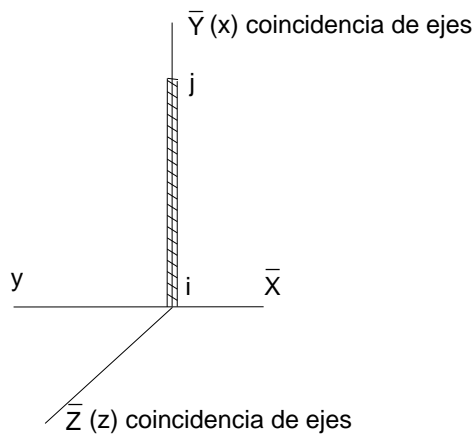
Siendo:  $c_x = \frac{x_j - x_i}{L}$ ,  $c_y = \frac{y_j - y_i}{L}$ ,  $c_z = \frac{z_j - z_i}{L}$

#### Miembros inclinados:

$$[a] = \begin{bmatrix} c_x & c_y & c_z \\ -c_x c_y & \sqrt{c_x^2 + c_z^2} & -c_y c_z \\ \frac{-c_z}{\sqrt{c_x^2 + c_z^2}} & 0 & \frac{c_x}{\sqrt{c_x^2 + c_z^2}} \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$



#### Miembros verticales:



$$[a] = \begin{bmatrix} 0 & c_y & 0 \\ -c_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Luego:

$$[A] = \begin{bmatrix} [a]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 3} \\ [0]_{3 \times 3} & [a]_{3 \times 3} \end{bmatrix}_{6 \times 6}$$

CURSO : ANÁLISIS ESTRUCTURAL II  
 PROFESOR : MSc ING ARTURO RODRÍGUEZ SERQUÉN

#### 4) COORDENADAS GLOBALES

$$\text{MATRIZ DE RIGIDEZ } [\bar{K}] = [A]^T [K] [A]$$

$$[\bar{K}] = \begin{bmatrix} c_x^2 & c_x c_y & c_x c_z & -c_x^2 & -c_x c_y & -c_x c_z \\ & c_y^2 & c_y c_z & -c_x c_y & -c_y^2 & -c_y c_z \\ & & c_z^2 & -c_x c_z & -c_y c_z & -c_z^2 \\ \text{Simétrica} & & & c_x^2 & c_x c_y & c_x c_z \\ & & & & c_y^2 & c_y c_z \\ & & & & & c_z^2 \end{bmatrix}_{6 \times 6}$$

$$\text{FUERZAS DE FIJACIÓN } \{\bar{f}^o\}$$

$$\{\bar{f}^o\} = [A]^T \{f^o\}$$

#### 5) EQUILIBRIO Y ENSAMBLE DE ELEMENTOS

$$\sum \{\bar{f}^o\}_m + \sum [\bar{k}]_m [\bar{u}]_m = \sum \{F_e\}_m \longrightarrow \{F\} + [K][U] = \{F_e\}$$

Con  $[K][U] = \{F_e\} - \{F^o\}$ , se eliminan filas y columnas correspondientes a desplazamientos nulos.

#### 6) PROCESO DE RETORNO (cálculo de esfuerzos en barras)

Habiendo calculado U, calcular  $\{\bar{u}\}_m$  y luego convertir a coordenadas locales con:

$$\{u\}_m = [A]_m \{\bar{u}\}_m$$

Entonces, los elementos\_mecánicos (esfuerzos) de barra serán:

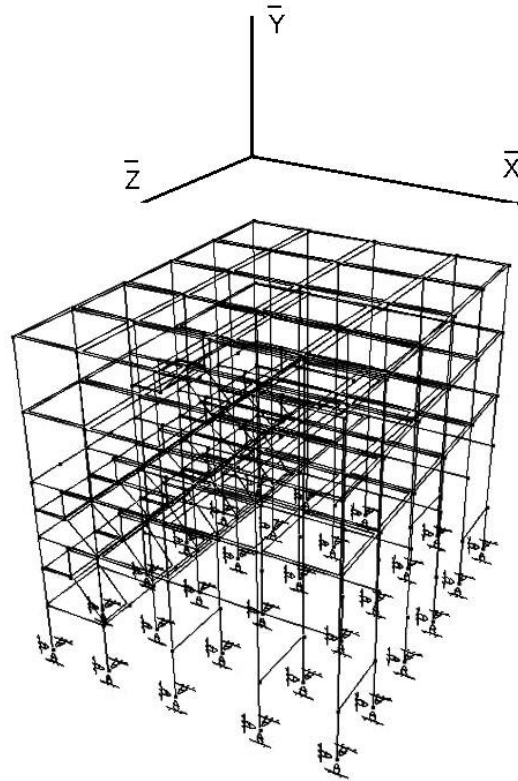
$$\{f_{em}\}_m = \{f^o\}_m + [k]_m \{u\}_m$$

CURSO : ANÁLISIS ESTRUCTURAL II  
 PROFESOR : MSc ING ARTURO RODRÍGUEZ SERQUÉN

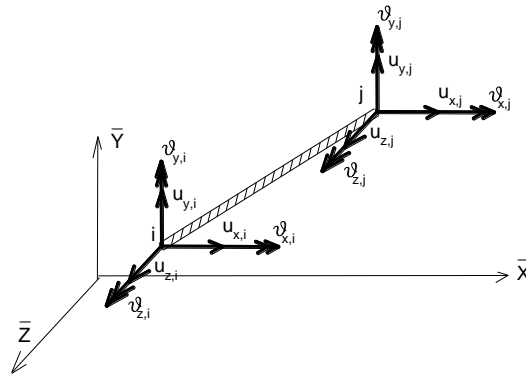
## ANÁLISIS MATRICIAL DE ESTRUCTURAS – MÉTODO DE LAS RIGIDECES

### CASO: MARCOS ESPACIALES

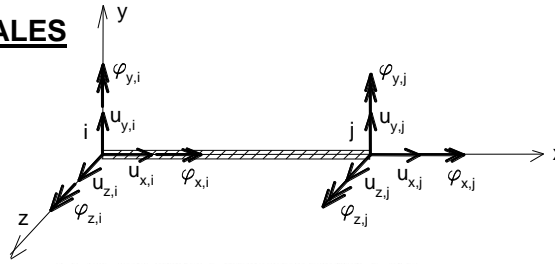
Los marcos espaciales son estructuras con nudos rígidos en los que se consideran seis grados de libertad referidos a tres desplazamientos lineales y tres giros según los ejes principales. Esto es: desplazamiento en X ( $\delta_x$ ), desplazamiento en Y ( $\delta_y$ ), desplazamiento en Z ( $\delta_z$ ), giro alrededor de X ( $\Theta_x$ ), giro alrededor de Y ( $\Theta_y$ ), giro alrededor de Z ( $\Theta_z$ ).



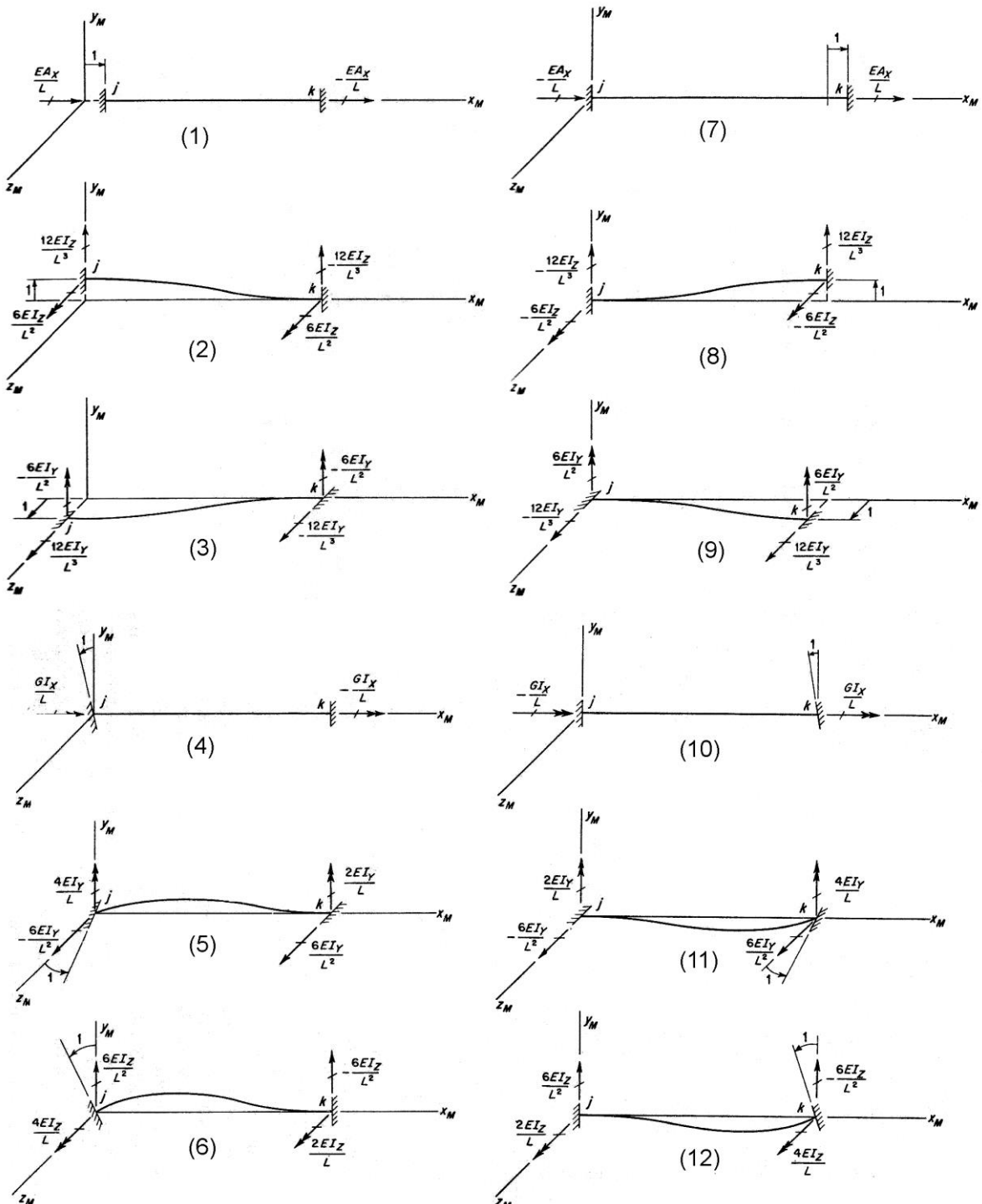
Grados de libertad considerados en barras de marco espacial:



1) **COORDENADAS LOCALES**



MARCOS ESPACIALES  
 DESPLAZAMIENTOS UNITARIOS



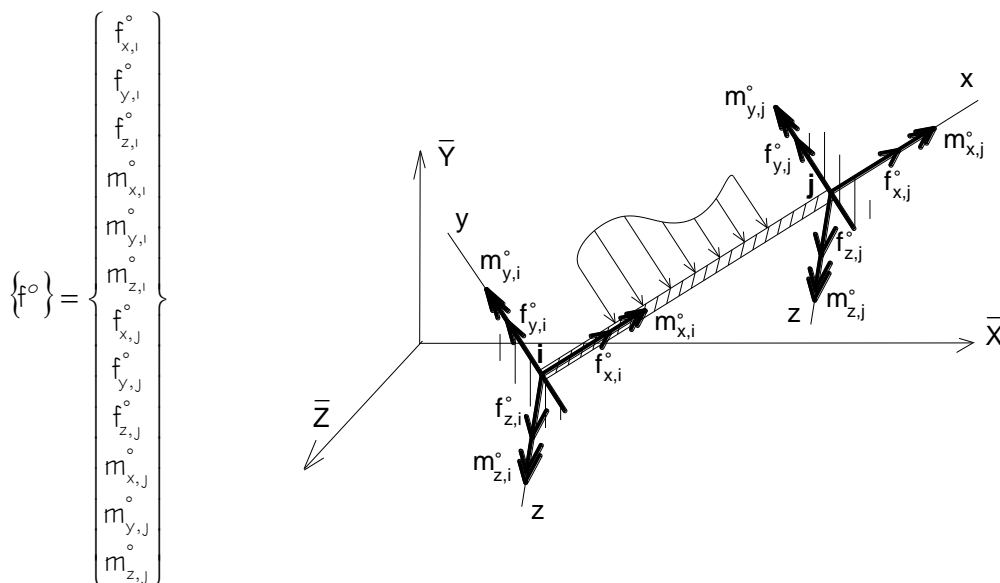
**MATRIZ DE RIGIDEZ [K]**

Con los doce grados de libertad por barra, se tiene:

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{EA_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{4EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & -\frac{2EI_y}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{4EI_z}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2EI_z}{L} \end{bmatrix}$$

S I M E T R I C A

**FUERZAS DE FIJACIÓN {f°}**

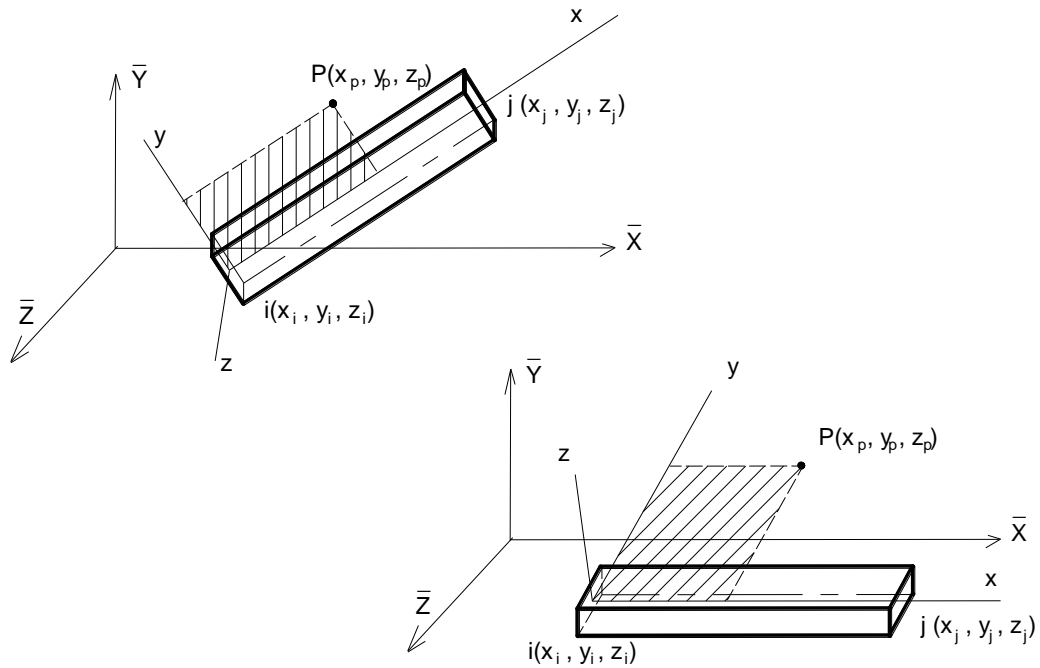


## MATRIZ DE ROTACIÓN [A]

### MIEMBROS INCLINADOS

#### 1) Primer paso (no se conoce $\alpha$ )

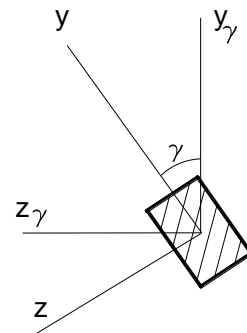
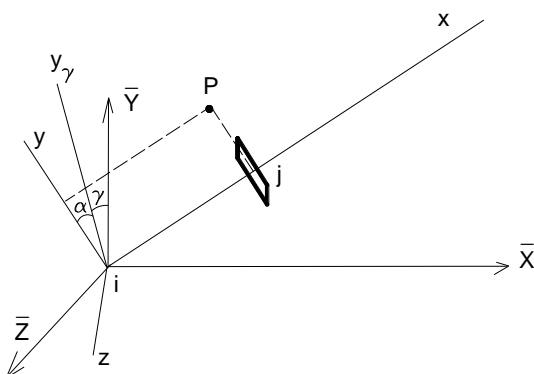
Dar las coordenadas de un punto "P" ( $x_p, y_p, z_p$ ) contenido en uno de los planos principales de la barra, pero que no esté sobre el eje de la barra misma. Este punto "P" y el eje local "x" definirán sin ninguna ambigüedad un plano en el espacio y ese plano se puede tomar como el plano "x-y" local.



$$\text{Luego: } c_x = \frac{x_j - x_i}{L}, \quad c_y = \frac{y_j - y_i}{L}, \quad c_z = \frac{z_j - z_i}{L}$$

$$L = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}$$

$$x_{ps} = x_p - x_i, \quad y_{ps} = y_p - y_i, \quad z_{ps} = z_p - z_i$$



CURSO : ANÁLISIS ESTRUCTURAL II  
 PROFESOR : MSc ING ARTURO RODRÍGUEZ SERQUÉN

$$X_{py} = C_x X_{ps} + C_y Y_{ps} + C_z Z_{ps}$$

$$Y_{py} = -\frac{C_x C_y}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} X_{ps} + \sqrt{C_x^2 + C_z^2} Y_{ps} - \frac{C_y C_z}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} Z_{ps}$$

$$Z_{py} = -\frac{C_z}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} X_{ps} + \frac{C_x}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} Z_{ps}$$

$$\text{sen} \alpha = \frac{Z_{py}}{\sqrt{Y_{py}^2 + Z_{py}^2}} \quad \text{cos} \alpha = \frac{Y_{py}}{\sqrt{Y_{py}^2 + Z_{py}^2}}$$

2) Segundo paso (se conoce  $\alpha$ )

$$[a] = \begin{bmatrix} C_x & C_y & C_z \\ -\frac{C_x C_y \cos \alpha - C_z \text{sen} \alpha}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} & \sqrt{C_x^2 + C_z^2} \cos \alpha & \frac{-C_y C_z \cos \alpha + C_x \text{sen} \alpha}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} \\ \frac{C_x C_y \text{sen} \alpha - C_z \cos \alpha}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} & -\sqrt{C_x^2 + C_z^2} \text{sen} \alpha & \frac{-C_y C_z \text{sen} \alpha + C_x \cos \alpha}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

Entonces:

$$[A]_{12 \times 12} = \begin{bmatrix} [a]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 3} \\ & [a]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 3} \\ & & [a]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 3} \\ \text{simét} & & & [a]_{3 \times 3} \end{bmatrix}_{12 \times 12}$$

Luego:  $[K]_{12 \times 12} = [A]_{12 \times 12}^T [K]_{12 \times 12} [A]_{12 \times 12}$

### MIEMBROS VERTICALES

1) Paso (no se conoce  $\alpha$ )

$$\text{sen} \alpha = \frac{Z_{ps}}{\sqrt{X_{ps}^2 + Z_{ps}^2}} \quad \text{cos} \alpha = \frac{-X_{ps}}{\sqrt{X_{ps}^2 + Z_{ps}^2}} C_y$$

CURSO : ANÁLISIS ESTRUCTURAL II  
 PROFESOR : MSc ING ARTURO RODRÍGUEZ SERQUÉN

---

## 2) Paso (se conoce $\alpha$ )

$$[a] = \begin{bmatrix} c_x & c_y & 0 \\ -c_y \cos \alpha & 0 & \text{sen} \alpha \\ c_y \text{sen} \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

Entonces:

$$[A]_{12 \times 12} = \begin{bmatrix} [a]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 3} \\ & [a]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 3} \\ & & [a]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 3} \\ \text{simét} & & & [a]_{3 \times 3} \end{bmatrix}_{12 \times 12}$$

$$\text{Luego: } [\bar{K}]_{12 \times 12} = [A]_{12 \times 12}^T [K]_{12 \times 12} [A]_{12 \times 12}$$

## 2) COORDENADAS GLOBALES

### MATRIZ DE RIGIDEZ

$$[\bar{K}]_{12 \times 12} = [A]_{12 \times 12}^T [K]_{12 \times 12} [A]_{12 \times 12}$$

### FUERZAS DE FIJACIÓN

$$\{\bar{f}^o\}_{12 \times 1} = [A]_{12 \times 12}^T \{f^o\}_{12 \times 1}$$

## 3) EQUILIBRIO Y ENSAMBLE DE ELEMENTOS

$$\sum \{\bar{f}^o\}_m + \sum [k]_m \{\bar{u}\}_m = \sum \{F_e\}_m \longrightarrow \{F\} + [K][U] = \{F_e\}$$

Con  $[K][U] = \{F_e\} - \{\bar{F}^o\}$ , se eliminan filas y columnas correspondientes a desplazamientos nulos.

## 4) PROCESO DE RETORNO (cálculo de esfuerzos en barras)

Habiendo calculado U, calcular  $\{\bar{u}\}_m$  y luego convertir a coordenadas locales con:

$$\{u\}_m = [A]_m \{\bar{u}\}_m$$

Entonces, los elementos\_mecánicos (esfuerzos) de barra serán:

$$\{f_{em}\}_m = \{f^o\}_m + [k]_m \{u\}_m$$