Incluye CD

RESOLUCIÓN DE ARMADURAS EN 2D CON EL MÉTODO MATRICIAL DE LA RIGIDEZ

DAVID ORTIZ SOTO

Edición revisada

civilgeeks.com
Ingeniería y Construcción

ACERCA DEL AUTOR

David Ortiz Soto es ingeniero civil egresado de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), Facultad de Estudios Superiores Aragón (FES Aragón), con créditos concluidos en la Maestría en Ingeniería Civil, área disciplinaria de Estructuras, por la Sección de Estudios de Posgrado e Investigación (SEPI) de la Escuela Superior de Ingeniería y Arquitectura, Unidad Zacatenco (ESIA-UZ), del Instituto Politécnico Nacional (IPN).

Actualmente desarrolla su tesis de Maestría denominada *"Los efectos de la deformación del Creep en columnas de concreto"*, siendo el Dr. Ernesto Pineda León el director de la misma.

El Ing. David Ortiz es autor, con los ingenieros Hugo Martínez, Sergio Omar Berruecos, Daniel Hernández, etc., del libro *"Estructuras Isostáticas en 2D: Problemas Resueltos",* el cual presentó oficialmente por primer vez en el *evento* Simposio de Investigación en Sistemas Constructivos, Computacionales y Arquitectónicos (SISCCA) 2014 con sede en la Universidad Juárez del Estado de Durango*.* Es uno de los editores de la WEB de Ingeniería Civil más importante de América Latina llamada *"CivilGeeks"*, en la que ha escrito diversos artículos. Así mismo, es uno de los creadores de la Biblioteca que lleva por nombre *"Problemario de Análisis de Estructuras en 2D y 3D"*.

Ha sido invitado varias veces al Programa de Radio *"Ingenio Civil"* de Nuestra Voz Radio: ¡La Voz del Pueblo Organizado!; en alguna emisión de tal programa, alternó con el Ph. D. Genner Villarreal Castro.

RESOLUCIÓN DE ARMADURAS EN 2D CON EL MÉTODO MATRICIAL DE LA RIGIDEZ

RESOLUCIÓN DE ARMADURAS EN 2D CON EL MÉTODO MATRICIAL DE LA RIGIDEZ

FES Aragón

IPN: “La técnica al servicio de la patria”

UNAM: “Por mi raza hablará el espíritu”

RESOLUCIÓN DE ARMADURAS EN 2D CON EL MÉTODO MATRICIAL DE LA RIGIDEZ

DAVID ORTIZ SOTO
Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Ingeniería y Arquitectura
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Estudios Superiores Aragón

Autor Colaborador:
M. en I. Daniel Hernández Galicia
Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Ingeniería y Arquitectura

Revisión Técnica Nacional:
Ing. Carlos Magdaleno Domínguez
Docente en Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Ingeniería y Arquitectura

Revisión Técnica Internacional de Perú y Honduras:
Ing. John Rojas Rosado
Universidad Nacional Hermilio Valdizán
Escuela Académico Profesional de Ingeniería Civil
M. en C. Carlos Humberto Rivera Orellana
Universidad Nacional Autónoma de Honduras
Facultad de Ingeniería Civil
California Polytechnic State University
Agricultural Engineering Department

México 2014

Datos de Catalogación bibliográfica

ORTIZ, D.

Resolución de Armaduras en 2D con el Método Matricial de la Rigidez

Primera edición

INDEPENDIENTE, México, 2014

Distribuidora virtual oficial: CivilGeeks

ISBN Trámite en proceso

Área: Ingeniería

Formato: Carta 21.6 cm x 27.9 cm

No está permitida la reproducción total o parcial de este libro, ni su tratamiento informático, ni la transmisión de ninguna forma o cualquier medio, ya sea electrónico, mecánico, por fotocopia, por registro u otros métodos, con fines lucrativos.

DERECHOS RESERVADOS 2014, por David Ortiz Soto

Impreso en México

DEDICATORIAS

Dedico de manera especial este libro a Dios, mis padres Clara y Antonio, así como a mis hermanos José Carlos y Antonio.

A mis abuelas Paulina Ramírez y Juana Marín.

He sido bendecido por el apoyo y afecto que me ha brindado cada uno de los miembros de mi familia a lo largo de mi vida, lo cual les agradezco infinitamente, incluyendo aquellos que se han adelantado (abuelos Rafael y Antonio, y tía Lucía).

Con toda sinceridad, les doy las gracias a todos mis amigos(as), compañeros(as), profesores(as) y colegas que siempre me han respaldado.

A todas las personas de México y del extranjero que directa o indirectamente me han apoyado y/o han depositado su confianza en mí.

A todo aquel que con los puños en alto sigue luchando por un mundo más justo (estudiantes, profesionistas honestos, obreros, campesinos, jornaleros y demás). Somos el pueblo trabajador, los siempre condicionados y reprimidos.

AGRADECIMIENTOS

Expreso mi más sincero agradecimiento a las instituciones y a las personas que han contribuido directa o indirectamente en la elaboración y difusión de este texto.

El Instituto Politécnico Nacional, Escuela Superior de Ingeniería y Arquitectura, Unidad Zacatenco y la Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Estudios Superiores Aragón, son las universidades en las que me he formado académicamente a nivel de licenciatura y posgrado.

Estoy muy agradecido con mi amigo y colaborador de este texto, el candidato a Máster Daniel Hernández Galicia; su participación ha sido trascendental.

Reconozco de manera especial y brindo un homenaje a las personalidades que me apoyaron con la revisión técnica de este libro. El Ing. Carlos Magdaleno Domínguez (escritor y docente en ESIA Zacatenco IPN) de México, el Ing. John Rojas Rosado de Perú y el M. en C. Carlos Humberto Rivera Orellana de Honduras.

Alex Henrry y Napoleón Cueva de Perú, Albert Richard Miranda de Bolivia, Mario Aguaguiña de Ecuador, Hugo Martínez de México, etc., son amigos y colegas que han sido parte fundamental en mi crecimiento personal y profesional, y que en conjunto integramos el proyecto de Biblioteca denominado “Problemario de Análisis de Estructuras en 2D y 3D”.

Le hago un gran reconocimiento al Ph. D. Genner Villarreal Castro por ser un gran amigo que me ha heredado toda una filosofía de vida, además de los conocimientos que me ha transmitido de Ingeniería Estructural a través de sus libros y videos tutoriales, y del apoyo total que he recibido de su parte con mis libros. Sus célebres frases como “Una educación universal, de calidad y al alcance de todos” o “México y Perú unidos por un conocimiento sin fronteras”, por mencionar algunas, representan toda una motivación para mí.

Valoro el esfuerzo que han hecho los creadores y sus colaboradores de diversos blogs, grupos y páginas de Facebook de ingeniería para apoyarnos. Gracias nuevamente a John Rojas de CivilGeeks: La web del ingeniero civil, de igual forma a Luis Aguilar de Ing. Civil FREE, a los creadores de Ingeniería Civil 21, Descarga libros de Ingeniería Civil, Ayuda a Estudiantes de Ing. Civil, Material de apoyo para el estudiante de Ing. Civil, Ingeniería Civil Aragón, todos los ESIA Zacatenco, entre otros. Desde luego, los miembros y visitantes de estas páginas han desempeñado un papel fundamental.

Gracias también a los conductores de Ingenio Civil, principalmente a Estefanía Bárcenas y Diana Mancera, y a todos los de Nuestra Voz Radio: ¡La Voz del Pueblo

Organizado!, por las invitaciones que me han hecho a tal programa para exponer mis escritos y hablar acerca de mi filosofía de vida.

A mis profesores, especialmente los de la Licenciatura en Ingeniería Civil y la Maestría en el área disciplinaria de Estructuras, por todos los conocimientos que me han brindado.

A los Capítulos Estudiantiles de la ESIA Zacatenco.

A todos aquellos que se han unido a nuestra página oficial de Facebook de Biblioteca y/o la han recomendado.

A la gran cantidad de amigos(as) que me han apoyado en todo momento desde mi cuenta personal de Facebook.

Dedico este escrito a todos y cada uno de los lectores, con la esperanza de que sea de su agrado y utilidad.

DAVID ORTIZ SOTO

MI FILOSOFÍA

Escribir un libro de manera solidaria para el estudiante y pensando siempre paralelamente en el apoyo a él, bajo la frase "la información no es sólo para el que la paga, es para todos", y luego venderlo a un precio muy elevado y no permitir su libre descarga, sería como si fuera un músico que le dedicara mis canciones al obrero, al campesino, al jornalero y a todo aquel que resiste ante un sistema de opresión, pero vendiera mis discos muy caros, tocara sólo en lugares de primer nivel y cobrara mucho dinero por entrar a mis conciertos. Por tal motivo, he puesto a la disposición de todos, sin importar nacionalidad, color de tez, escuela de procedencia, etc., este texto sin fines lucrativos, pues con ello pretendo darle un fuerte golpe a la desigualdad.

Con la idea de fomentar el apoyo mutuo, invito de manera cordial a todos y cada uno de los lectores a que seamos solidarios entre sí. Nuestra unidad será la base del progreso y para ello es indispensable el respeto. En lo personal admiro la calidad de cada una de las instituciones existentes tanto en México como en otros países, así mismo, valoro y reconozco el esfuerzo que hacen aquellos que se dedican no sólo a la Ingeniería Civil, sino que también de los que ejercen las profesiones de Arquitectura, Ingeniería Mecánica, Ingeniería Aeronáutica, etc.

Coloco al alcance de ustedes con toda humildad mi producción intelectual, ya que persigo un mundo más justo y equitativo, pues como dice mi gran amigo el doctor Genner Villarreal de Perú “la educación es un derecho y no un privilegio”. Escribo siempre como una respuesta a las injusticias tratando de inyectar una cierta dosis de conciencia al lector. Puesto que realmente “no existen fronteras ni banderas para el conocimiento”, hablo de países por simple contexto cultural.

A lo largo de la historia, el alumno ha sido visto por diversos profesores como una competencia y bajo ese argumento se le ha negado la correcta transmisión de los conocimientos muchas veces. Por otra parte, la ciencia comienza a tender más hacia el negocio e intereses de diversa índole que hacia un real beneficio a la sociedad. Con este movimiento de elaborar libros gratuitos se contribuye de algún modo a erradicar dichas situaciones.

Justo como lo menciona el artista Heron SKALO de México “Dentro de las expresiones de inconformidad existen múltiples manifestaciones artísticas”, mis coautores y yo que en conjunto conformamos la Biblioteca “Problemario de Análisis de Estructuras en 2D y 3D”, seguiremos resistiendo e imaginando a través de nuestros libros, cuestionando al sistema y denunciando la corrupción.

No he venido a dividir ni mucho menos a juzgar, más bien busco un mundo con oportunidades para todos por igual. Que la lucha sea por un mundo mejor y no una guerra entre nosotros. Amigos (as) sin duda alguna les recomiendo que compartan siempre sus conocimientos sin ego, nunca envidien a alguien, den su máximo esfuerzo y emitan críticas constructivas. La consigna es clara: encaminarnos hacia una Ingeniería Civil humanitaria.

CONTACTO

Cuenta Personal

David Ortiz M en I https://www.facebook.com/davidortizMenI

Página de la Biblioteca

Se les hace la amable invitación a unirse a la página oficial de Facebook de la Biblioteca; para localizarla, se les sugiere teclear en el buscador las palabras Problemario de Análisis de Estructuras en 2D Y 3D.

Si buscas un sitio donde se haga válido el supuesto derecho que todos tenemos de "La educación es gratuita y no un privilegio", la Biblioteca citada es uno de los lugares indicados, pues toda la información que elaboramos (Libros, Tesis, Vídeos Tutoriales y Manuales) profesionistas de México, Perú, Bolivia y Ecuador es de libre descarga. Si necesitas una dosis de entretenimiento, ahí la encontrarás. Siempre serás bienvenido al lugar donde a través de la expresión artística manifestamos nuestra inconformidad ante un sistema injusto y carente de oportunidades para todos por igual. Es en la literatura de Ingeniería más combativa que jamás hayas visto donde podrás notar que pintamos las banderas de un solo color, pues todos(as) tienen cabida, y los egos y las envidias no existen. Que disfruten de nuestra producción intelectual: es la novel propuesta del siglo XXI.

PREFACIO

El libro se ha escrito con la finalidad de contribuir en el apoyo a profesores, estudiantes y todos los interesados en general en la enseñanza y el aprendizaje del análisis de armaduras empleando el método matricial de la rigidez, el cual representa un apartado trascendental en la disciplina denominada análisis estructural. Esta última constituye uno de los pilares más importantes de la carrera de Ingeniería Civil y de otras como Ingeniería Mecánica, Ingeniería Aeronáutica y Arquitectura.

Una armadura es una estructura compuesta de elementos discretos, diseñada de tal forma que al transmitir las cargas sus elementos quedan sometidos primordialmente a la acción de fuerzas axiales de tensión o compresión. La longitud de un elemento es varias veces mayor que las dimensiones de su sección transversal y por ende puede transmitir la sustentación de una carga en una sola dirección. El triángulo es la unidad geométrica básica de la armadura.

El método matricial de la rigidez es un método de cálculo aplicable tanto a estructuras isostáticas como estructuras hiperestáticas de elementos que se comportan de forma elástica y lineal. Es también denominado método de los desplazamientos y en inglés se le conoce como direct stiffness method (DSM, método directo de la rigidez).

Si una estructura será analizada utilizando el método directo de la rigidez, entonces esta debe dividirse en una serie de elementos finitos discretos e identificar sus puntos extremos como nodos. Cuando se trata de una armadura, cada una de las barras que la componen representan los elementos finitos y los nodos son referenciados por las juntas. En términos generales, para cada elemento debe determinarse una matriz de rigidez inicialmente en coordenadas locales y posteriormente en el sistema global, y después se suman o ensamblan para conformar la llamada matriz de rigidez de la estructura K. Luego de formular los vectores totales de cargas externas C y de desplazamientos externos D, se plantea $C = KD$ que es la ecuación de rigidez de la estructura y que gobierna el comportamiento interno de la estructura idealizada. Finalmente, al resolver el sistema de ecuaciones, se obtienen primero los desplazamientos incógnita y enseguida las reacciones en los soportes. Las fuerzas en los elementos pueden calcularse haciendo uso de los resultados previos de los desplazamientos desconocidos.

El énfasis de este libro es resolver de manera minuciosa y clara una gran variedad de ejercicios sobre armaduras isostáticas e hiperestáticas a través del método directo de la rigidez. La solución se hace manualmente y empleando la programación con MATLAB. Esto tiene como objetivo ofrecer al lector una idea muy acercada de cómo efectúan el análisis estructural de armaduras los software de estructuras disponibles hoy en día, por ejemplo, el SAP 2000, ETABS o ANSYS,

debido a que estos trabajan con ese método. Por otra parte, en automático se le brinda al lector un medio para comprobar los resultados obtenidos en los programas de cálculo mencionados, en vez de limitarse simplemente a confiar en los resultados generados.

Es de suma importancia recalcar que se requieren conocimientos de algebra matricial para entender de mejor forma tanto el planteamiento como la solución de los problemas.

A continuación se proporciona el enfoque seguido en esta obra. El libro se divide en dos partes. La primera está conformada por tres capítulos y comprende los ejercicios resueltos “a mano” de armaduras con el método directo de la rigidez. En el capítulo 1 se analizan armaduras simples, compuestas y complejas. Las armaduras con un asentamiento en uno o más de sus soportes son estudiadas en el capítulo 2. En el capítulo 3 se verán armaduras con un rodillo en un plano inclinado.
La segunda parte del libro abarca en el último capítulo la programación del método de rigidez aplicado a armaduras. Específicamente, en el capítulo 4 se presenta el código en MATLAB y un manual para el usuario del mismo.

DAVID ORTIZ SOTO

CONTENIDO

1 ARMADURAS SIMPLES, COMPUESTAS Y COMPLEJAS 1

Ejercicio 1.1 1

Ejercicio 1.2 22

Ejercicio 1.3 28

Ejercicio 1.4 39

Ejercicio 1.5 48

Ejercicio 1.6 59

Problemas propuestos 79

2 ARMADURAS CON DESPLAZAMIENTO EN ALGUNO O VARIOS DE SUS SOPORTES 81

Ejercicio 2.1 81

Ejercicio 2.2 90

Problemas propuestos 95

3 ARMADURAS CON UN RODILLO EN UN PLANO INCLINADO 97

Ejercicio 3.1 97

Ejercicio 3.2 106

Problemas propuestos 113

4 CÓDIGO EN MATLAB Y MANUAL PARA EL USUARIO 115

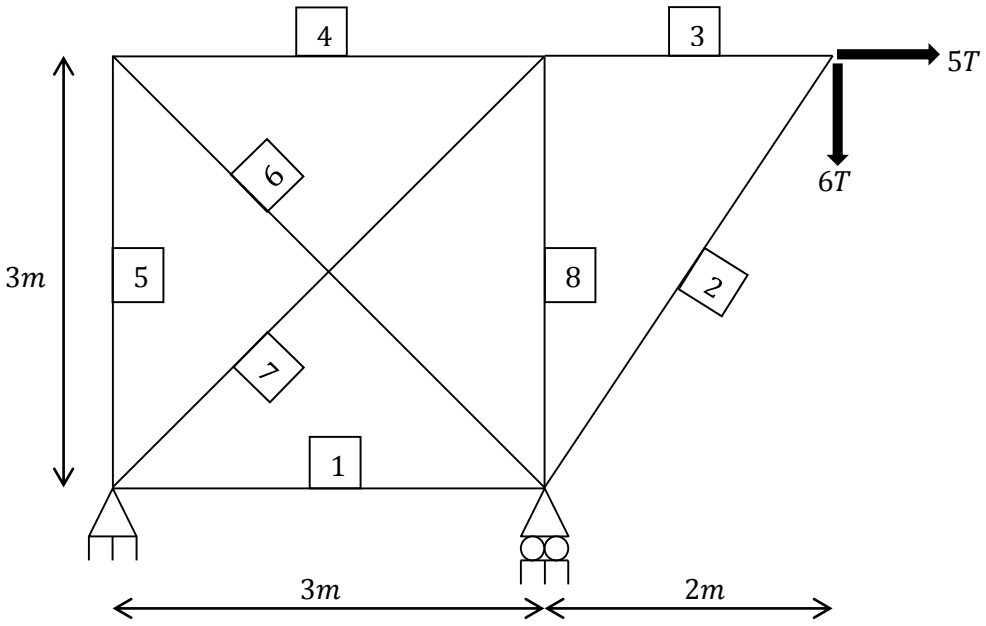
Problema de proyecto 130

BIBLIOGRAFÍA.....131

1

ARMADURAS SIMPLES, COMPUESTAS Y COMPLEJAS

EJERCICIO 1.1 Empleando el método de la rigidez matricial, calcule las reacciones en los soportes y la fuerza en cada uno de los elementos de la armadura mostrada en la figura 1-1a. La sección transversal de los elementos $1, 2, 3, 4$ y 5 es rectangular con un ancho de $30cm$ y una altura de $40cm$, mientras que la sección transversal de los elementos $6, 7$ y 8 es cuadrada de $40cm$ por lado. El módulo de elasticidad para todas las barras es el de las maderas duras, es decir, $2.1 * 10^6 \frac{T}{m^2}$.



(a)

Figura 1-1

SOLUCIÓN

Notación

Cuando una estructura se va a analizar empleando el método matricial de la rigidez, se requiere de la subdivisión de esta en una serie de elementos finitos discretos e identificar sus puntos extremos como nodos. Si se trata de una armadura, las barras o elementos que la componen representan los elementos finitos y los nodos son equivalentes a las juntas.

Cada elemento y cada nodo se identifican arbitrariamente mediante un número encerrado en un cuadrado y un número dentro de un círculo respectivamente, y los extremos lejano F (del inglés Far) y cercano N (del inglés Near) de cada elemento se simbolizan en forma arbitraria con una flecha a lo largo del mismo cuya punta o cabeza se dirige hacia el extremo alejado. Se establece un sistema de coordenadas globales con un origen que puede situarse en cualquier punto; generalmente se usan los ejes x (horizontal) y y (vertical) cuya dirección positiva tiene un sentido hacia la derecha y hacia arriba de forma respectiva.

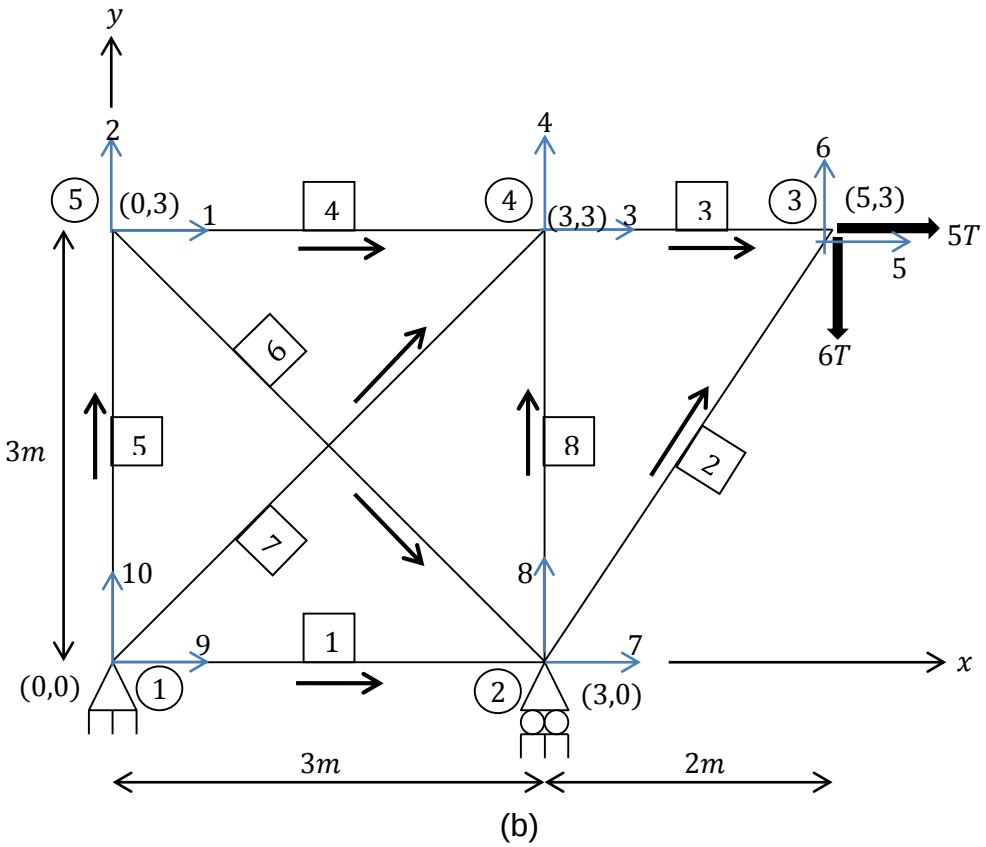
Hay dos grados de libertad o dos posibles desplazamientos por nodo de armadura, los cuales individualmente se especificarán a través de un número de código y serán referenciados mediante una flecha de color azul orientada en su dirección coordenada global positiva.

Los desplazamientos incógnita deben codificarse numéricamente primero, puesto que, como se verá más adelante, cuando se formule la matriz de rigidez de la estructura y se seccione, esto nos proporcionará la manera más directa para hallar sus valores. En general, en un nodo donde no haya algún soporte, los desplazamientos horizontal y vertical son desconocidos. Por su parte, en un apoyo simple o rodillo sólo se genera una reacción que es una fuerza que actúa perpendicularmente a la superficie en el punto de contacto, así que tal tipo de soporte es capaz de no permitir el desplazamiento en la dirección de su reacción, pero incapaz de impedir el desplazamiento perpendicular a la dirección de su fuerza reactiva en su nodo de aplicación. En tanto, un apoyo articulado, pasador o bisagra no permite los desplazamientos horizontal y vertical en su nodo de ubicación debido a las fuerzas reactivas surgidas en tales direcciones. Cabe mencionar que los argumentos para el apoyo en turno son válidos si a este no se le impone un desplazamiento inicial como lo puede ser un asentamiento.

Ahora se aplica el algoritmo anterior a este ejercicio. Nótese en la figura 1-1b que la armadura se compone de ocho elementos y se ha usado la numeración predeterminada en ellos, aunque bien pudo haberse utilizado otro orden al numerarlos. Se han trazado flechas a lo largo de los ocho elementos para nombrar

a los nodos cercano N y lejano F del elemento; desde luego, esta asignación se hizo arbitrariamente, por lo que el lector puede elegir un sentido opuesto en alguna, algunas e incluso todas estas flechas.

Dado que hay cinco nodos en la armadura (numerados también en un orden indistinto, el lector puede usar otra numeración), se tienen diez desplazamientos posibles a los que se les han destinado códigos del 1 al 10; los codificados desde el 1 hasta el 7 representan desplazamientos cuyo valor se desconoce puesto que no están restringidos o están permitidos, mientras que del 8 al 10 representan desplazamientos que se sabe con exactitud cuánto valen ya que están restringidos; dadas las restricciones de los soportes, estos últimos tres desplazamientos están impedidos. El origen de los ejes x, y se asocia en ①, debido a que de ese modo todos los nodos tendrán coordenadas positivas.



(b)

A continuación se analiza la secuencia en la que se numeraron los grados de libertad. Nodo a nodo fue observado con detenimiento. En las juntas ③, ④ y ⑤, al haber ausencia de soporte, las dos componentes de desplazamiento son incógnitas. Luego, debido a que en ② se posiciona un apoyo simple y por la forma en la que está orientado dicho apoyo, en ese nodo el desplazamiento horizontal se desconoce y el desplazamiento vertical se sabe que es nulo. Por último, la presencia de un

apoyo articulado en ① hace que tal nodo esté limitado por el desplazamiento. Una vez que se detectaron los desplazamientos desconocidos, se numeraron al azar. En seguida, los desplazamientos conocidos también fueron numerados con un orden indistinto, posterior a su debida identificación.

Finalmente, las coordenadas x, y de cada nodo se referencian por números entre paréntesis adyacentes a los mismos.

Cosenos directores y matriz de rigidez global para cada elemento

Como ya se mencionó, para el sistema de coordenadas globales se considera la x positiva hacia la derecha y la y positiva hacia arriba. Por otra parte, cada elemento tiene un sistema coordenado propio o local, el cual se usa para especificar el sentido de sus desplazamientos y sus cargas internas. Este sistema es definido a través de los ejes x', y' con el origen en el nodo cercano N y el eje x' coincidiendo con el eje longitudinal del elemento y señalando hacia el extremo alejado F.

La matriz de rigidez en coordenadas locales k'_i de un elemento i puede determinarse con esta ecuación:

$$k'_i = \frac{AE}{L}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (1-1)$$

donde

$A =$ área de la sección transversal del elemento.

$E =$ módulo de elasticidad del elemento.

$L =$ longitud del elemento.

Los cuatro elementos que conforman la matriz anterior se denominan coeficientes de influencia de la rigidez del elemento.

Para hacer compatibles las matrices de rigidez de los elementos, estas deben transformarse del sistema local al global, lo cual significa que la ecuación $1-1$ no se ocupará a la hora de la resolución del ejercicio.

Los ángulos más pequeños entre los ejes x, y globales positivos y el eje local x' positivo se designan como θ_x y θ_y. Los cosenos de esos ángulos se denominan cosenos directores y se evalúan con las siguientes ecuaciones:

$$\lambda_x = cos\theta_x = \frac{x_F - x_N}{L} = \frac{x_F - x_N}{\sqrt{(x_F - x_N)^2 + (y_F - y_N)^2}} \qquad (1-2)$$

$$\lambda_y = cos\theta_y = \frac{y_F - y_N}{L} = \frac{y_F - y_N}{\sqrt{(x_F - x_N)^2 + (y_F - y_N)^2}} \qquad (1-3)$$

donde

$x_N,\ y_N =$ coordenadas x, y del extremo cercano N del elemento en turno.

$x_F,\ y_F =$ coordenadas x, y del extremo lejano F del elemento en turno.

$L =$ longitud del elemento.

La expresión matemática para calcular la matriz de rigidez en coordenadas globales k_i de un elemento i, la cual tiene la propiedad de ser simétrica, es

$$k_i = \frac{AE}{L} \begin{array}{c} \begin{matrix} N_x & N_y & F_x & F_y \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} \lambda_x^2 & \lambda_x\lambda_y & -\lambda_x^2 & -\lambda_x\lambda_y \\ \lambda_x\lambda_y & \lambda_y^2 & -\lambda_x\lambda_y & -\lambda_y^2 \\ -\lambda_x^2 & -\lambda_x\lambda_y & \lambda_x^2 & \lambda_x\lambda_y \\ -\lambda_x\lambda_y & -\lambda_y^2 & \lambda_x\lambda_y & \lambda_y^2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} N_x \\ N_y \\ F_x \\ F_y \end{matrix} \qquad (1-4)$$

donde

$A =$ área de la sección transversal del elemento.

$E =$ módulo de elasticidad del elemento.

$L =$ longitud del elemento.

$N_x,\ N_y =$ número de código del grado de libertad global asociado con el extremo cercano N en las direcciones x y y respectivamente del elemento en turno.

$F_x,\ F_y =$ número de código del grado de libertad global asociado con el extremo lejano F en las direcciones x y y respectivamente del elemento en turno.

$\lambda_x,\ \lambda_y =$ cosenos directores.

Como el enfoque de este libro es la solución detallada de ejercicios sobre armaduras, se recomienda al lector remitirse a algún otro texto en caso de desear comprender la deducción matemática del método de rigidez matricial íntegramente. La obra titulada “Análisis Estructural” escrita por R. C. Hibbeler, octava edición, es una gran alternativa.

De acuerdo a la información proporcionada al inicio del problema, para los elementos 1 hasta 5 se tiene

$$A = (0.3m)(0.4m) = 0.12m^2 \qquad AE = (0.12m^2)\left(2.1 * 10^6\, {}^{T}/_{m^2}\right) = 252000\, T$$

y para los elementos 6, 7 y 8 se sabe que

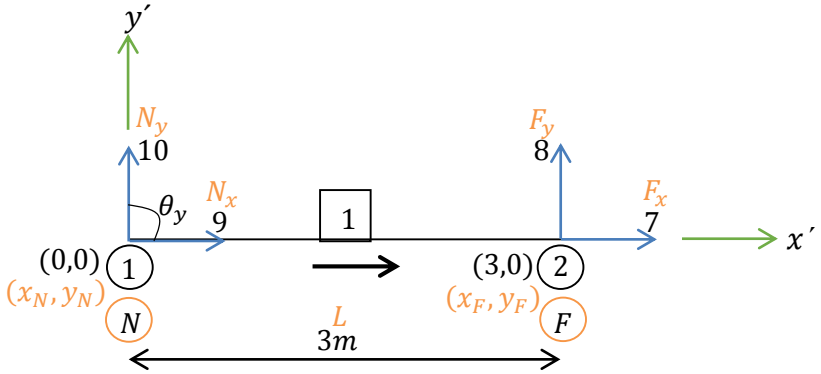
$$A = (0.4m)(0.4m) = 0.16m^2 \qquad AE = (0.16m^2)\left(2.1 * 10^6\, {}^{T}/_{m^2}\right) = 336000\, T$$

Se aislará cada elemento de la armadura, figuras 1-1c hasta 1-1j, con el objetivo de visualizar con mayor facilidad individualmente su longitud y número, así como sus nodos N y F con sus correspondientes coordenadas globales x_N, y_N y x_F, y_F, y sus debidos números de código de grado de libertad N_x, N_y y F_x, F_y. Además, con el único fin de esclarecer quienes son los cosenos directores de las barras, se coloca el sistema local x', y', y se identifican los ángulos θ_x y θ_y; si el lector lo cree conveniente, puede ignorar éste último sistema y los ángulos mencionados en las figuras citadas, debido a que los cosenos directores en este texto se infieren empleando coordenadas.
Paralelamente a cada aislamiento, se van aplicando las ecuaciones $1-2$, $1-3$ y $1-4$.

Elemento 1. De acuerdo a la figura 1-1c, ① es el extremo cercano y ② es el extremo lejano. Por lo tanto,

$$L = 3m \qquad \lambda_x = \frac{3-0}{3} = 1 \qquad \lambda_y = \frac{0-0}{3} = 0$$

$$k_1 = \begin{array}{c} \begin{matrix} 9 & 10 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 84000 & 0 & -84000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -84000 & 0 & 84000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 9 \\ 10 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} \end{array}$$

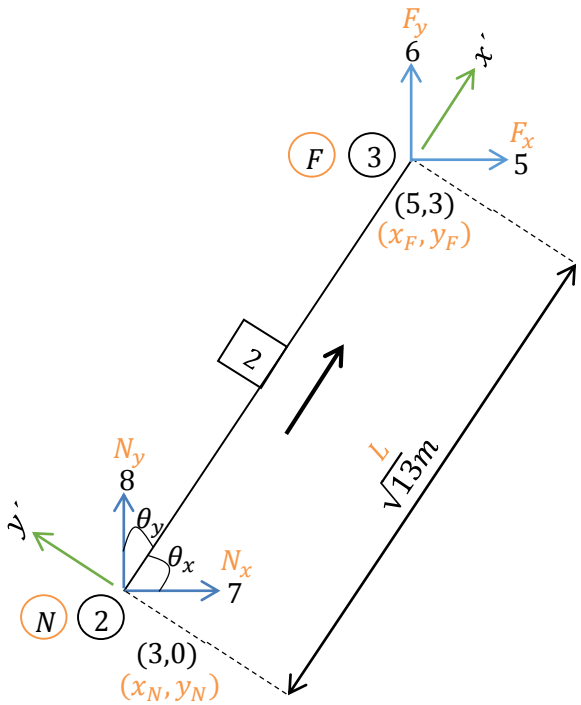


(c)

Elemento 2. Debido a que el extremo cercano es ② y el extremo lejano es ③, figura 1-1d, obtenemos

$$L = \sqrt{(2m)^2 + (3m)^2} = \sqrt{13}m \qquad \lambda_x = \frac{5-3}{\sqrt{13}} = 0.5547 \qquad \lambda_y = \frac{3-0}{\sqrt{13}} = 0.8321$$

$$k_2 = \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} 7 & 8 & 5 & 6 \end{matrix} \begin{pmatrix} 21505.8375 & 32262.2509 & -21505.8375 & -32262.2509 \\ 32262.2509 & 48393.3764 & -32262.2509 & -48393.3764 \\ -21505.8375 & -32262.2509 & 21505.8375 & 32262.2509 \\ -32262.2509 & -48393.3764 & 32262.2509 & 48393.3764 \end{pmatrix} \begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

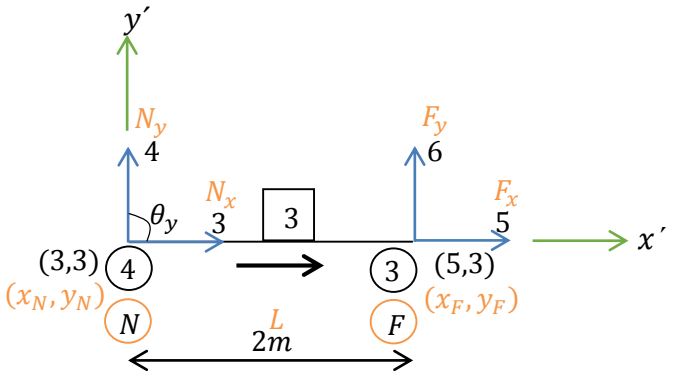


(d)

Elemento 3. Puesto que el extremo cercano es ④ y el extremo lejano es ③, figura 1-1e, se tiene

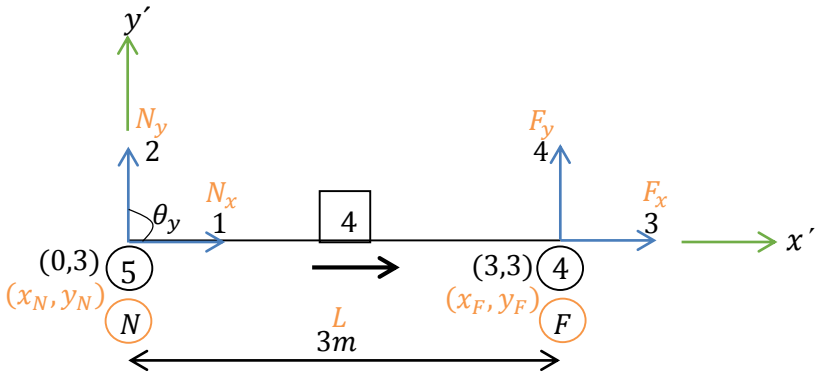
$$L = 2m \qquad \lambda_x = \frac{5-3}{2} = 1 \qquad \lambda_y = \frac{3-3}{2} = 0$$

$$k_3 = \begin{matrix} \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 126000 & 0 & -126000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -126000 & 0 & 126000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$



(e)

Elemento 4. Dado que el extremo cercano es ⑤ y el extremo lejano es ④, figura 1-1f, se infiere



(f)

$$L = 3m \qquad \lambda_x = \frac{3-0}{3} = 1 \qquad \lambda_y = \frac{3-3}{3} = 0$$

$$k_4 = \begin{matrix} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 84000 & 0 & -84000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -84000 & 0 & 84000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

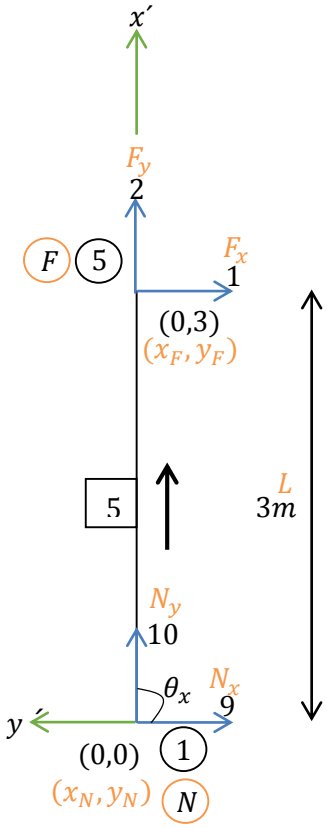
Elemento 5. Como ① es el extremo cercano y ⑤ es el extremo lejano, figura 1-1g, se deduce

$$L = 3m \qquad \lambda_x = \frac{0-0}{3} = 0 \qquad \lambda_y = \frac{3-0}{3} = 1$$

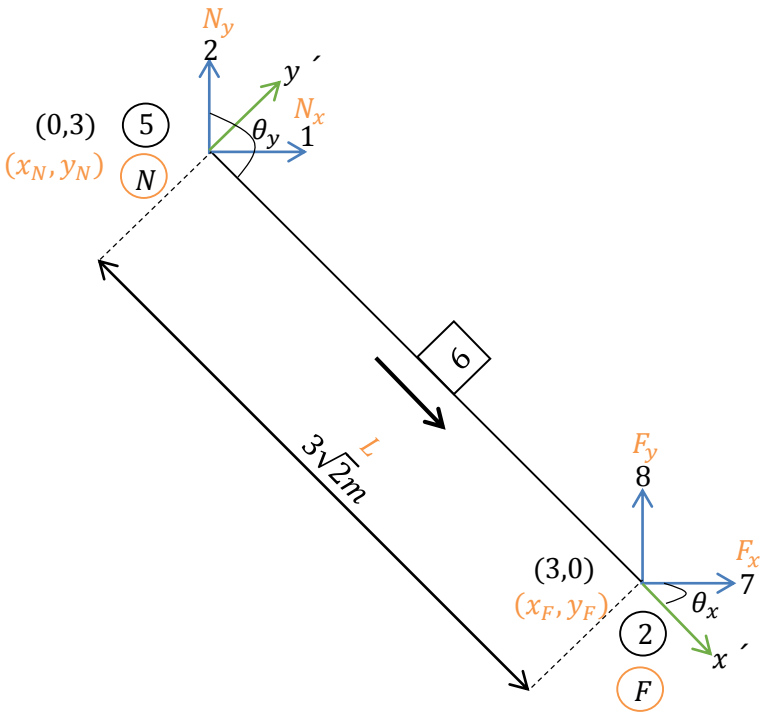
$$k_5 = \begin{matrix} \\ 9 \\ 10 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} 9 & 10 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 84000 & 0 & -84000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -84000 & 0 & 84000 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Elemento 6. Como el extremo cercano es ⑤ y el extremo lejano es ②, figura 1-1h, resulta

$$L = \sqrt{(3m)^2 + (3m)^2} = 3\sqrt{2}m \qquad \lambda_x = \frac{3-0}{3\sqrt{2}} = 0.7071 \qquad \lambda_y = \frac{0-3}{3\sqrt{2}} = -0.7071$$



(g)



(h)

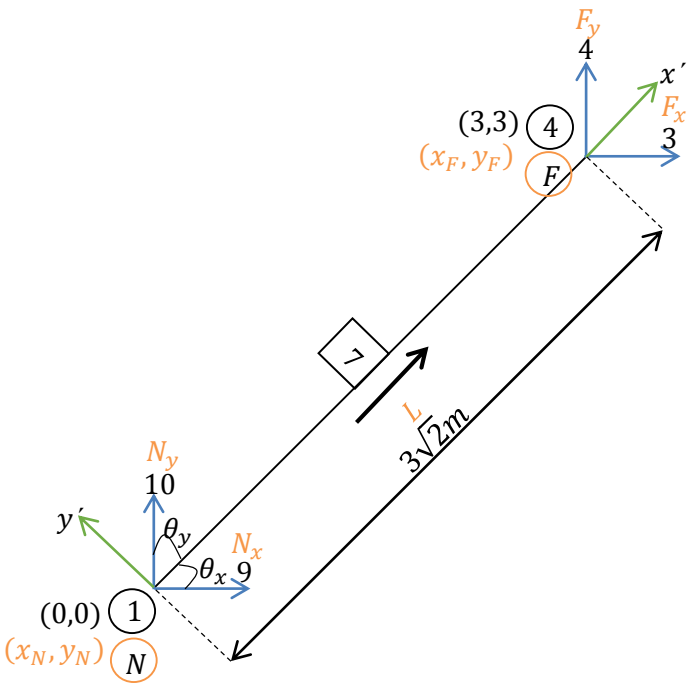
$$k_6 = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 39597.9798 & -39597.9798 & -39597.9798 & 39597.9798 \\ -39597.9798 & 39597.9798 & 39597.9798 & -39597.9798 \\ -39597.9798 & 39597.9798 & 39597.9798 & -39597.9798 \\ 39597.9798 & -39597.9798 & -39597.9798 & 39597.9798 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 7 \\ 8 \end{matrix}$$

Elemento 7. Debido a que el extremo cercano es ① y el extremo lejano es ④, figura 1-1i, se obtiene

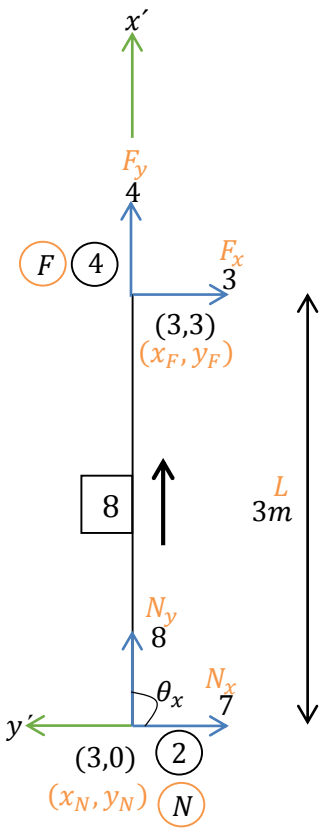
$$L = 3\sqrt{2}m \qquad \lambda_x = \frac{3-0}{3\sqrt{2}} = 0.7071 \qquad \lambda_y = \frac{3-0}{3\sqrt{2}} = 0.7071$$

$$k_7 = \begin{array}{c} \begin{matrix} 9 & 10 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 39597.9798 & 39597.9798 & -39597.9798 & -39597.9798 \\ 39597.9798 & 39597.9798 & -39597.9798 & -39597.9798 \\ -39597.9798 & -39597.9798 & 39597.9798 & 39597.9798 \\ -39597.9798 & -39597.9798 & 39597.9798 & 39597.9798 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} 9 \\ 10 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

Elemento 8. Puesto que el extremo cercano es ② y el extremo lejano es ④, figura 1-1j, tenemos



(i)



(j)

$$L = 3m \qquad \lambda_x = \frac{3-3}{3} = 0 \qquad \lambda_y = \frac{3-0}{3} = 1$$

$$k_8 = \begin{matrix} \\ 7 \\ 8 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} 7 & 8 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 112000 & 0 & -112000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -112000 & 0 & 112000 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Matriz de rigidez de la estructura

Como se designaron diez grados de libertad para la armadura, figura 1-1b, la matriz de rigidez tiene un orden de $10\,X\,10$ y se obtiene al sumar algebraicamente los elementos correspondientes a las ocho matrices anteriores. Para visualizar el proceso de ensamble con mayor facilidad, se expanden con ceros las filas y columnas numéricas faltantes en cada k_i. Los valores calculados previamente cuando se empleó la ecuación $1-4$ aparecen de color azul con la finalidad de distinguirlos.

$$k_1 = \begin{matrix} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 84000 & 0 & -84000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -84000 & 0 & 84000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$k_2 = \begin{matrix} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 21505.8375 & 32262.2509 & -21505.8375 & -32262.2509 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 32262.2509 & 48393.3764 & -32262.2509 & -48393.3764 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -21505.8375 & -32262.2509 & 21505.8375 & 32262.2509 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -32262.2509 & -48393.3764 & 32262.2509 & 48393.3764 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$k_3 = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 126000 & 0 & -126000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -126000 & 0 & 126000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix} \end{array}$$

$$k_4 = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 84000 & 0 & -84000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -84000 & 0 & 84000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix} \end{array}$$

$$k_5 = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 84000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -84000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -84000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 84000 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix} \end{array}$$

$$k_6 = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 39597.9798 & -39597.9798 & 0 & 0 & 0 & 0 & -39597.9798 & 39597.9798 & 0 & 0 \\ -39597.9798 & 39597.9798 & 0 & 0 & 0 & 0 & 39597.9798 & -39597.9798 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -39597.9798 & 39597.9798 & 0 & 0 & 0 & 0 & 39597.9798 & -39597.9798 & 0 & 0 \\ 39597.9798 & -39597.9798 & 0 & 0 & 0 & 0 & -39597.9798 & 39597.9798 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix} \end{array}$$

$$k_7 = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 39597.9798 & 39597.9798 & 0 & 0 & 0 & 0 & -39597.9798 & -39597.9798 \\ 0 & 0 & 39597.9798 & 39597.9798 & 0 & 0 & 0 & 0 & -39597.9798 & -39597.9798 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -39597.9798 & -39597.9798 & 0 & 0 & 0 & 0 & 39597.9798 & 39597.9798 \\ 0 & 0 & -39597.9798 & -39597.9798 & 0 & 0 & 0 & 0 & 39597.9798 & 39597.9798 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix}$$

$$k_8 = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 112000 & 0 & 0 & 0 & -112000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -112000 & 0 & 0 & 0 & 112000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix}$$

Una vez efectuado el procedimiento de expansión en todas las k_i, estas se suman. Por consiguiente,

$$K = k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 + k_6 + k_7 + k_8$$

$$K = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{cccccccccc} 123597.9798 & -39597.9798 & -84000 & 0 & 0 & 0 & -39597.9798 & 39597.9798 & 0 & 0 \\ -39597.9798 & 123597.9798 & 0 & 0 & 0 & 0 & 39597.9798 & -39597.9798 & 0 & -84000 \\ -84000 & 0 & 249597.9798 & 39597.9798 & -126000 & 0 & 0 & 0 & -39597.9798 & -39597.9798 \\ 0 & 0 & 39597.9798 & 151597.9798 & 0 & 0 & 0 & -112000 & -39597.9798 & -39597.9798 \\ 0 & 0 & -126000 & 0 & 147505.8357 & 32262.2509 & -21505.8375 & -32262.2509 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 32262.2509 & 48393.3764 & -32262.2509 & -48393.3764 & 0 & 0 \\ -39597.9798 & 39597.9798 & 0 & 0 & -21505.8375 & -32262.2509 & 145103.8173 & -7335.7289 & -84000 & 0 \\ 39597.9798 & -39597.9798 & 0 & -112000 & -32262.2509 & -48393.3764 & -7335.7289 & 199991.3562 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -39597.9798 & -39597.9798 & 0 & 0 & -84000 & 0 & 123597.9798 & 39597.9798 \\ 0 & -84000 & -39597.9798 & -39597.9798 & 0 & 0 & 0 & 0 & 39597.9798 & 123597.9798 \end{array}\right) \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix}$$

Para no realizar el proceso de ensamble anterior, obsérvese como puede calcularse cada entrada de la matriz de rigidez de la estructura. Por ejemplo, para obtener $K_{1,1}$, es decir, la entrada de K correspondiente a la fila 1 y columna 1, se detectan todas las entradas 1,1 que son visibles en las matrices k_i sin expandir, en este caso, de

los elementos 4,5 y 6 se tiene $(k_{1,1})_4 = 84000$, $(k_{1,1})_5 = 0$ y $(k_{1,1})_6 = 39597.9798$. Luego, es obvio que las k_i sin expandir restantes almacenan valores nulos en sus respectivas entradas 1,1 al no ser visibles, así que, $(k_{1,1})_1 = (k_{1,1})_2 = (k_{1,1})_3 = (k_{1,1})_7, (k_{1,1})_8 = 0$, por lo que podemos ignorarlos. En consecuencia, $K_{1,1} = 84000 + 0 + 39597.9798 = 123597.9798$. Se debe efectuar un procedimiento análogo para las demás entradas hasta obtener K en su totalidad.

Ya que siete desplazamientos fueron identificados como desconocidos en la armadura, la matriz de rigidez de la estructura se seccionó de tal forma que en la parte izquierda quedaran siete columnas y en la porción superior se tuvieran siete filas; esta partición se efectuó con el fin de que sea compatible con las particiones de los vectores de desplazamientos y de cargas que en el próximo apartado se formularán. Entonces, K quedó dividida en cuatro submatrices que tienen la siguiente nomenclatura:

$$K = \left(\begin{array}{c|c} K_{11} & K_{12} \\ \hline K_{21} & K_{22} \end{array}\right) \qquad (1-5)$$

Vectores de desplazamientos y de cargas

Se plantea el vector total de desplazamientos externos D y se divide en dos vectores: el de desplazamientos desconocidos D_D y el de desplazamientos conocidos D_C. Como ya se había comentado en el apartado de notación, los desplazamientos codificados del 1 al 7 son desconocidos, por lo que D_D comprende desde D_1 hasta D_7, en tanto, los desplazamientos codificados del 8 al 10 corresponden a los conocidos, así que evidentemente D_C abarca D_8, D_9 y D_{10}.

Para denotar un desplazamiento en la dirección horizontal se usa Δ_H, mientras que para significar un desplazamiento vertical se emplea δ_V; en ambos símbolos aparece también como subíndice un número que indica el nodo donde ocurre el desplazamiento.
Siendo así y con base en la figura 1-1b, obsérvese como, por ejemplo, el desplazamiento codificado con 1 es el desplazamiento horizontal en el nodo ⑤, es decir, $D_1 = \Delta_{H5}$, o bien, el desplazamiento 2 es el vertical del nodo ⑤, o sea, $D_2 = \delta_{V5}$. A su vez, recordemos que los desplazamientos codificados con 8,9 y 10 son nulos debido a que los soportes ② y ① los impiden de manera respectiva, dado que a esos apoyos no se les ha impuesto un desplazamiento, en consecuencia, $D_8 = D_9 = D_{10} = 0$.

$$D = \begin{pmatrix} D_D \\ \hline D_C \end{pmatrix} \qquad (1-6)$$

$$D = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ \hline D_7 \\ D_8 \\ D_9 \\ D_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_{H5} \\ \delta_{V5} \\ \Delta_{H4} \\ \delta_{V4} \\ \Delta_{H3} \\ \delta_{V3} \\ \hline \Delta_{H2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix}$$

Se procede a plantear el vector total de cargas externas C, el cual se secciona dando origen al vector de cargas conocidas C_C y al vector de cargas desconocidas C_D. De la figura 1-1b, nótese que las cargas externas en las direcciones 5 y 6 son de $5T$ y y $6T$ actuando en las direccciones x positiva y y negativa respectivamente, por consiguiente, $C_5 = 5T$ y $C_6 = -6T$. También vease como no hay cargas externas aplicadas en las direcciones $1, 2, 3, 4$ y 7, de ahí que $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_7 = 0$. Así mismo, por inspección, se puede apreciar que en las direcciones $8, 9$ y 10 se presentan las reacciones en y del soporte ②, y en x y y del soporte ①; como se desconoce la magnitud y el sentido de ellas, estas fuerzas deben proponerse en el vector como positivas, es por eso que $C_8 = R_{2y}$, $C_9 = R_{1x}$ y $C_{10} = R_{1y}$.

$$C = \begin{pmatrix} C_C \\ \hline C_D \end{pmatrix} \qquad (1-7)$$

$$C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ \hline C_7 \\ C_8 \\ C_9 \\ C_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ -6 \\ \hline 0 \\ R_{2y} \\ R_{1x} \\ R_{1y} \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix}$$

Cálculo de los desplazamientos incógnita y las reacciones en los soportes

Luego de haber construido la matriz de rigidez de la estructura, las componentes de la carga global C que actúan sobre la armadura se vinculan con sus desplazamientos globales D por medio de la ecuación de rigidez de la estructura que es

$$C = KD \qquad (1-8)$$

Combinando las ecuaciones $1-5$, $1-6$ y $1-7$ con la ecuación $1-8$ da

$$\begin{pmatrix} C_C \\ \hline C_D \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} K_{11} & K_{12} \\ \hline K_{21} & K_{22} \end{array}\right) \begin{pmatrix} D_D \\ \hline D_C \end{pmatrix} \qquad (1-9)$$

Ahora se infiere como este sistema de ecuaciones tiene la propiedad de que puede descomponerse en dos subsistemas de ecuaciones: el primero de estos sistemas relaciona únicamente los desplazamientos incógnita con las fuerzas conocidas y los desplazamientos conocidos, y constituye un sistema compatible determinado, mientras que el segundo subsistema contiene las reacciones incógnita y una vez resuelto el primer subsistema es de resolución trivial.

Expandiendo la ecuación $1-9$ se tiene

$$C_C = K_{11}D_D + K_{12}D_C \qquad (1-10)$$

$$C_D = K_{21}D_D + K_{22}D_C \qquad (1-11)$$

Atendemos al subsistema 1. Puesto que para esta armadura el vector de desplazamientos conocidos es un vector nulo dado que los soportes no se desplazan, $D_C = 0$. De ese modo, la ecuación $1-10$ se reduce notablemente a

$$C_C = K_{11}D_D \qquad (1-12)$$

Despejando D_D de la ecuación $1-12$, se obtienen evidentemente los desplazamientos incógnita directamente.

$$D_D = (K_{11})^{-1}C_C \qquad (1-13)$$

De inmediato nos ocupamos del subsistema 2. La ecuación $1-11$ también se simplifica notoriamente por el hecho de que D_C es nulo. Por lo tanto, las reacciones en los soportes se infieren con la siguiente expresión:

$$C_D = K_{21}D_D \qquad (1-14)$$

Al plantear la ecuación $1-8$ (o la ecuación $1-9$) para esta armadura resulta

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ -6 \\ 0 \\ \hline R_{2y} \\ R_{1x} \\ R_{1y} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cccccccc|ccc} 123597.9798 & -39597.9798 & -84000 & 0 & 0 & 0 & -39597.9798 & 39597.9798 & 0 & 0 \\ -39597.9798 & 123597.9798 & 0 & 0 & 0 & 0 & 39597.9798 & -39597.9798 & 0 & -84000 \\ -84000 & 0 & 249597.9798 & 39597.9798 & -126000 & 0 & 0 & 0 & -39597.9798 & -39597.9798 \\ 0 & 0 & 39597.9798 & 151597.9798 & 0 & 0 & 0 & -112000 & -39597.9798 & -39597.9798 \\ 0 & 0 & -126000 & 0 & 147505.8357 & 32262.2509 & -21505.8375 & -32262.2509 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 32262.2509 & 48393.3764 & -32262.2509 & -48393.3764 & 0 & 0 \\ -39597.9798 & 39597.9798 & 0 & 0 & -21505.8375 & -32262.2509 & 145103.8173 & -7335.7289 & -84000 & 0 \\ \hline 39597.9798 & -39597.9798 & 0 & -112000 & -32262.2509 & -48393.3764 & -7335.7289 & 199991.3562 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -39597.9798 & -39597.9798 & 0 & 0 & -84000 & 0 & 123597.9798 & 39597.9798 \\ 0 & -84000 & -39597.9798 & -39597.9798 & 0 & 0 & 0 & 0 & 39597.9798 & 123597.9798 \end{array}\right) \begin{pmatrix} \Delta_{H5} \\ \delta_{V5} \\ \Delta_{H4} \\ \delta_{V4} \\ \Delta_{H3} \\ \delta_{V3} \\ \Delta_{H2} \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se extrae el primer subsistema y se resuelve. Puede verse que la ecuación resultante es como la ecuación $1-12$ y el despeje de la misma tiene la forma de la ecuación $1-13$.

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\5\\-6\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}123597.9798 & -39597.9798 & -84000 & 0 & 0 & 0 & -39597.9798\\ -39597.9798 & 123597.9798 & 0 & 0 & 0 & 0 & 39597.9798\\ -84000 & 0 & 249597.9798 & 39597.9798 & -126000 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 39597.9798 & 151597.9798 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -126000 & 0 & 147505.8357 & 32262.2509 & -21505.8375\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 32262.2509 & 48393.3764 & -32262.2509\\ -39597.9798 & 39597.9798 & 0 & 0 & -21505.8375 & -32262.2509 & 145103.8173\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta_{H5}\\ \delta_{V5}\\ \Delta_{H4}\\ \delta_{V4}\\ \Delta_{H3}\\ \delta_{V3}\\ \Delta_{H2}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\Delta_{H5}\\ \delta_{V5}\\ \Delta_{H4}\\ \delta_{V4}\\ \Delta_{H3}\\ \delta_{V3}\\ \Delta_{H2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}123597.9798 & -39597.9798 & -84000 & 0 & 0 & 0 & -39597.9798\\ -39597.9798 & 123597.9798 & 0 & 0 & 0 & 0 & 39597.9798\\ -84000 & 0 & 249597.9798 & 39597.9798 & -126000 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 39597.9798 & 151597.9798 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -126000 & 0 & 147505.8357 & 32262.2509 & -21505.8375\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 32262.2509 & 48393.3764 & -32262.2509\\ -39597.9798 & 39597.9798 & 0 & 0 & -21505.8375 & -32262.2509 & 145103.8173\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\5\\-6\\0\end{pmatrix}$$

Al llevar a cabo el producto matricial señalado, dan los siguientes resultados para los desplazamientos horizontales y verticales en los nodos considerados:

$$\begin{pmatrix}\Delta_{H5}\\ \delta_{V5}\\ \Delta_{H4}\\ \delta_{V4}\\ \Delta_{H3}\\ \delta_{V3}\\ \Delta_{H2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.000135574\,m\\ 4.4452*10^{-5}\,m\\ 0.000180026\,m\\ -4.7024*10^{-5}\,m\\ 0.000251459\,m\\ -0.000293739\,m\\ -3.1742*10^{-6}\,m\end{pmatrix}$$

Note como el nodo ⑤ se desplaza horizontalmente hacia la derecha $0.000135574\,m$ y verticalmente hacia arriba $4.4452*10^{-5}\,m$, o percátese de la ocurrencia de un movimiento hacia la derecha y hacia abajo del nodo ④ de $0.000180026\,m$ y $4.7024*10^{-5}\,m$. También, vea como el nodo ③ tiene componentes horizontal y vertical de desplazamiento de $0.000251459\,m$ hacia la derecha y de $0.000293739\,m$ hacia abajo. Por su parte, el nodo ② se desplaza $3.1742*10^{-6}\,m$ hacia la izquierda.

Se escribe el segundo subsistema y se le da solución. Visualice como la ecuación originada que posee el aspecto de la ecuación $1-14$ se simplifica sencillamente al realizar la multiplicación de matrices correspondiente y con ello se llega a los valores de las fuerzas reactivas en los soportes ① y ②.

$$\begin{pmatrix}R_{2y}\\ R_{1x}\\ R_{2y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}39597.9798 & -39597.9798 & 0 & -112000 & -32262.2509 & -48393.3764 & -7335.7289\\ 0 & 0 & -39597.9798 & -39597.9798 & 0 & 0 & -84000\\ 0 & -84000 & -39597.9798 & -39597.9798 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.000135574\\ 4.4452*10^{-5}\\ 0.000180026\\ -4.7024*10^{-5}\\ 0.000251459\\ -0.000293739\\ -3.1742*10^{-6}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15T\\ -5T\\ -9T\end{pmatrix}$$

Los signos negativos de R_{1X} y R_{1Y} indican que estas reacciones actúan en las direcciones x negativa y y negativa respectivamente. Por consiguiente,

$$R_{2y} = 15T\uparrow \qquad R_{1x} = 5T\leftarrow \qquad R_{1y} = 9T\downarrow$$

Cálculo de las fuerzas en los elementos

Para determinar la fuerza de tensión q de un elemento i, se utiliza la ecuación que se muestra a continuación:

$$q_i = \frac{AE}{L}(-\lambda_x \quad -\lambda_y \quad \lambda_x \quad \lambda_y)\begin{pmatrix} D_{Nx} \\ D_{Ny} \\ D_{Fx} \\ D_{Fy} \end{pmatrix} \qquad (1-15)$$

donde

$A =$ área de la sección transversal del elemento.

$E =$ módulo de elasticidad del elemento.

$L =$ longitud del elemento.

$\lambda_x,\ \lambda_y =$ cosenos directores.

$D_{Nx},\ D_{Ny} =$ desplazamientos horizontal y vertical del nodo N del elemento en turno.

$D_{Fx},\ D_{Fy} =$ desplazamientos horizontal y vertical del nodo F del elemento en turno.

Finalmente se aplica la expresión $1-15$ en cada elemento. Si se obtiene un resultado negativo, entonces el elemento está en compresión.

Elemento 1:

$$AE = 252000\,T,\ L = 3m,\ \lambda_x = 1,\ \lambda_y = 0,\ \begin{pmatrix} D_{Nx} \\ D_{Ny} \\ D_{Fx} \\ D_{Fy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_9 \\ D_{10} \\ D_7 \\ D_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta_{H2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$q_1 = 84000(-1 \quad 0 \quad 1 \quad 0)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3.1742 * 10^{-6} \\ 0 \end{pmatrix} = -0.266633T\ (Compresión)$$

Elemento 2:

$$AE = 252000\,T,\ L = \sqrt{13}m,\ \lambda_x = 0.5547,\ \lambda_y = 0.8321,\ \begin{pmatrix} D_{Nx} \\ D_{Ny} \\ D_{Fx} \\ D_{Fy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_7 \\ D_8 \\ D_5 \\ D_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_{H2} \\ 0 \\ \Delta_{H3} \\ \delta_{V3} \end{pmatrix}$$

$$q_2 = 69892.2247(-0.5547 \quad -0.8321 \quad 0.5547 \quad 0.8321)\begin{pmatrix} -3.1742 * 10^{-6} \\ 0 \\ 0.000251459 \\ -0.000293739 \end{pmatrix}$$

$$= -7.21114T\ (Compresión)$$

Elemento 3:

$$AE = 252000\,T,\ L = 2m,\ \lambda_x = 1,\ \lambda_y = 0,\ \begin{pmatrix} D_{Nx} \\ D_{Ny} \\ D_{Fx} \\ D_{Fy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_{H4} \\ \delta_{V4} \\ \Delta_{H3} \\ \delta_{V3} \end{pmatrix}$$

$$q_3 = 126000(-1 \quad 0 \quad 1 \quad 0)\begin{pmatrix} 0.000180026 \\ -4.7024 * 10^{-5} \\ 0.000251459 \\ -0.000293739 \end{pmatrix} = 9.00056T\ (Tensión)$$

Elemento 4:

$$AE = 252000\,T,\ L = 3m,\ \lambda_x = 1,\ \lambda_y = 0,\ \begin{pmatrix} D_{Nx} \\ D_{Ny} \\ D_{Fx} \\ D_{Fy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_{H5} \\ \delta_{V5} \\ \Delta_{H4} \\ \delta_{V4} \end{pmatrix}$$

$$q_4 = 84000(-1 \quad 0 \quad 1 \quad 0)\begin{pmatrix} 0.000135574 \\ 4.4452 * 10^{-5} \\ 0.000180026 \\ -4.7024 * 10^{-5} \end{pmatrix} = 3.73397T\ (Tensión)$$

Elemento 5:

$$AE = 252000\,T,\ L = 3m,\ \lambda_x = 0,\ \lambda_y = 1,\ \begin{pmatrix} D_{Nx} \\ D_{Ny} \\ D_{Fx} \\ D_{Fy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_9 \\ D_{10} \\ D_1 \\ D_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta_{H5} \\ \delta_{V5} \end{pmatrix}$$

$$q_5 = 84000(0 \quad -1 \quad 0 \quad 1)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.000135574 \\ 4.4452 * 10^{-5} \end{pmatrix} = 3.73397T\ (Tensión)$$

Elemento 6:

$$AE = 336000\,T,\ L = 3\sqrt{2}m,\ \lambda_x = 0.7071,\ \lambda_y = -0.7071,\ \begin{pmatrix} D_{Nx} \\ D_{Ny} \\ D_{Fx} \\ D_{Fy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_7 \\ D_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_{H5} \\ \delta_{V5} \\ \Delta_{H2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$q_6 = 79195.9595(-0.7071 \quad 0.7071 \quad 0.7071 \quad -0.7071)\begin{pmatrix} 0.000135574 \\ 4.4452 * 10^{-5} \\ -3.1742 * 10^{-6} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= -5.28054T\ (Compresión)$$

Elemento 7:

$$AE = 336000\,T,\ L = 3\sqrt{2}m,\ \lambda_x = 0.7071,\ \lambda_y = 0.7071,\ \begin{pmatrix} D_{Nx} \\ D_{Ny} \\ D_{Fx} \\ D_{Fy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_9 \\ D_{10} \\ D_3 \\ D_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta_{H4} \\ \delta_{V4} \end{pmatrix}$$

$$q_7 = 79195.9595(-0.7071 \quad -0.7071 \quad 0.7071 \quad 0.7071)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.000180026 \\ -4.7024 * 10^{-5} \end{pmatrix}$$

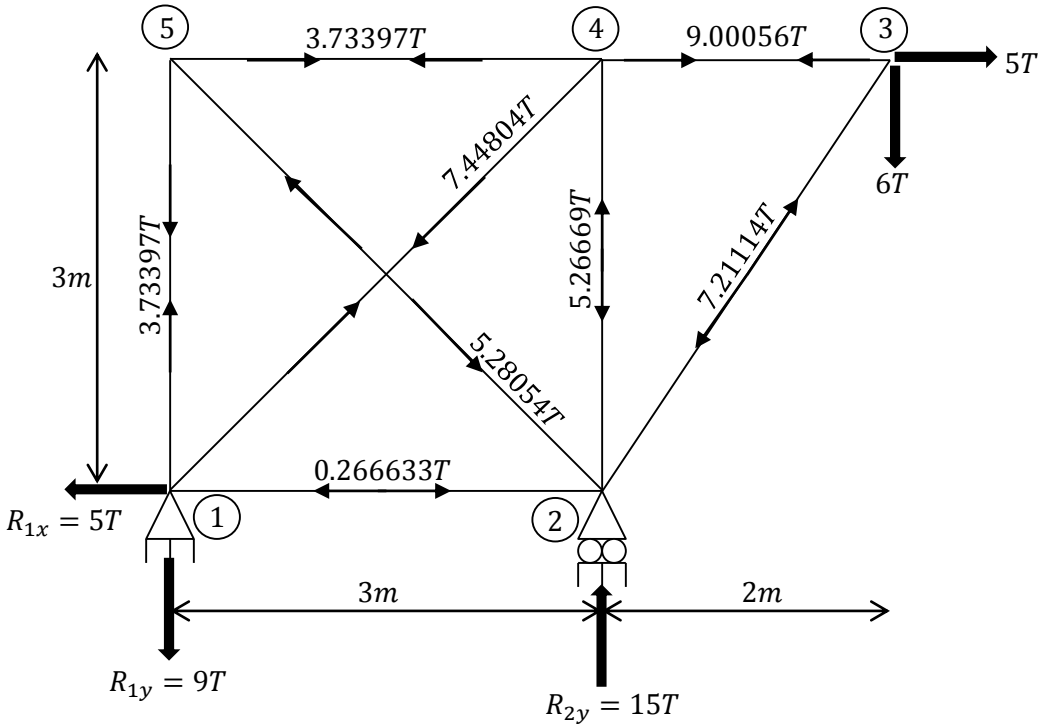
$$= 7.44804T\ (Tensión)$$

Elemento 8:

$$AE = 336000\,T,\ L = 3m,\ \lambda_x = 0,\ \lambda_y = 1,\ \begin{pmatrix} D_{Nx} \\ D_{Ny} \\ D_{Fx} \\ D_{Fy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_7 \\ D_8 \\ D_3 \\ D_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_{H2} \\ 0 \\ \Delta_{H4} \\ \delta_{V4} \end{pmatrix}$$

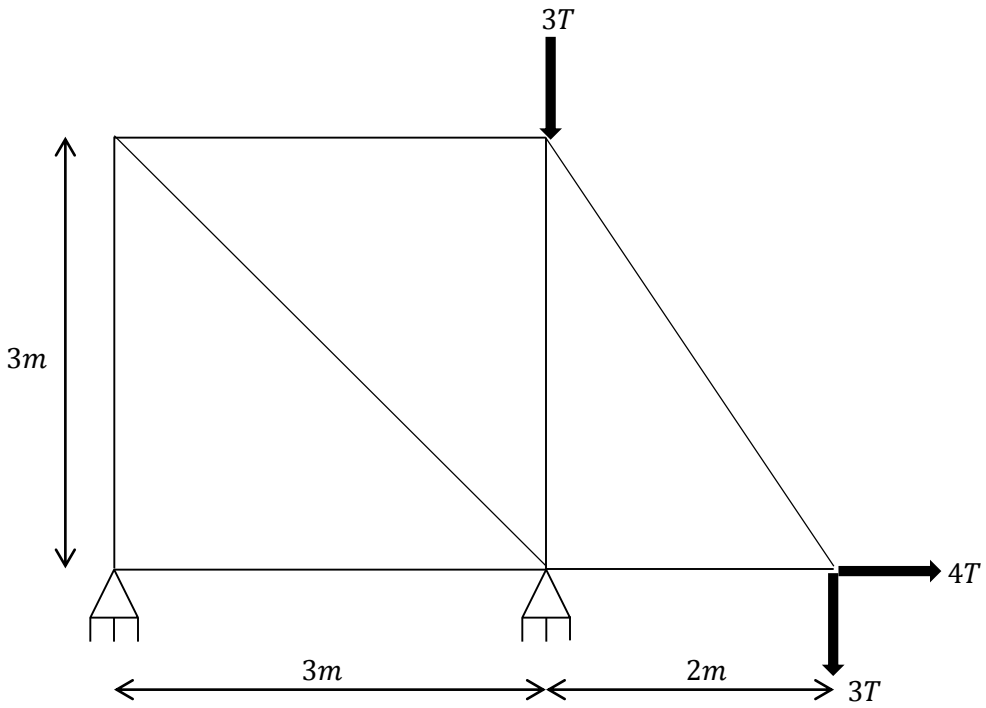
$$q_8 = 112000(0 \quad -1 \quad 0 \quad 1)\begin{pmatrix} -3.1742 * 10^{-6} \\ 0 \\ 0.000180026 \\ -4.7024 * 10^{-5} \end{pmatrix} = -5.26669T\ (Compresión)$$

En la figura 1-1k se aprecian los resultados obtenidos para las reacciones en los soportes y las fuerzas internas de la armadura. Recuerde que un elemento en compresión “empuja” a la junta y un elemento en tensión “jala” a la junta.



(k)

EJERCICIO 1.2 Determine las reacciones en los apoyos y la fuerza en el elemento horizontal que va de soporte a soporte de la armadura mostrada en la figura 1-2a. AE es constante.



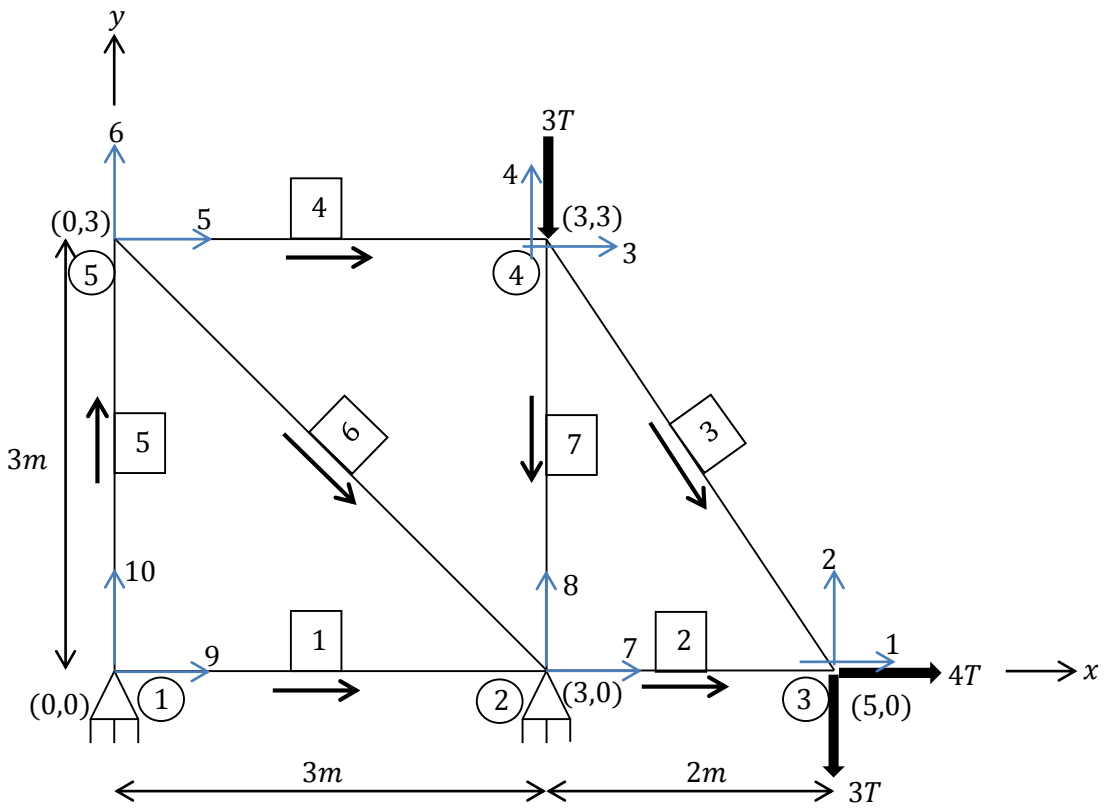
(a)

Figura 1-2

SOLUCIÓN

Notación

Los nodos ② y ① están limitados por el desplazamiento debido a la presencia de un soporte articulado en cada uno de ellos, mientras que en los nodos restantes, al no existir algún apoyo, hay dos componentes de desplazamiento desconocidas. Entonces, las componentes del desplazamiento en las juntas ③, ④ y ⑤ se codifican numéricamente en primer lugar, seguidas por las de los soportes articulados ② y ①. Recuerde que una vez que se identifica cuáles son los desplazamientos incógnita, estos se numeran arbitrariamente, y lo mismo se hace al localizar todos los desplazamientos cuyo valor se conoce. El origen del sistema de coordenadas globales se elige en ①. Las coordenadas de cada nodo son indicadas con números entre paréntesis. Se numeran con un orden indistinto los elementos y se trazan flechas a lo largo de los siete elementos para identificar los extremos cercano y lejano de cada elemento. Todo lo anterior se visualiza en la figura 1-2b.



(b)

Cosenos directores y matriz de rigidez global para cada elemento

Con base en las ecuaciones $1-2$, $1-3$ y $1-4$, se tiene

Elemento 1. El extremo cercano es ① y el extremo lejano es ②. En consecuencia,

$$L = 3m \qquad \lambda_x = \frac{3-0}{3} = 1 \qquad \lambda_y = \frac{0-0}{3} = 0$$

$$k_1 = AE \begin{matrix} \\ 9 \\ 10 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{pmatrix} 0.3333 & 0 & -0.3333 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.3333 & 0 & 0.3333 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} 9 \\ 10 \\ 7 \\ 8 \end{matrix}$$

Elemento 2. Si ② es el extremo cercano y ③ es el extremo lejano, entonces

$$L = 2m \qquad \lambda_x = \frac{5-3}{2} = 1 \qquad \lambda_y = \frac{0-0}{2} = 0$$

$$k_2 = AE\begin{pmatrix} 0.5 & 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{matrix}7\\8\\1\\2\end{matrix} \qquad \begin{matrix}7 & 8 & 1 & 2\end{matrix}$$

Elemento 3. Puesto que el extremo cercano es ④ y el extremo lejano es ③, tenemos

$$L = \sqrt{(3m)^2 + (2m)^2} = \sqrt{13}m \qquad \lambda_x = \frac{5-3}{\sqrt{13}} = 0.5547 \qquad \lambda_y = \frac{0-3}{\sqrt{13}} = -0.8321$$

$$k_3 = AE\begin{pmatrix} 0.0853 & -0.1280 & -0.0853 & 0.1280 \\ -0.1280 & 0.1920 & 0.1280 & -0.1920 \\ -0.0853 & 0.1280 & 0.0853 & -0.1280 \\ 0.1280 & -0.1920 & -0.1280 & 0.1920 \end{pmatrix}\begin{matrix}3\\4\\1\\2\end{matrix} \qquad \begin{matrix}3 & 4 & 1 & 2\end{matrix}$$

Elemento 4. Los extremos cercano y lejano son ⑤ y ④ respectivamente, así que

$$L = 3m \qquad \lambda_x = \frac{3-0}{3} = 1 \qquad \lambda_y = \frac{3-3}{3} = 0$$

$$k_4 = AE\begin{pmatrix} 0.3333 & 0 & -0.3333 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.3333 & 0 & 0.3333 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{matrix}5\\6\\3\\4\end{matrix} \qquad \begin{matrix}5 & 6 & 3 & 4\end{matrix}$$

Elemento 5. Como ① y ⑤ corresponden a los extremos cercano y lejano, resulta

$$L = 3m \qquad \lambda_x = \frac{0-0}{3} = 0 \qquad \lambda_y = \frac{3-0}{3} = 1$$

$$k_5 = AE\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3333 & 0 & -0.3333 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.3333 & 0 & 0.3333 \end{pmatrix}\begin{matrix}9\\10\\5\\6\end{matrix} \qquad \begin{matrix}9 & 10 & 5 & 6\end{matrix}$$

Elemento 6. Debido a que el extremo cercano es ⑤ y el extremo lejano es ②, se obtiene

$$L = \sqrt{(3m)^2 + (3m)^2} = \sqrt{18}m \qquad \lambda_x = \frac{3-0}{\sqrt{18}} = 0.7071 \qquad \lambda_y = \frac{0-3}{\sqrt{18}} = -0.7071$$

$$k_6 = AE\begin{array}{c} \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} 5 & 6 & 7 & 8 \end{array}\\ \begin{pmatrix} 0.1178 & -0.1178 & -0.1178 & 0.1178 \\ -0.1178 & 0.1178 & 0.1178 & -0.1178 \\ -0.1178 & 0.1178 & 0.1178 & -0.1178 \\ 0.1178 & -0.1178 & -0.1178 & 0.1178 \end{pmatrix}\end{array}$$

Elemento 7. Aquí ④ es el extremo cercano y ② es el extremo lejano, de modo que

$$L = 3m \qquad \lambda_x = \frac{3-3}{3} = 0 \qquad \lambda_y = \frac{0-3}{3} = -1$$

$$k_7 = AE\begin{array}{c} \\ 3 \\ 4 \\ 7 \\ 8 \end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} 3 & 4 & 7 & 8 \end{array}\\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3333 & 0 & -0.3333 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.3333 & 0 & 0.3333 \end{pmatrix}\end{array}$$

Matriz de rigidez de la estructura

Se ensamblan las siete matrices previas en la matriz K de $10\,X\,10$ al sumar algebraicamente sus elementos respectivos. Se calcula una entrada de K para ejemplificar el procedimiento. Por ejemplo, para obtener $K_{1,1}$ inicialmente se detectan todas las entradas 1,1 que son visibles en las matrices k_i; de los elementos 2 y 3 se tiene $(k_{1,1})_2 = 0.5$ y $(k_{1,1})_3 = 0.0853$. Luego, es lógico que las k_i restantes almacenan valores nulos en sus correspondientes entradas 1,1, por lo que $(k_{1,1})_1 = (k_{1,1})_4 = (k_{1,1})_5 = (k_{1,1})_6 = (k_{1,1})_7 = 0$. Por consiguiente, $K_{1,1} = 0.5 + 0.0853 = 0.5853$. Al llevar a cabo un algoritmo análogo para las demás entradas resulta

$$K = AE\begin{array}{c}\begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{array}\\ \left(\begin{array}{cccccc:cccc} 0.5853 & -0.1280 & -0.0853 & 0.1280 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1280 & 0.1920 & 0.1280 & -0.1920 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0853 & 0.1280 & 0.4187 & -0.1280 & -0.3333 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1280 & -0.1920 & -0.1280 & 0.5254 & 0 & 0 & 0 & -0.3333 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.3333 & 0 & 0.4512 & -0.1178 & -0.1178 & 0.1178 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1178 & 0.4512 & 0.1178 & -0.1178 & 0 & -0.3333 \\ \hdashline -0.5000 & 0 & 0 & 0 & -0.1178 & 0.1178 & 0.9512 & -0.1178 & -0.3333 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.3333 & 0.1178 & -0.1178 & -0.1178 & 0.4512 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.33333 & 0 & 0.3333 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.3333 & 0 & 0 & 0 & 0.3333 \end{array}\right)\end{array}\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{array}$$

Vectores de desplazamientos y de cargas

Se formula el vector total de desplazamientos D. Los soportes ② y ① restringen los desplazamientos horizontal y vertical en esos nodos, de ahí que los desplazamientos 7,8,9 y 10 valgan cero.

$$D = \begin{pmatrix} D_D \\ \hline D_C \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ \hline D_7 \\ D_8 \\ D_9 \\ D_{10} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} \Delta_{H3} & 1 \\ \delta_{V3} & 2 \\ \Delta_{H4} & 3 \\ \delta_{V4} & 4 \\ \Delta_{H5} & 5 \\ \delta_{V5} & 6 \\ \hline 0 & 7 \\ 0 & 8 \\ 0 & 9 \\ 0 & 10 \end{array}\right)$$

Se formula el vector total de cargas C. En las direcciones 1,2 y 4 actúan cargas de $4T$, $3T$ y $3T$ (estas últimas dos lo hacen en la dirección y negativa), y en las direcciones 7,8,9 y 10 se presentan las reacciones R_{2x}, R_{2y}, R_{1x} y R_{1y} de los apoyos.

$$C = \begin{pmatrix} C_C \\ \hline C_D \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ \hline C_7 \\ C_8 \\ C_9 \\ C_{10} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} 4 & 1 \\ -3 & 2 \\ 0 & 3 \\ -3 & 4 \\ 0 & 5 \\ 0 & 6 \\ \hline R_{2x} & 7 \\ R_{2y} & 8 \\ R_{1x} & 9 \\ R_{1y} & 10 \end{array}\right)$$

Cálculo de los desplazamientos incógnita y las reacciones en los soportes

Se escribe la ecuación $1-8$, es decir, $C = KD$, para esta armadura.

$$\left(\begin{array}{c} 4 \\ -3 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ \hline R_{2x} \\ R_{2y} \\ R_{1x} \\ R_{1y} \end{array}\right) = AE \left(\begin{array}{cccccc|cccc} 0.5853 & -0.1280 & -0.0853 & 0.1280 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1280 & 0.1920 & 0.1280 & -0.1920 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0853 & 0.1280 & 0.4187 & -0.1280 & -0.3333 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1280 & -0.1920 & -0.1280 & 0.5254 & 0 & 0 & 0 & -0.3333 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.3333 & 0 & 0.4512 & -0.1178 & -0.1178 & 0.1178 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1178 & 0.4512 & 0.1178 & -0.1178 & 0 & -0.3333 \\ \hline -0.5000 & 0 & 0 & 0 & -0.1178 & 0.1178 & 0.9512 & -0.1178 & -0.3333 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.3333 & 0.1178 & -0.1178 & -0.1178 & 0.4512 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.33333 & 0 & 0.3333 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.3333 & 0 & 0 & 0 & 0.3333 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} \Delta_{H3} \\ \delta_{V3} \\ \Delta_{H4} \\ \delta_{V4} \\ \Delta_{H5} \\ \delta_{V5} \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right)$$

Al plantear la solución para los desplazamientos desconocidos, ecuación $1-12$, tenemos

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = AE \begin{pmatrix} 0.5853 & -0.1280 & -0.0853 & 0.1280 & 0 & 0 \\ -0.1280 & 0.1920 & 0.1280 & -0.1920 & 0 & 0 \\ -0.0853 & 0.1280 & 0.4187 & -0.1280 & -0.3333 & 0 \\ 0.1280 & -0.1920 & -0.1280 & 0.5254 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.3333 & 0 & 0.4512 & -0.1178 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1178 & 0.4512 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_{H3} \\ \delta_{V3} \\ \Delta_{H4} \\ \delta_{V4} \\ \Delta_{H5} \\ \delta_{V5} \end{pmatrix}$$

Al despejar los desplazamientos y simplificar, resulta

$$\begin{pmatrix} \Delta_{H3} \\ \delta_{V3} \\ \Delta_{H4} \\ \delta_{V4} \\ \Delta_{H5} \\ \delta_{V5} \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{AE}\right) \begin{pmatrix} 4.0002 \\ -50.2670 \\ 28.9690 \\ -18 \\ 22.9693 \\ 5.9996 \end{pmatrix}$$

Con base en la ecuación $1-14$ y empleando los resultados obtenidos previamente, las reacciones en los soportes ① y ② son

$$\begin{pmatrix} R_{2x} \\ R_{2y} \\ R_{1x} \\ R_{1y} \end{pmatrix} = AE \begin{pmatrix} -0.5000 & 0 & 0 & 0 & -0.1178 & 0.1178 \\ 0 & 0 & 0 & -0.3333 & 0.1178 & -0.1178 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.3333 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{AE}\right) \begin{pmatrix} 4.0002 \\ -50.2670 \\ 28.9690 \\ -18 \\ 22.9693 \\ 5.9996 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4T \\ 8T \\ 0 \\ -2T \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

$$R_{2x} = 4T \leftarrow \qquad R_{2y} = 8T \uparrow \qquad R_{1x} = 0 \qquad R_{1y} = 2T \downarrow$$

Cálculo de la fuerza en el elemento 1

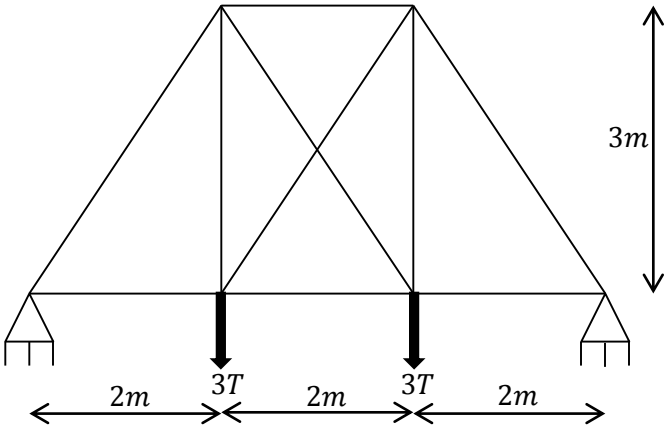
La fuerza mencionada se encuentra a partir de la ecuación $1-15$. Aquí

$$L = 3m,\ \lambda_x = 1,\ \lambda_y = 0,\ \begin{pmatrix} D_{Nx} \\ D_{Ny} \\ D_{Fx} \\ D_{Fy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_9 \\ D_{10} \\ D_7 \\ D_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$q_1 = \frac{AE}{3}(-1 \quad -0 \quad 1 \quad 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

EJERCICIO 1.3 Para la armadura que se muestra en la figura 1-3a, calcule las reacciones en los soportes y las fuerzas en los elementos por el método de la rigidez directa. Efectúe el equilibrio en los nodos necesarios para asegurar que los resultados son correctos. La sección transversal para todas los elementos es rectangular con una base de $30cm$ y una altura de $40cm$. El módulo de elasticidad para cada elemento es el de las maderas duras, o sea, $2.1 * 10^6 \frac{T}{m^2}$.

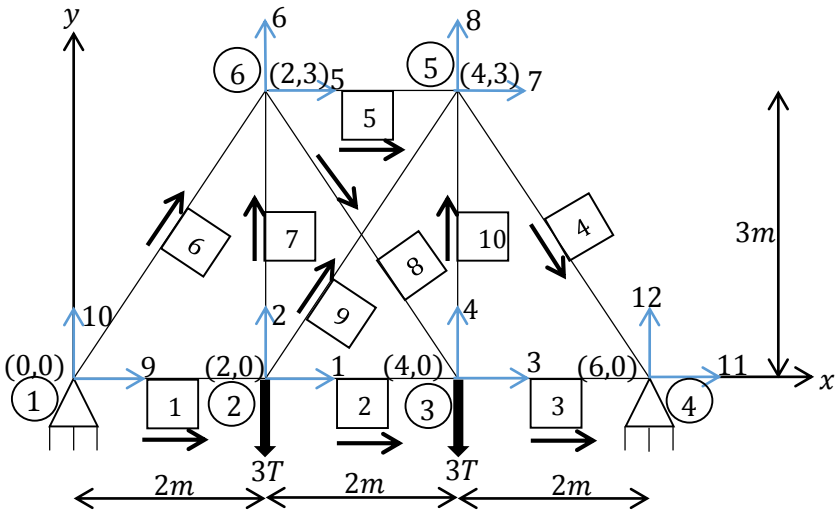


(a)

Figura 1-3

SOLUCIÓN

Notación



(b)

Se numeran los nodos y los elementos y se establece el origen de los ejes x, y en ①, figura 1-3b. Las coordenadas de los nodos son especificadas. Se utilizan flechas para referenciar a los extremos cercano y lejano de cada elemento. Los números de código del 1 al 8 se emplean para indicar los grados de libertad no restringidos, mientras que los números de código restantes hacen alusión a los grados de libertad restringidos.

Cosenos directores y matriz de rigidez global para cada elemento

Se aplicarán las expresiones algebraicas $1-2$, $1-3$ y $1-4$ a cada elemento con la finalidad de determinar individualmente sus cosenos directores y su matriz de rigidez.

Con los datos del problema, se calcula el área de la sección transversal de los elementos.

$$A = (0.3m)(0.4m) = 0.12m^2$$

Siendo así, para todos los elementos tenemos que

$$AE = (0.12m^2)\left(2.1 * 10^6\, {}^{T}/_{m^2}\right) = 252000\, T$$

Elemento 1. Como ① y ② corresponden a los extremos cercano y lejano, resulta

$$L = 2m \qquad \lambda_x = \frac{2-0}{2} = 1 \qquad \lambda_y = \frac{0-0}{2} = 0$$

$$k_1 = \begin{array}{c} \begin{matrix} 9 & 10 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 126000 & 0 & -126000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -126000 & 0 & 126000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 9 \\ 10 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \end{array}$$

Elemento 2. Aquí ② es el extremo cercano y ③ es el extremo lejano, de modo que

$$L = 2m \qquad \lambda_x = \frac{4-2}{2} = 1 \qquad \lambda_y = \frac{0-0}{2} = 0$$

$$k_2 = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 126000 & 0 & -126000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -126000 & 0 & 126000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \end{array}$$

Elemento 3. Debido a que el extremo cercano es ③ y el extremo lejano es ④, obtenemos

$$L = 2m \qquad \lambda_x = \frac{6-4}{2} = 1 \qquad \lambda_y = \frac{0-0}{2} = 0$$

$$k_3 = \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} 3 & 4 & 11 & 12 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 126000 & 0 & -126000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -126000 & 0 & 126000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 11 \\ 12 \end{matrix}$$

Elemento 4. Si ⑤ es el extremo cercano y ④ es el extremo lejano, entonces

$$L = \sqrt{(3m)^2 + (2m)^2} = \sqrt{13}m \qquad \lambda_x = \frac{6-4}{\sqrt{13}} = 0.5547 \qquad \lambda_y = \frac{0-3}{\sqrt{13}} = -0.8321$$

$$k_4 = \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} 7 & 8 & 11 & 12 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 21505.8375 & -32262.2509 & -21505.8375 & 32262.2509 \\ -32262.2509 & 48393.3764 & 32262.2509 & -48393.3764 \\ -21505.8375 & 32262.2509 & 21505.8375 & -32262.2509 \\ 32262.2509 & -48393.3764 & -32262.2509 & 48393.3764 \end{pmatrix} \begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 11 \\ 12 \end{matrix}$$

Elemento 5. Dado que el extremo cercano es ⑥ y el extremo lejano es ⑤, se infiere

$$L = 2m \qquad \lambda_x = \frac{4-2}{2} = 1 \qquad \lambda_y = \frac{3-3}{2} = 0$$

$$k_5 = \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 126000 & 0 & -126000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -126000 & 0 & 126000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix}$$

Elemento 6. El extremo cercano es ① y el extremo lejano es ⑥. En consecuencia,

$$L = \sqrt{13}m \qquad \lambda_x = \frac{2-0}{\sqrt{13}} = 0.5547 \qquad \lambda_y = \frac{3-0}{\sqrt{13}} = 0.8321$$

$$k_6 = \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} 9 & 10 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 21505.8375 & 32262.2509 & -21505.8375 & -32262.2509 \\ 32262.2509 & 48393.3764 & -32262.2509 & -48393.3764 \\ -21505.8375 & -32262.2509 & 21505.8375 & 32262.2509 \\ -32262.2509 & -48393.3764 & 32262.2509 & 48393.3764 \end{pmatrix} \begin{matrix} 9 \\ 10 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

Elemento 7. Los extremos cercano y lejano son ② y ⑥ respectivamente, así que

$$L = 3m \qquad \lambda_x = \frac{2-2}{3} = 0 \qquad \lambda_y = \frac{3-0}{3} = 1$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 5 & 6 \end{matrix}$$

$$k_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 84000 & 0 & -84000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -84000 & 0 & 84000 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

Elemento 8. Puesto que el extremo cercano es ⑥ y el extremo lejano es ③, se obtiene

$$L = \sqrt{13}m \qquad \lambda_x = \frac{4-2}{\sqrt{13}} = 0.5547 \qquad \lambda_y = \frac{0-3}{\sqrt{13}} = -0.8321$$

$$\begin{matrix} 5 & 6 & 3 & 4 \end{matrix}$$

$$k_8 = \begin{pmatrix} 21505.8375 & -32262.2509 & -21505.8375 & 32262.2509 \\ -32262.2509 & 48393.3764 & 32262.2509 & -48393.3764 \\ -21505.8375 & 32262.2509 & 21505.8375 & -32262.2509 \\ 32262.2509 & -48393.3764 & -32262.2509 & 48393.3764 \end{pmatrix} \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

Elemento 9. En este caso los extremos cercano y lejano son ② y ⑤, por lo que

$$L = \sqrt{13}m \qquad \lambda_x = \frac{4-2}{\sqrt{13}} = 0.5547 \qquad \lambda_y = \frac{3-0}{\sqrt{13}} = 0.8321$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 7 & 8 \end{matrix}$$

$$k_9 = \begin{pmatrix} 21505.8375 & 32262.2509 & -21505.8375 & -32262.2509 \\ 32262.2509 & 48393.3764 & -32262.2509 & -48393.3764 \\ -21505.8375 & -32262.2509 & 21505.8375 & 32262.2509 \\ -32262.2509 & -48393.3764 & 32262.2509 & 48393.3764 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 7 \\ 8 \end{matrix}$$

Elemento 10. Se tiene que ③ y ⑤ son los extremos cercano y lejano. Por consiguiente,

$$L = 3m \qquad \lambda_x = \frac{4-4}{3} = 0 \qquad \lambda_y = \frac{3-0}{3} = 1$$

$$\begin{matrix} 3 & 4 & 7 & 8 \end{matrix}$$

$$k_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 84000 & 0 & -84000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -84000 & 0 & 84000 \end{pmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 7 \\ 8 \end{matrix}$$

Matriz de rigidez de la estructura

En esta ocasión K tiene un orden de $12\ X\ 12$ porque se designaron doce grados de libertad para la armadura. Para obtenerla, se hace el ensamble de las diez matrices anteriores y se secciona. A continuación se escriben por separado las submatrices de la matriz de rigidez.

Submatriz K_{11}:

$$K_{11} = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 273505.8375 & 32262.2509 & -126000 & 0 & 0 & 0 & -21505.8375 & -32262.2509 \\ 32262.2509 & 132393.3764 & 0 & 0 & 0 & -84000 & -32262.2509 & -48393.3764 \\ -126000 & 0 & 273505.8375 & -32262.2509 & -21505.8375 & 32262.2509 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -32262.2509 & 132393.3764 & 32262.2509 & -48393.3764 & 0 & -84000 \\ 0 & 0 & -21505.8375 & 32262.2509 & 169011.675 & 0 & -126000 & 0 \\ 0 & -84000 & 32262.2509 & -48393.3764 & 0 & 180786.7258 & 0 & 0 \\ -21505.8375 & -32262.2509 & 0 & 0 & -126000 & 0 & 169011.675 & 0 \\ -32262.2509 & -48393.3764 & 0 & -84000 & 0 & 0 & 0 & 180786.7528 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} \end{array}$$

Submatriz K_{12}:

$$K_{12} = \begin{array}{c} \begin{matrix} 9 & 10 & 11 & 12 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} -126000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -126000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -21505.8375 & -32262.2509 & 0 & 0 \\ -32262.2509 & -48393.3764 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -21505.8375 & 32262.2509 \\ 0 & 0 & 32262.2509 & -48393.3764 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} \end{array}$$

Submatriz K_{21}:

$$K_{21} = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} -126000 & 0 & 0 & 0 & -21505.8375 & -32262.2509 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -32262.2509 & -48393.3764 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -126000 & 0 & 0 & 0 & -21505.8375 & 32262.2509 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 32262.2509 & -48393.3764 \end{pmatrix} \begin{matrix} 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix} \end{array}$$

Submatriz K_{22}:

$$K_{22} = \begin{array}{c} \begin{matrix} 9 & 10 & 11 & 12 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 147505.8375 & 32262.2509 & 0 & 0 \\ 32262.2509 & 48393.3764 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 21505.8375 & -32262.2509 \\ 0 & 0 & -32262.2509 & 48393.3764 \end{pmatrix} \begin{matrix} 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix} \end{array}$$

Vectores de desplazamientos y de cargas

Los apoyos articulados ① y ④ tienen desplazamientos horizontal y vertical nulos, lo cual es totalmente opuesto a la situación de los nodos ②, ③, ⑤ y ⑥ en los que ambas componentes de desplazamiento se desconocen por ahora. En consecuencia,

$$D = \begin{pmatrix} D_D \\ \hline D_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ \hline D_8 \\ D_9 \\ D_{10} \\ D_{11} \\ D_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_{H2} \\ \delta_{V2} \\ \Delta_{H3} \\ \delta_{V3} \\ \Delta_{H6} \\ \delta_{V6} \\ \Delta_{H5} \\ \delta_{V5} \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix}$$

A simple vista, el vector de cargas es

$$C = \begin{pmatrix} C_C \\ \hline C_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \\ \hline C_8 \\ C_9 \\ C_{10} \\ C_{11} \\ C_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ R_{1x} \\ R_{1y} \\ R_{4x} \\ R_{4y} \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix}$$

Cálculo de los desplazamientos incógnita y las reacciones en los soportes

Se plantea $C = KD$ (ecuación $1-8$) para este ejercicio y después se extraen los dos subsistemas y se resuelven.

A partir del primer subsistema, con base en la ecuación $1-12$, se tiene

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 273505.8375 & 32262.2509 & -126000 & 0 & 0 & 0 & -21505.8375 & -32262.2509 \\ 32262.2509 & 132393.3764 & 0 & 0 & 0 & -84000 & -32262.2509 & -48393.3764 \\ -126000 & 0 & 273505.8375 & -32262.2509 & -21505.8375 & 32262.2509 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -32262.2509 & 132393.3764 & 32262.2509 & -48393.3764 & 0 & -84000 \\ 0 & 0 & -21505.8375 & 32262.2509 & 169011.675 & 0 & -126000 & 0 \\ 0 & -84000 & 32262.2509 & -48393.3764 & 0 & 180786.7258 & 0 & 0 \\ -21505.8375 & -32262.2509 & 0 & 0 & -126000 & 0 & 169011.675 & 0 \\ -32262.2509 & -48393.3764 & 0 & -84000 & 0 & 0 & 0 & 180786.7528 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_{H2} \\ \delta_{V2} \\ \Delta_{H3} \\ \delta_{V3} \\ \Delta_{H6} \\ \delta_{V6} \\ \Delta_{H5} \\ \delta_{V5} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, los desplazamientos desconocidos equivalen a

$$\begin{pmatrix}\Delta_{H2}\\ \delta_{V2}\\ \Delta_{H3}\\ \delta_{V3}\\ \Delta_{H6}\\ \delta_{V6}\\ \Delta_{H5}\\ \delta_{V5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1.5112*10^{-6}m\\ -9.4309*10^{-5}m\\ -1.5112*10^{-6}m\\ -9.4309*10^{-5}m\\ 1.0203*10^{-5}m\\ -6.8794*10^{-5}m\\ -1.0203*10^{-5}m\\ -6.8794*10^{-5}m\end{pmatrix}$$

Del subsistema 2, de acuerdo a la ecuación $1-14$, obtenemos

$$\begin{pmatrix}R_{1x}\\ R_{1y}\\ R_{4x}\\ R_{4y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-126000 & 0 & 0 & 0 & -21505.8375 & -32262.2509 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -32262.2509 & -48393.3764 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -126000 & 0 & 0 & 0 & -21505.8375 & 32262.2509\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 32262.2509 & -48393.3764\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1.5112*10^{-6}\\ -9.4309*10^{-5}\\ -1.5112*10^{-6}\\ -9.4309*10^{-5}\\ 1.0203*10^{-5}\\ -6.8794*10^{-5}\\ -1.0203*10^{-5}\\ -6.8794*10^{-5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1.8096T\\ 3T\\ -1.8096T\\ 3T\end{pmatrix}$$

Por consiguiente, la magnitud, dirección y sentido de las reacciones en los soportes son

$R_{1x}=1.8096T\rightarrow$ $\quad R_{1y}=3T\uparrow$ $\quad R_{4x}=1.8096T\leftarrow$ $\quad R_{4y}=3T\uparrow$

Cálculo de las fuerzas en los elementos

Se calcula la fuerza de cada elemento a través de la ecuación $1-15$.

Elemento 1:

$$AE=252000\,T\,,\ L=2m,\ \lambda_x=1,\ \lambda_y=0,\ \begin{pmatrix}D_{Nx}\\ D_{Ny}\\ D_{Fx}\\ D_{Fy}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}D_9\\ D_{10}\\ D_1\\ D_2\end{pmatrix}$$

$$q_1=126000(-1\quad 0\quad 1\quad 0)\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1.5112*10^{-6}\\ -9.4309*10^{-5}\end{pmatrix}=0.1904T\ (Tensión)$$

Elemento 2:

$$AE = 252000\,T\ ,\ L = 2m,\ \lambda_x = 1,\ \lambda_y = 0,\ \begin{pmatrix} D_{Nx} \\ D_{Ny} \\ D_{Fx} \\ D_{Fy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{pmatrix}$$

$$q_2 = 126000(-1 \quad 0 \quad 1 \quad 0)\begin{pmatrix} 1.5112 * 10^{-6} \\ -9.4309 * 10^{-5} \\ -1.5112 * 10^{-6} \\ -9.4309 * 10^{-5} \end{pmatrix} = -0.3808T\ (Compresión)$$

Elemento 3:

$$AE = 252000\,T\ ,\ L = 2m,\ \lambda_x = 1,\ \lambda_y = 0,\ \begin{pmatrix} D_{Nx} \\ D_{Ny} \\ D_{Fx} \\ D_{Fy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_3 \\ D_4 \\ D_{11} \\ D_{12} \end{pmatrix}$$

$$q_3 = 126000(-1 \quad 0 \quad 1 \quad 0)\begin{pmatrix} -1.5112 * 10^{-6} \\ -9.4309 * 10^{-5} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.1904T\ (Tensión)$$

Elemento 4:

$$AE = 252000\,T\ ,\ L = \sqrt{13}m,\ \lambda_x = 0.5547,\ \lambda_y = -0.8321,\ \begin{pmatrix} D_{Nx} \\ D_{Ny} \\ D_{Fx} \\ D_{Fy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_7 \\ D_8 \\ D_{11} \\ D_{12} \end{pmatrix}$$

$$q_4 = 69892.2247(-0.5547 \quad 0.8321 \quad 0.5547 \quad -0.8321)\begin{pmatrix} -1.0203 * 10^{-5} \\ -6.8794 * 10^{-5} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= -3.6053T\ (Compresión)$$

Elemento 5:

$$AE = 252000\,T\ ,\ L = 2m,\ \lambda_x = 1,\ \lambda_y = 0,\ \begin{pmatrix} D_{Nx} \\ D_{Ny} \\ D_{Fx} \\ D_{Fy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \end{pmatrix}$$

$$q_5 = 126000(-1 \quad 0 \quad 1 \quad 0)\begin{pmatrix} 1.0203 * 10^{-5} \\ -6.8794 * 10^{-5} \\ -1.0203 * 10^{-5} \\ -6.8794 * 10^{-5} \end{pmatrix} = -2.5712T\ (Compresión)$$

Elemento 6:

$$AE = 252000\ T\ ,\ L = \sqrt{13}m,\ \lambda_x = 0.5547,\ \lambda_y = 0.8321,\ \begin{pmatrix} D_{Nx} \\ D_{Ny} \\ D_{Fx} \\ D_{Fy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_9 \\ D_{10} \\ D_5 \\ D_6 \end{pmatrix}$$

$$q_6 = 69892.2247(-0.5547 \quad -0.8321 \quad 0.5547 \quad 0.8321)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.0203 * 10^{-5} \\ -6.8794 * 10^{-5} \end{pmatrix}$$

$$= -3.6053T\ (Compresión)$$

Elemento 7:

$$AE = 252000\ T\ ,\ L = 3m,\ \lambda_x = 0,\ \lambda_y = 1,\ \begin{pmatrix} D_{Nx} \\ D_{Ny} \\ D_{Fx} \\ D_{Fy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_5 \\ D_6 \end{pmatrix}$$

$$q_7 = 84000(0 \quad -1 \quad 0 \quad 1)\begin{pmatrix} 1.5112 * 10^{-6} \\ -9.4309 * 10^{-5} \\ 1.0203 * 10^{-5} \\ -6.8794 * 10^{-5} \end{pmatrix} = 2.1433T\ (Tensión)$$

Elemento 8:

$$AE = 252000\ T\ ,\ L = \sqrt{13}m,\ \lambda_x = 0.5547,\ \lambda_y = -0.8321,\ \begin{pmatrix} D_{Nx} \\ D_{Ny} \\ D_{Fx} \\ D_{Fy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_5 \\ D_6 \\ D_3 \\ D_4 \end{pmatrix}$$

$$q_8 = 69892.2247(-0.5547 \quad 0.8321 \quad 0.5547 \quad -0.8321)\begin{pmatrix} 1.0203 * 10^{-5} \\ -6.8794 * 10^{-5} \\ -1.5112 * 10^{-6} \\ -9.4309 * 10^{-5} \end{pmatrix}$$

$$= 1.0297T\ (Tensión)$$

Elemento 9:

$$AE = 252000\,T\ ,\ L = \sqrt{13}m,\ \lambda_x = 0.5547,\ \lambda_y = 0.8321,\ \begin{pmatrix} D_{Nx} \\ D_{Ny} \\ D_{Fx} \\ D_{Fy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_7 \\ D_8 \end{pmatrix}$$

$$q_9 = 69892.2247(-0.5547 \quad -0.8321 \quad 0.5547 \quad 0.8321)\begin{pmatrix} 1.5112 * 10^{-6} \\ -9.4309 * 10^{-5} \\ -1.0203 * 10^{-5} \\ -6.8794 * 10^{-5} \end{pmatrix}$$

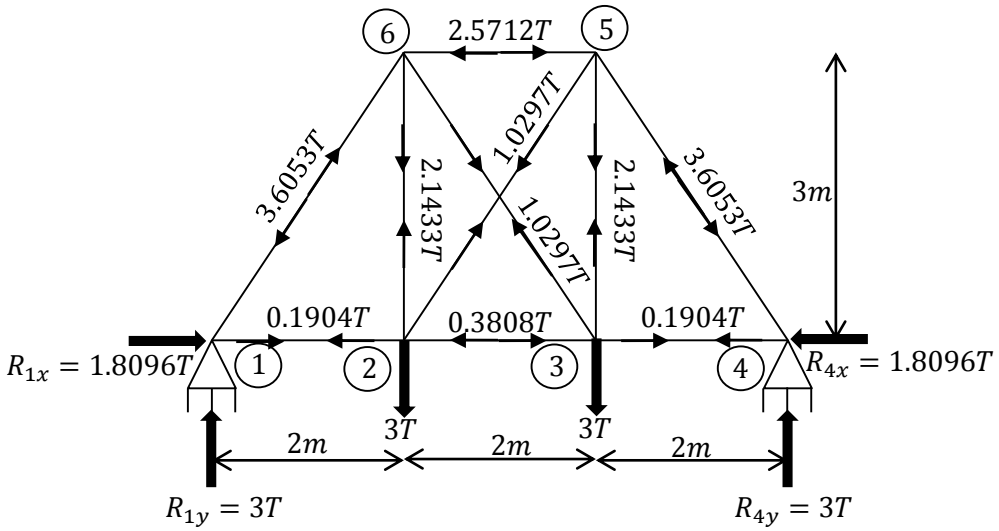
$$= 1.0297T\ (Tensión)$$

Elemento 10:

$$AE = 252000\,T\ ,\ L = 3m,\ \lambda_x = 0,\ \lambda_y = 1,\ \begin{pmatrix} D_{Nx} \\ D_{Ny} \\ D_{Fx} \\ D_{Fy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_3 \\ D_4 \\ D_7 \\ D_8 \end{pmatrix}$$

$$q_{10} = 84000(0 \quad -1 \quad 0 \quad 1)\begin{pmatrix} -1.5112 * 10^{-6} \\ -9.4309 * 10^{-5} \\ -1.0203 * 10^{-5} \\ -6.8794 * 10^{-5} \end{pmatrix} = 2.1433T\ (Tensión)$$

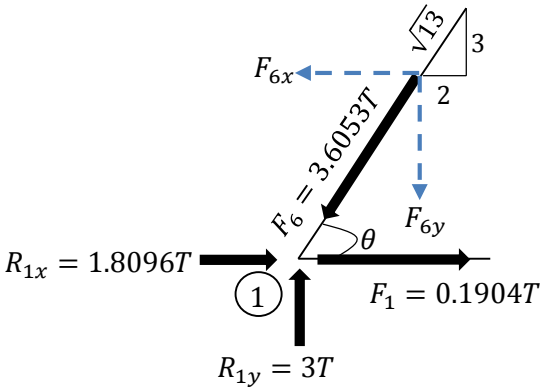
El resumen de los resultados es presentado en la figura 1-3c.



(c)

Comprobación del equilibrio en los nodos

Nodo ①, figura 1-3d.



(d)

$$+\uparrow \sum Fy = 3T - F_{6y}$$

$$= 3T - \left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)(3.6053T) = 0 \quad ok$$

$$+\rightarrow \sum Fx = 1.8096T + 0.1904T - F_{6x}$$

$$= 2T - \left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right)(3.6053T) = 0 \quad ok$$

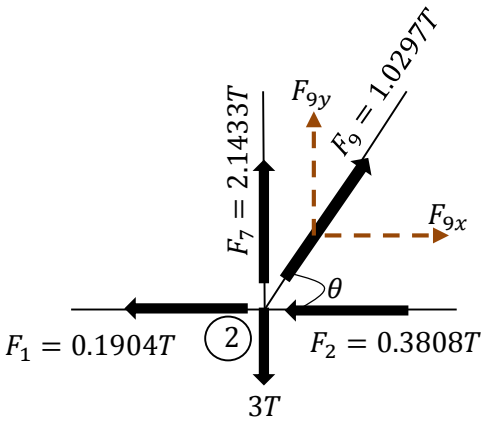
Nodo ②, figura 1-3e.

$$+\uparrow \sum Fy = -3T + 2.1433T + F_{9y}$$

$$= -0.8568T + \left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)(1.0297T) \quad = 0 \quad ok$$

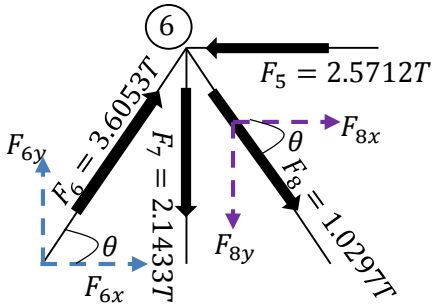
$$+\rightarrow \sum Fx = -0.1904T - 0.3808T + F_{9x}$$

$$= -0.5712T + \left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right)(1.0297T) = 0 \quad ok$$



(e)

NODO ⑥, figura 1-3f.



(f)

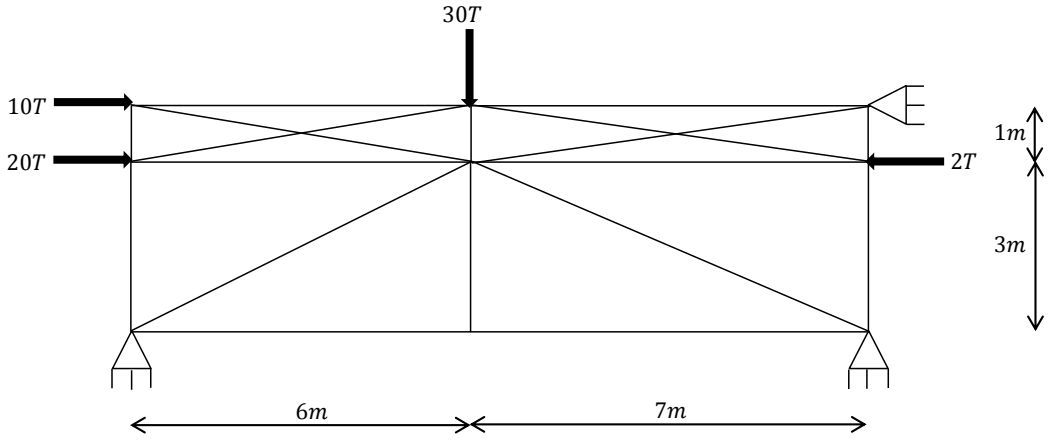
$$+\uparrow \sum Fy = F_{6y} - F_{8y} - 2.1433T = \left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)(3.6053T)$$

$$-\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)(1.0297T) - 2.1433T = 3T - 0.8568T - 2.1433T = 0 \quad ok$$

$$+\rightarrow \sum Fx = F_{6x} + F_{8x} - 2.5712T = \left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right)(3.6053T)$$

$$+\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right)(1.0297T) - 2.5712T = 2T + 0.5712T - 2.5712T = 0 \quad ok$$

EJERCICIO 1.4 Calcule las reacciones en los soportes y la fuerza en tres elementos cualesquiera de la armadura que se visualiza en la figura 1-4a. AE es constante.



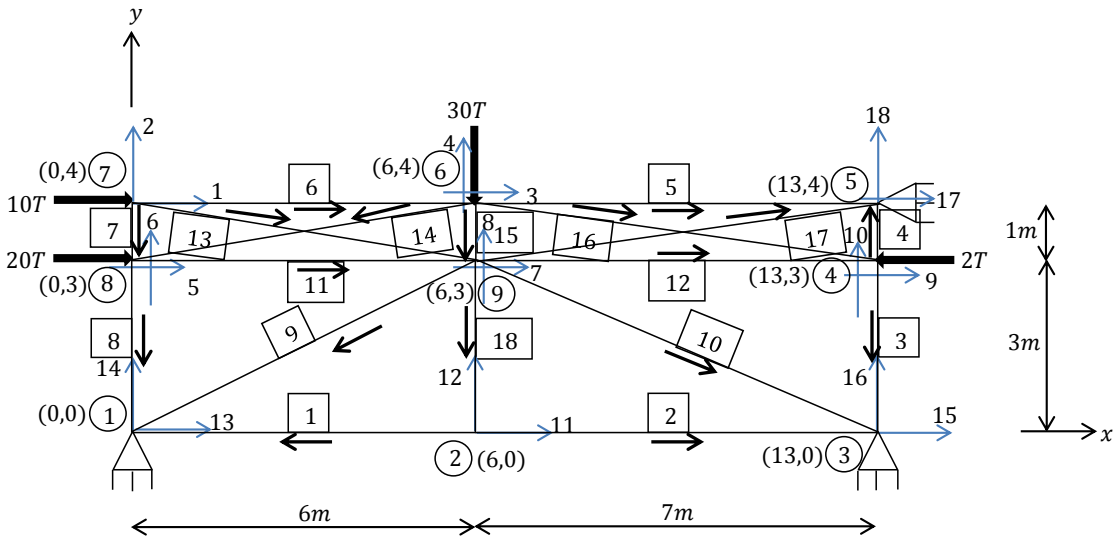
(a)

Figura 1-4

SOLUCIÓN

Notación

Tal y como se observa en la figura 1-4b, se ha establecido en la junta ① el origen de las coordenadas globales. En cada elemento hay una flecha cuya cabeza indica el extremo lejano del mismo. Se utilizan números de código de tal modo que los más bajos designen los grados de libertad no restringidos o desplazamientos incógnita.



(b)

Cosenos directores y matriz de rigidez global para cada elemento

De la ecuaciones $1-2$, $1-3$ y $1-4$ tenemos

Elemento 1. El extremo cercano es ② y el extremo lejano es ①. En consecuencia,

$$L = 6m \qquad \lambda_x = \frac{0-6}{6} = -1 \qquad \lambda_y = \frac{0-0}{6} = 0$$

$$k_1 = AE \begin{matrix} \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} 11 & 12 & 13 & 14 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0.1667 & 0 & -0.1667 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1667 & 0 & 0.1667 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Elemento 2. Los extremos cercano y lejano son ② y ③ respectivamente, así que

$$L = 7m \qquad \lambda_x = \frac{13-6}{7} = 1 \qquad \lambda_y = \frac{0-0}{7} = 0$$

$$k_2 = AE \begin{matrix} \\ 11 \\ 12 \\ 15 \\ 16 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} 11 & 12 & 15 & 16 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0.1429 & 0 & -0.1429 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1429 & 0 & 0.1429 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Elemento 3. Debido a que el extremo cercano es ④ y el extremo lejano es ③, se obtiene

$$L = 3m \qquad \lambda_x = \frac{13-13}{3} = 0 \qquad \lambda_y = \frac{0-3}{3} = -1$$

$$k_3 = AE \begin{matrix} \\ 9 \\ 10 \\ 15 \\ 16 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} 9 & 10 & 15 & 16 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3333 & 0 & -0.3333 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.3333 & 0 & 0.3333 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Elemento 4. Aquí ④ es el extremo cercano y ⑤ es el extremo lejano, de modo que

$$L = 1m \qquad \lambda_x = \frac{13-13}{1} = 0 \qquad \lambda_y = \frac{4-3}{1} = 1$$

$$k_4 = AE\begin{matrix}\\ \\ \\ \\ \end{matrix}\begin{matrix} 9 & 10 & 17 & 18 \end{matrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} 9 \\ 10 \\ 17 \\ 18 \end{matrix}$$

Elemento 5. Como ⑥ y ⑤ corresponden a los extremos cercano y lejano, resulta

$$L = 7m \qquad \lambda_x = \frac{13-6}{7} = 1 \qquad \lambda_y = \frac{4-4}{7} = 0$$

$$k_5 = AE\begin{matrix}\\ \\ \\ \\ \end{matrix}\begin{matrix} 3 & 4 & 17 & 18 \end{matrix}\begin{pmatrix} 0.1429 & 0 & -0.1429 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1429 & 0 & 0.1429 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 17 \\ 18 \end{matrix}$$

Elemento 6. Si ⑦ es el extremo cercano y ⑥ es el extremo lejano, entonces

$$L = 6m \qquad \lambda_x = \frac{6-0}{6} = 1 \qquad \lambda_y = \frac{4-4}{6} = 0$$

$$k_6 = AE\begin{matrix}\\ \\ \\ \\ \end{matrix}\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix}\begin{pmatrix} 0.1667 & 0 & -0.1667 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1667 & 0 & 0.1667 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

Elemento 7. Aquí ⑦ es el extremo cercano y ⑧ es el extremo lejano, de modo que

$$L = 1m \qquad \lambda_x = \frac{0-0}{1} = 0 \qquad \lambda_y = \frac{3-4}{1} = -1$$

$$k_7 = AE\begin{matrix}\\ \\ \\ \\ \end{matrix}\begin{matrix} 1 & 2 & 5 & 6 \end{matrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

Elemento 8. El extremo cercano es ⑧ y el extremo lejano es ①. En consecuencia,

$$L = 3m \qquad \lambda_x = \frac{0-0}{3} = 0 \qquad \lambda_y = \frac{0-3}{3} = -1$$

$$k_8 = AE\begin{matrix}\\ \\ \\ \\ \end{matrix}\begin{matrix}5 & 6 & 13 & 14\end{matrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0.3333 & 0 & -0.3333\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -0.3333 & 0 & 0.3333\end{pmatrix}\begin{matrix}5\\6\\13\\14\end{matrix}$$

Elemento 9. Dado que el extremo cercano es ⑨ y el extremo lejano es ①, se infiere

$$L = \sqrt{(6m)^2 + (3m)^2} = \sqrt{45}m \qquad \lambda_x = \frac{0-6}{\sqrt{45}} = -0.8944 \qquad \lambda_y = \frac{0-3}{\sqrt{45}} = -0.4472$$

$$k_9 = AE\begin{matrix}\\ \\ \\ \\ \end{matrix}\begin{matrix}7 & 8 & 13 & 14\end{matrix}\begin{pmatrix}0.1193 & 0.0596 & -0.1193 & -0.0596\\ 0.0596 & 0.0298 & -0.0596 & -0.0298\\ -0.1193 & -0.0596 & 0.1193 & 0.0596\\ -0.0596 & -0.0298 & 0.0596 & 0.0298\end{pmatrix}\begin{matrix}7\\8\\13\\14\end{matrix}$$

Elemento 10. Como ⑨ y ③ corresponden a los extremos cercano y lejano, resulta

$$L = \sqrt{(7m)^2 + (3m)^2} = \sqrt{49}m \qquad \lambda_x = \frac{13-6}{\sqrt{49}} = 0.9191 \qquad \lambda_y = \frac{0-3}{\sqrt{49}} = -0.3939$$

$$k_{10} = AE\begin{matrix}\\ \\ \\ \\ \end{matrix}\begin{matrix}7 & 8 & 15 & 16\end{matrix}\begin{pmatrix}0.1109 & -0.0475 & -0.1109 & 0.0475\\ -0.0475 & 0.0204 & 0.0475 & -0.0204\\ -0.1109 & 0.0475 & 0.1109 & -0.0475\\ 0.0475 & -0.0204 & -0.0475 & 0.0204\end{pmatrix}\begin{matrix}7\\8\\15\\16\end{matrix}$$

Elemento 11. Los extremos cercano y lejano son ⑧ y ⑨ respectivamente, así que

$$L = 6m \qquad \lambda_x = \frac{6-0}{6} = 1 \qquad \lambda_y = \frac{3-3}{6} = 0$$

$$k_{11} = AE\begin{matrix}\\ \\ \\ \\ \end{matrix}\begin{matrix}5 & 6 & 7 & 8\end{matrix}\begin{pmatrix}0.1667 & 0 & -0.1667 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -0.1667 & 0 & 0.1667 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{matrix}5\\6\\7\\8\end{matrix}$$

Elemento 12. El extremo cercano es ⑨ y el extremo lejano es ④. En consecuencia,

$$L = 7m \qquad \lambda_x = \frac{13-6}{7} = 1 \qquad \lambda_y = \frac{3-3}{7} = 0$$

$$k_{12} = AE \begin{array}{c} \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 7 & 8 & 9 & 10 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.1429 & 0 & -0.1429 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1429 & 0 & 0.1429 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Elemento 13. Como ⑦ y ⑨ corresponden a los extremos cercano y lejano, resulta

$$L = \sqrt{(6m)^2 + (1m)^2} = \sqrt{37}m \qquad \lambda_x = \frac{6-0}{\sqrt{37}} = 0.9864 \qquad \lambda_y = \frac{3-4}{\sqrt{37}} = -0.1644$$

$$k_{13} = AE \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 7 \\ 8 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 7 & 8 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.1600 & -0.0267 & -0.1600 & 0.0267 \\ -0.0267 & 0.0044 & 0.0267 & -0.0044 \\ -0.1600 & 0.0267 & 0.1600 & -0.0267 \\ 0.0267 & -0.0044 & -0.0267 & 0.0044 \end{pmatrix} \end{array}$$

Elemento 14. Aquí ⑥ es el extremo cercano y ⑧ es el extremo lejano, de modo que

$$L = \sqrt{37}m \qquad \lambda_x = \frac{0-6}{\sqrt{37}} = -0.9864 \qquad \lambda_y = \frac{3-4}{\sqrt{37}} = -0.1644$$

$$k_{14} = AE \begin{array}{c} \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.1600 & 0.0267 & -0.1600 & -0.0267 \\ 0.0267 & 0.0044 & -0.0267 & -0.0044 \\ -0.1600 & -0.0267 & 0.1600 & 0.0267 \\ -0.0267 & -0.0044 & 0.0267 & 0.0044 \end{pmatrix} \end{array}$$

Elemento 15. Si ⑥ es el extremo cercano y ⑨ es el extremo lejano, entonces

$$L = 1m \qquad \lambda_x = \frac{6-6}{1} = 0 \qquad \lambda_y = \frac{3-4}{1} = -1$$

$$k_{15} = AE \begin{array}{c} \\ 3 \\ 4 \\ 7 \\ 8 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 3 & 4 & 7 & 8 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Elemento 16. Ya que el extremo cercano es ⑥ y el extremo lejano es ④, se obtiene

$$L = \sqrt{(7m)^2 + (1m)^2} = \sqrt{50}m \qquad \lambda_x = \frac{13-6}{\sqrt{50}} = 0.9899 \qquad \lambda_y = \frac{3-4}{\sqrt{50}} = -0.1414$$

$$k_{16} = AE \begin{array}{c} \begin{matrix} 3 & 4 & 9 & 10 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0.1386 & -0.0198 & -0.1386 & 0.0198 \\ -0.0198 & 0.0028 & 0.0198 & -0.0028 \\ -0.1386 & 0.0198 & 0.1386 & -0.0198 \\ 0.0198 & -0.0028 & -0.0198 & 0.0028 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 9 \\ 10 \end{matrix}$$

Elemento 17. Los extremos cercano y lejano son ⑨ y ⑤ respectivamente, así que

$$L = \sqrt{50}m \qquad \lambda_x = \frac{13-6}{\sqrt{50}} = 0.9899 \qquad \lambda_y = \frac{4-3}{\sqrt{50}} = 0.1414$$

$$k_{17} = AE \begin{array}{c} \begin{matrix} 7 & 8 & 17 & 18 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0.1386 & 0.0198 & -0.1386 & -0.0198 \\ 0.0198 & 0.0028 & -0.0198 & -0.0028 \\ -0.1386 & -0.0198 & 0.1386 & 0.0198 \\ -0.0198 & -0.0028 & 0.0198 & 0.0028 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 17 \\ 18 \end{matrix}$$

Elemento 18. El extremo cercano es ⑨ y el extremo lejano es ②. En consecuencia,

$$L = 3m \qquad \lambda_x = \frac{6-6}{3} = 0 \qquad \lambda_y = \frac{0-3}{3} = -1$$

$$k_{18} = AE \begin{array}{c} \begin{matrix} 7 & 8 & 11 & 12 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3333 & 0 & -0.3333 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.3333 & 0 & 0.3333 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 11 \\ 12 \end{matrix}$$

Matriz de rigidez de la estructura

Al ensamblar las dieciocho matrices anteriores, se obtiene la matriz de rigidez con un orden de $18\ X\ 18$. Se proporcionan las submatrices de K.

Submatriz K_{11}:

$$K_{11} = AE \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0.3266 & -0.0267 & -0.1667 & 0 & 0 & 0 & -0.16 & 0.0267 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0267 & 1.0044 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0.0267 & -0.0044 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1667 & 0 & 0.6081 & 0.0069 & -0.16 & -0.0267 & 0 & 0 & -0.1386 & 0.0198 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0069 & 1.0073 & -0.0267 & -0.0044 & 0 & -1 & 0.0198 & -0.0028 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.16 & -0.0267 & 0.3266 & 0.0267 & -0.1667 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -0.0267 & -0.0044 & 0.0267 & 1.3378 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.16 & 0.0267 & 0 & 0 & -0.1667 & 0 & 0.8382 & 0.0052 & -0.1429 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0267 & -0.0044 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0.0052 & 1.3908 & 0 & 0 & 0 & -0.3333 \\ 0 & 0 & -0.1386 & 0.0198 & 0 & 0 & -0.1429 & 0 & 0.2814 & -0.0198 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0198 & -0.0028 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0198 & 1.3362 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3095 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.3333 & 0 & 0 & 0 & 0.3333 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix}$$

Submatriz K_{12}:

$$K_{12} = AE \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1429 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.3333 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1192 & -0.0596 & -0.1109 & 0.0475 & -0.1386 & -0.0198 \\ -0.0596 & -0.0298 & 0.0475 & -0.0204 & -0.0198 & -0.0028 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.3333 & 0 & -1 \\ -0.1667 & 0 & -0.1429 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix}$$

Submatriz K_{21}:

$$K_{21} = AE \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1192 & -0.0596 & 0 & 0 & -0.1667 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.3333 & -0.0596 & -0.0298 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1109 & 0.0475 & 0 & 0 & -0.1429 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0475 & -0.0204 & 0 & -0.3333 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.1429 & 0 & 0 & 0 & -0.1386 & -0.0198 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0198 & -0.0028 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 13 \\ 14 \\ 15 \\ 16 \\ 17 \\ 18 \end{matrix}$$

Submatriz K_{22}:

$$K_{22} = AE \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0.2859 & 0.0596 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0596 & 0.3631 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2538 & -0.0475 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0475 & 0.3537 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2814 & 0.0198 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0198 & 1.0028 \end{pmatrix} \begin{matrix} 13 \\ 14 \\ 15 \\ 16 \\ 17 \\ 18 \end{matrix}$$

Vectores de desplazamientos y de cargas

Aunque un apoyo articulado esté situado en un plano inclinado, no habrá componente alguna de desplazamiento; en consecuencia, en el soporte ⑤, el cual está girado a $90°$ con respecto al eje horizontal, los desplazamientos horizontal y vertical son iguales a cero. Evidentemente los nodos ① y ③ también están limitados por el desplazamiento. Por otra parte, a través de la inspección pueden verse las cargas externas conocidas. Por lo tanto,

$$D = \begin{pmatrix} D_D \\ \hline D_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \\ D_9 \\ D_{10} \\ D_{11} \\ D_{12} \\ D_{13} \\ D_{14} \\ D_{15} \\ D_{16} \\ D_{17} \\ D_{18} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_{H7} \\ \delta_{V7} \\ \Delta_{H6} \\ \delta_{V6} \\ \Delta_{H8} \\ \delta_{V8} \\ \Delta_{H9} \\ \delta_{V9} \\ \Delta_{H4} \\ \delta_{V4} \\ \Delta_{H2} \\ \delta_{V2} \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \\ 15 \\ 16 \\ 17 \\ 18 \end{matrix} \qquad C = \begin{pmatrix} C_C \\ \hline C_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \\ C_8 \\ C_9 \\ C_{10} \\ C_{11} \\ C_{12} \\ \hline C_{13} \\ C_{14} \\ C_{15} \\ C_{16} \\ C_{17} \\ C_{18} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ -30 \\ 20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline R_{1x} \\ R_{1y} \\ R_{3x} \\ R_{3y} \\ R_{5x} \\ R_{5y} \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \\ 15 \\ 16 \\ 17 \\ 18 \end{matrix}$$

Cálculo de los desplazamientos incógnita y las reacciones en los soportes

Del plantamiento $C = KD$, el subsistema 1 y su solución son

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ -30 \\ 20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = AE \begin{pmatrix} 0.3266 & -0.0267 & -0.1667 & 0 & 0 & 0 & -0.16 & 0.0267 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0267 & 1.0044 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0.0267 & -0.0044 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1667 & 0 & 0.6081 & 0.0069 & -0.16 & -0.0267 & 0 & 0 & -0.1386 & 0.0198 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0069 & 1.0073 & -0.0267 & -0.0044 & 0 & -1 & 0.0198 & -0.0028 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.16 & -0.0267 & 0.3266 & 0.0267 & -0.1667 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -0.0267 & -0.0044 & 0.0267 & 1.3378 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.16 & 0.0267 & 0 & 0 & -0.1667 & 0 & 0.8382 & 0.0052 & -0.1429 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0267 & -0.0044 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0.0052 & 1.3908 & 0 & 0 & 0 & -0.3333 \\ 0 & 0 & -0.1386 & 0.0198 & 0 & 0 & -0.1429 & 0 & 0.2814 & -0.0198 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0198 & -0.0028 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0198 & 1.3362 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3095 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.3333 & 0 & 0 & 0 & 0.3333 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_{H7} \\ \delta_{V7} \\ \Delta_{H6} \\ \delta_{V6} \\ \Delta_{H8} \\ \delta_{V8} \\ \Delta_{H9} \\ \delta_{V9} \\ \Delta_{H4} \\ \delta_{V4} \\ \Delta_{H2} \\ \delta_{V2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \Delta_{H7} \\ \delta_{V7} \\ \Delta_{H6} \\ \delta_{V6} \\ \Delta_{H8} \\ \delta_{V8} \\ \Delta_{H9} \\ \delta_{V9} \\ \Delta_{H4} \\ \delta_{V4} \\ \Delta_{H2} \\ \delta_{V2} \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{AE}\right) \begin{pmatrix} 170.1790m \\ -7.3544m \\ 111.0525m \\ -569.7954m \\ 110.4854m \\ -7.3787m \\ 79.9029m \\ -543.5496m \\ 128.1517m \\ -0.9528m \\ 0 \\ -543.5496m \end{pmatrix}$$

Al formular y resolver el segundo subsistema resulta

$$\begin{pmatrix} R_{1x} \\ R_{1y} \\ R_{3x} \\ R_{3y} \\ R_{5x} \\ R_{5y} \end{pmatrix} = AE \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1192 & -0.0596 & 0 & 0 & -0.1667 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.3333 & -0.0596 & -0.0298 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1109 & 0.0475 & 0 & 0 & -0.1429 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0475 & -0.0204 & 0 & -0.3333 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.1429 & 0 & 0 & 0 & -0.1386 & -0.0198 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0198 & -0.0028 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{AE}\right) \begin{pmatrix} 170.1790 \\ -7.3544 \\ 111.0525 \\ -569.7954 \\ 110.4854 \\ -7.3787 \\ 79.9029 \\ -543.5496 \\ 128.1517 \\ -0.9528 \\ 0 \\ -543.5496 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22.8821T \\ 13.9006T \\ -34.7052T \\ 15.1912T \\ -16.1769T \\ 0.9082T \end{pmatrix}$$

En consecuencia,

$$R_{1x} = 22.8821T \rightarrow \qquad R_{1y} = 13.9006T \uparrow \qquad R_{3x} = 34.7052T \leftarrow$$

$$R_{3y} = 15.1912T \uparrow \qquad R_{5x} = 16.1769T \leftarrow \qquad R_{5y} = 0.9082T \uparrow$$

Se comprueba el equilibrio externo de la estructura.

$$+\uparrow \sum Fy = -30 + 13.9006 + 15.1912 + 0.9082 = 0 \qquad ok$$

$$+\rightarrow \sum Fx = 10 + 20 - 2 + 22.8821 - 34.7052 - 16.1769 = 0 \qquad ok$$

$$\circlearrowleft + \sum M1 = 20(3) + 10(4) + 30(6) - 2(3) - 15.1912(13) - 16.1769(4) - 0.9082(13) \cong 0 \qquad ok$$

Cálculo de las fuerzas en los elementos 2, 9 y 17

Con base en la ecuación $1 - 15$ se tiene

Elemento 2:

$$q_2 = \left(\frac{AE}{7}\right)(-1 \quad 0 \quad 1 \quad 0)\left(\frac{1}{AE}\right)\begin{pmatrix} 0 \\ -543.5496 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

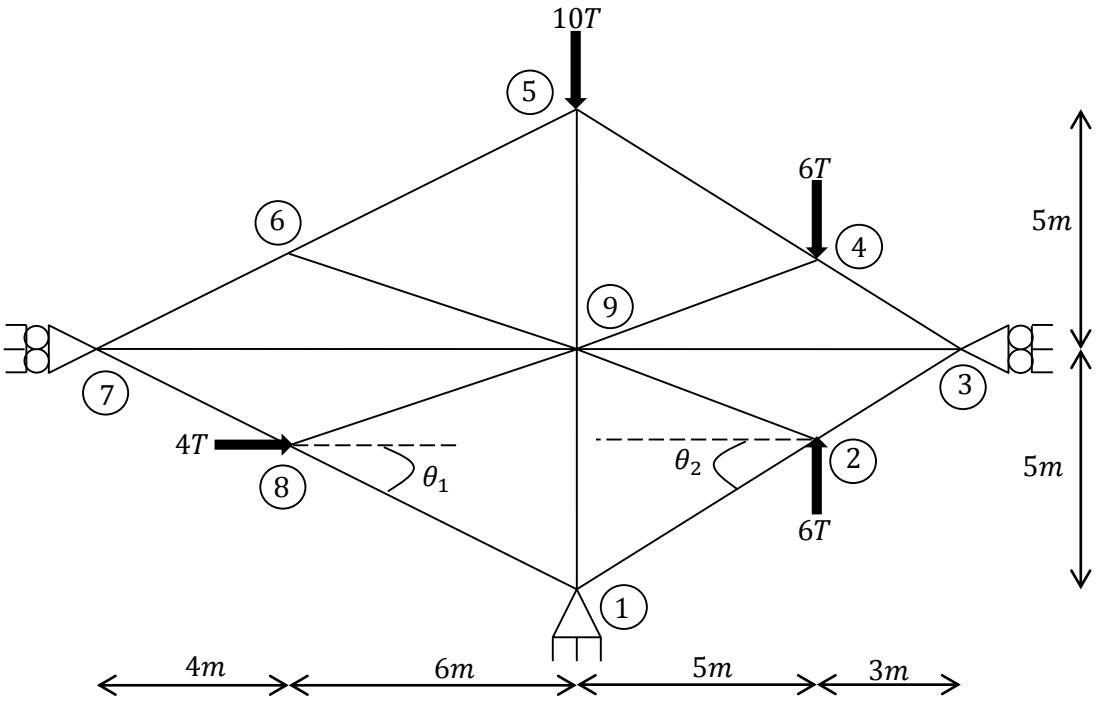
Elemento 9:

$$q_9 = \left(\frac{AE}{\sqrt{45}}\right)(0.8944 \quad 0.4472 \quad -0.8944 \quad -0.4472)\left(\frac{1}{AE}\right)\begin{pmatrix} 79.9029 \\ -543.5496 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -25.5821T \ (Compresión)$$

Elemento 17:

$$q_{17} = \left(\frac{AE}{\sqrt{50}}\right)(-0.9899 \quad -0.1414 \quad 0.9899 \quad 0.1414)\left(\frac{1}{AE}\right)\begin{pmatrix} 79.9029 \\ -543.5496 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -0.316496T \ (Compresión)$$

EJERCICIO 1.5 Use el análisis matricial de la rigidez para determinar el valor de las reacciones en los soportes de la armadura que se muestra en la figura 1-5a. También calcule la fuerza en los elementos conectados al soporte articulado ① y con base en los resultados demuestre el equilibrio de tal nodo. Use $E = 2.1 * 10^7 \frac{T}{m^2}\ (Acero)$ y $A = 0.09m^2$.



(a)

Figura 1-5

SOLUCIÓN

Notación

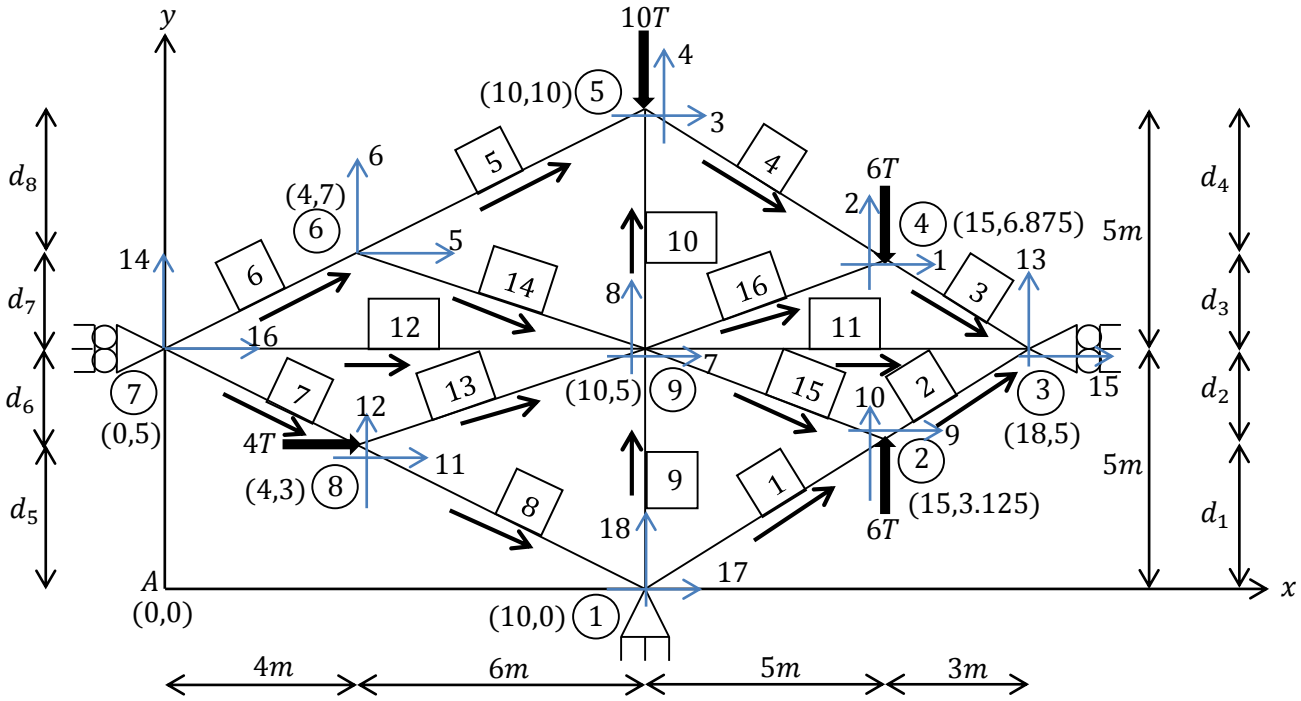
No conviene establecer el origen de las coordenadas globales en alguno de los nodos, ya que de hacerlo se tendrán coordenadas negativas en ciertas juntas; por esa razón, el origen de los ejes x, y se asocia al punto A, figura 1-5b. Como siempre, los números más bajos del código se usan para hacer referencia a los grados de libertad no restringidos.

Para los cálculos posteriores, se requiere del conocimiento de las siguientes distancias:

$$\frac{8m}{5m} = \frac{5m}{d_1} \Rightarrow d_1 = 3.125m \qquad d_2 = 5m - d_1 = 5m - 3.125m = 1.875m$$

$d_3 = d_2 = 1.875m$ $d_4 = d_1 = 3.125m$ $\frac{10m}{5m} = \frac{6m}{d_5} \Rightarrow d_5 = 3m$

$d_6 = 5m - d_5 = 5m - 3m = 2m$ $d_7 = d_6 = 2m$ $d_8 = d_5 = 3m$



(b)

Cosenos directores y matriz de rigidez global para cada elemento

Con base en las ecuaciones $1-2$, $1-3$ y $1-4$ se obtiene

Elemento 1. Aquí ① es el extremo cercano y ② es el extremo lejano, de modo que

$L = \sqrt{(5m)^2 + (3.125m)^2} = 5.896238208m$ $\lambda_x = \frac{15-10}{5.896238208} = 0.847998304$

$$\lambda_y = \frac{3.125 - 0}{5.896238208} = 0.52999894$$

$$k_1 = 10^5 \begin{matrix} \\ 17 \\ 18 \\ 9 \\ 10 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} 17 & 18 & 9 & 10 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2.3050 & 1.4406 & -2.3050 & -1.4406 \\ 1.4406 & 0.9004 & -1.4406 & -0.9004 \\ -2.3050 & -1.4406 & 2.3050 & 1.4406 \\ -1.4406 & -0.9004 & 1.4406 & 0.9004 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Elemento 2. Si ② es el extremo cercano y ③ es el extremo lejano, entonces

$$L = \sqrt{(3m)^2 + (1.875m)^2} = 3.537742925m \qquad \lambda_x = \frac{18-15}{3.537742925} = 0.847998304$$

$$\lambda_y = \frac{5-3.125}{3.537742925} = 0.52999894$$

$$k_2 = 10^5 \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} 9 & 10 & 15 & 13 \end{matrix}$$
$$\begin{pmatrix} 3.8417 & 2.4011 & -3.8417 & -2.4011 \\ 2.4011 & 1.5007 & -2.4011 & -1.5007 \\ -3.8417 & -2.4011 & 3.8417 & 2.4011 \\ -2.4011 & -1.5007 & 2.4011 & 1.5007 \end{pmatrix} \begin{matrix} 9 \\ 10 \\ 15 \\ 13 \end{matrix}$$

Elemento 3. Como ④ y ③ corresponden a los extremos cercano y lejano, resulta

$$L = 3.537742925m \qquad \lambda_x = \frac{18-15}{3.537742925} = 0.847998304$$

$$\lambda_y = \frac{5-6.875}{3.537742925} = -0.52999894$$

$$k_3 = 10^5 \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} 1 & 2 & 15 & 13 \end{matrix}$$
$$\begin{pmatrix} 3.8417 & -2.4011 & -3.8417 & 2.4011 \\ -2.4011 & 1.5007 & 2.4011 & -1.5007 \\ -3.8417 & 2.4011 & 3.8417 & -2.4011 \\ 2.4011 & -1.5007 & -2.4011 & 1.5007 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 15 \\ 13 \end{matrix}$$

Elemento 4. El extremo cercano es ⑤ y el extremo lejano es ④. En consecuencia,

$$L = 5.896238208m \qquad \lambda_x = \frac{15-10}{5.896238208} = 0.847998304$$

$$\lambda_y = \frac{6.875-10}{5.896238208} = -0.52999894$$

$$k_4 = 10^5 \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} 3 & 4 & 1 & 2 \end{matrix}$$
$$\begin{pmatrix} 2.3050 & -1.4406 & -2.3050 & 1.4406 \\ -1.4406 & 0.9004 & 1.4406 & -0.9004 \\ -2.3050 & 1.4406 & 2.3050 & -1.4406 \\ 1.4406 & -0.9004 & -1.4406 & 0.9004 \end{pmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

Elemento 5. Aquí ⑥ es el extremo cercano y ⑤ es el extremo lejano, de modo que

$$L = \sqrt{(6m)^2 + (3m)^2} = 6.708203932m \qquad \lambda_x = \frac{10-4}{6.708203932} = 0.894427191$$

$$\lambda_y = \frac{10-7}{6.708203932} = 0.447213596$$

$$k_5 = 10^5 \begin{matrix} \\ 5 \\ 6 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} 5 & 6 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2.2540 & 1.1270 & -2.2540 & -1.1270 \\ 1.1270 & 0.5635 & -1.1270 & -0.5635 \\ -2.2540 & -1.1270 & 2.2540 & 1.1270 \\ -1.1270 & -0.5635 & 1.1270 & 0.5635 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Elemento 6. Dado que el extremo cercano es ⑦ y el extremo lejano es ⑥, se infiere

$$L = \sqrt{(4m)^2 + (2m)^2} = 4.472135955m \qquad \lambda_x = \frac{4-0}{4.472135955} = 0.894427191$$

$$\lambda_y = \frac{7-5}{4.472135955} = 0.447213596$$

$$k_6 = 10^5 \begin{matrix} \\ 16 \\ 14 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} 16 & 14 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 3.3809 & 1.6905 & -3.3809 & -1.6905 \\ 1.6905 & 0.8452 & -1.6905 & -0.8452 \\ -3.3809 & -1.6905 & 3.3809 & 1.6905 \\ -1.6905 & -0.8452 & 1.6905 & 0.8452 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Elemento 7. Si ⑦ es el extremo cercano y ⑧ es el extremo lejano, entonces

$$L = 4.472135955m \qquad \lambda_x = \frac{4-0}{4.472135955} = 0.894427191$$

$$\lambda_y = \frac{3-5}{4.472135955} = -0.447213596$$

$$k_7 = 10^5 \begin{matrix} \\ 16 \\ 14 \\ 11 \\ 12 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} 16 & 14 & 11 & 12 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 3.3809 & -1.6905 & -3.3809 & 1.6905 \\ -1.6905 & 0.8452 & 1.6905 & -0.8452 \\ -3.3809 & 1.6905 & 3.3809 & -1.6905 \\ 1.6905 & -0.8452 & -1.6905 & 0.8452 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Elemento 8. El extremo cercano es ⑧ y el extremo lejano es ①. En consecuencia,

$$L = 6.708203932m \qquad \lambda_x = \frac{10-4}{6.708203932} = 0.894427191$$

$$\lambda_y = \frac{0-3}{6.708203932} = -0.447213596$$

$$k_8 = 10^5 \begin{pmatrix} 2.2540 & -1.1270 & -2.2540 & 1.1270 \\ -1.1270 & 0.5635 & 1.1270 & -0.5635 \\ -2.2540 & 1.1270 & 2.2540 & -1.1270 \\ 1.1270 & -0.5635 & -1.1270 & 0.5635 \end{pmatrix} \begin{matrix} 11 \\ 12 \\ 17 \\ 18 \end{matrix}$$

Elemento 9. Dado que el extremo cercano es ① y el extremo lejano es ⑨, se infiere

$$L = 5m \qquad \lambda_x = \frac{10-10}{5} = 0 \qquad \lambda_y = \frac{5-0}{5} = 1$$

$$k_9 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 378000 & 0 & -378000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -378000 & 0 & 378000 \end{pmatrix} \begin{matrix} 17 \\ 18 \\ 7 \\ 8 \end{matrix}$$

Elemento 10. Como ⑨ y ⑤ corresponden a los extremos cercano y lejano, resulta

$$L = 5m \qquad \lambda_x = \frac{10-10}{5} = 0 \qquad \lambda_y = \frac{10-5}{5} = 1$$

$$k_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 378000 & 0 & -378000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -378000 & 0 & 378000 \end{pmatrix} \begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

Elemento 11. En este caso los extremos cercano y lejano son ⑨ y ③, por lo que

$$L = 8m \qquad \lambda_x = \frac{18-10}{8} = 1 \qquad \lambda_y = \frac{5-5}{8} = 0$$

$$k_{11} = \begin{pmatrix} 236250 & 0 & -236250 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -236250 & 0 & 236250 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 15 \\ 13 \end{matrix}$$

Elemento 12. Si ⑦ es el extremo cercano y ⑨ es el extremo lejano, entonces

$$L = 10m \qquad \lambda_x = \frac{10-0}{10} = 1 \qquad \lambda_y = \frac{5-5}{10} = 0$$

$$k_{12} = \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} 16 & 14 & 7 & 8 \end{matrix} \begin{pmatrix} 189000 & 0 & -189000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -189000 & 0 & 189000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 16 \\ 14 \\ 7 \\ 8 \end{matrix}$$

Elemento 13. Como ⑧ y ⑨ corresponden a los extremos cercano y lejano, resulta

$$L = \sqrt{(6m)^2 + (2m)^2} = 6.32455532m \qquad \lambda_x = \frac{10-4}{6.32455532} = 0.948683298$$

$$\lambda_y = \frac{5-3}{6.32455532} = 0.316227766$$

$$k_{13} = 10^5 \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} 11 & 12 & 7 & 8 \end{matrix} \begin{pmatrix} 2.6895 & 0.8965 & -2.6895 & -0.8965 \\ 0.8965 & 0.2988 & -0.8965 & -0.2988 \\ -2.6895 & -0.8965 & 2.6895 & 0.8965 \\ -0.8965 & -0.2988 & 0.8965 & 0.2988 \end{pmatrix} \begin{matrix} 11 \\ 12 \\ 7 \\ 8 \end{matrix}$$

Elemento 14. Aquí ⑥ es el extremo cercano y ⑨ es el extremo lejano, de modo que

$$L = 6.32455532m \qquad \lambda_x = \frac{10-4}{6.32455532} = 0.948683298$$

$$\lambda_y = \frac{5-7}{6.32455532} = -0.316227766$$

$$k_{14} = 10^5 \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \begin{pmatrix} 2.6895 & -0.8965 & -2.6895 & 0.8965 \\ -0.8965 & 0.2988 & 0.8965 & -0.2988 \\ -2.6895 & 0.8965 & 2.6895 & -0.8965 \\ 0.8965 & -0.2988 & -0.8965 & 0.2988 \end{pmatrix} \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix}$$

Elemento 15. Dado que el extremo cercano es ⑨ y el extremo lejano es ②, se infiere

$$L = \sqrt{(5m)^2 + (1.875m)^2} = 5.340002341m \qquad \lambda_x = \frac{15-10}{5.340002341} = 0.936329178$$

$$\lambda_y = \frac{3.125-5}{5.340002341} = -0.351123442$$

$$k_{15} = 10^5 \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3.1030 & -1.1636 & -3.1030 & 1.1636 \\ -1.1636 & 0.4364 & 1.1636 & -0.4364 \\ -3.1030 & 1.1636 & 3.1030 & -1.1636 \\ 1.1636 & -0.4364 & -1.1636 & 0.4364 \end{pmatrix} \begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix}$$

Elemento 16. Aquí ⑨ es el extremo cercano y ④ es el extremo lejano, de modo que

$$L = 5.340002341m \qquad \lambda_x = \frac{15-10}{5.340002341} = 0.936329178$$

$$\lambda_y = \frac{6.875-5}{5.340002341} = 0.351123442$$

$$k_{16} = 10^5 \begin{pmatrix} 7 & 8 & 1 & 2 \\ 3.1030 & 1.1636 & -3.1030 & -1.1636 \\ 1.1636 & 0.4364 & -1.1636 & -0.4364 \\ -3.1030 & -1.1636 & 3.1030 & 1.1636 \\ -1.1636 & -0.4364 & 1.1636 & 0.4364 \end{pmatrix} \begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

Matriz de rigidez de la estructura

Al ensamblar las matrices anteriores, se obtiene K. Las partes en las que se divide la matriz de rigidez de la estructura son

Submatriz K_{11}:

$$K_{11} = 10^6 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 0.9250 & -0.2678 & -0.2305 & 0.1441 & 0 & 0 & -0.3103 & -0.1164 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2401 & 0 \\ -0.2678 & 0.2837 & 0.1441 & -0.09 & 0 & 0 & -0.1164 & -0.0436 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1501 & 0 \\ -0.2305 & 0.1441 & 0.4559 & -0.0314 & -0.2254 & -0.1127 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1441 & -0.09 & -0.0314 & 0.5244 & -0.1127 & -0.0563 & 0 & -0.378 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.2254 & -0.1127 & 0.8324 & 0.1921 & -0.269 & 0.0897 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1690 \\ 0 & 0 & -0.1127 & -0.0563 & 0.1921 & 0.1708 & 0.0897 & -0.0299 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0845 \\ -0.3103 & -0.1164 & 0 & 0 & -0.269 & 0.0897 & 1.5837 & 0 & -0.3103 & 0.1164 & -0.269 & -0.0897 & 0 & 0 \\ -0.1164 & -0.0436 & 0 & -0.378 & 0.0897 & -0.0299 & 0 & 0.9030 & 0.1164 & -0.0436 & -0.0897 & -0.0299 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.3103 & 0.1164 & 0.9250 & 0.2678 & 0 & 0 & -0.2401 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1164 & -0.0436 & 0.2678 & 0.2837 & 0 & 0 & -0.1501 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.269 & -0.0897 & 0 & 0 & 0.8324 & -0.1921 & 0 & 0.1690 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0897 & -0.0299 & 0 & 0 & -0.1921 & 0.1708 & 0 & -0.0845 \\ 0.2401 & -0.1501 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.2401 & -0.1501 & 0 & 0 & 0.3001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.169 & -0.0845 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1690 & -0.0845 & 0 & 0.1690 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \end{matrix}$$

Submatriz K_{12}:

$$K_{12} = 10^6 \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} 15 & 16 & 17 & 18 \end{matrix} \begin{pmatrix} -0.3842 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2401 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.3381 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1690 & 0 & 0 \\ -0.2362 & -0.1890 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.378 \\ -0.3842 & 0 & -0.2305 & -0.1441 \\ -0.2401 & 0 & -0.1441 & -0.09 \\ 0 & -0.3381 & -0.2254 & 0.1127 \\ 0 & 0.1690 & 0.1127 & -0.0563 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \end{matrix}$$

Submatriz K_{21}:

$$K_{21} = 10^6 \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \end{matrix} \begin{pmatrix} -0.3842 & 0.2401 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.2362 & 0 & -0.3842 & -0.2401 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.3381 & -0.169 & -0.189 & 0 & 0 & 0 & -0.3381 & 0.1690 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.2305 & -0.1441 & -0.2254 & 0.1127 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.378 & -0.1441 & -0.09 & 0.1127 & -0.0563 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 15 \\ 16 \\ 17 \\ 18 \end{matrix}$$

Submatriz K_{22}:

$$K_{22} = 10^6 \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} 15 & 16 & 17 & 18 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1.0046 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8652 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4559 & 0.0314 \\ 0 & 0 & 0.0314 & 0.5244 \end{pmatrix} \begin{matrix} 15 \\ 16 \\ 17 \\ 18 \end{matrix}$$

Vectores de desplazamientos y de cargas

Un rodillo situado en un plano inclinado debe atenderse de manera especial como se verá en algún otro ejercicio, excepto los casos en los que la inclinación del tipo de soporte citado es de $90°$ y de $180°$. Obsérvese como los soportes ③ y ⑦ no representan gran problema ya que el plano en que pueden deslizarse es ortogonal al eje x, lo cual conlleva a que los desplazamientos horizontales en esos nodos sean inexistentes. Luego, las cargas externas son obvias. Entonces, los vectores D y C son

$$D = \begin{pmatrix} D_D \\ D_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \\ D_9 \\ D_{10} \\ D_{11} \\ D_{12} \\ D_{13} \\ D_{14} \\ \hline D_{15} \\ D_{16} \\ D_{17} \\ D_{18} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_{H4} \\ \delta_{V4} \\ \Delta_{H5} \\ \delta_{V5} \\ \Delta_{H6} \\ \delta_{V6} \\ \Delta_{H9} \\ \delta_{V9} \\ \Delta_{H2} \\ \delta_{V2} \\ \Delta_{H8} \\ \delta_{V8} \\ \delta_{V3} \\ \delta_{V7} \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \\ 15 \\ 16 \\ 17 \\ 18 \end{matrix} \qquad C = \begin{pmatrix} C_C \\ C_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \\ C_8 \\ C_9 \\ C_{10} \\ C_{11} \\ C_{12} \\ C_{13} \\ C_{14} \\ \hline C_{15} \\ C_{16} \\ C_{17} \\ C_{18} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 0 \\ -10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline R_{3x} \\ R_{7x} \\ R_{1x} \\ R_{1y} \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \\ 15 \\ 16 \\ 17 \\ 18 \end{matrix}$$

Cálculo de los desplazamientos incógnita y las reacciones en los soportes

Se extrae el primer subsistema de $C = KD$ y se resuelve.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 0 \\ -10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 10^6 \begin{pmatrix} 0.9250 & -0.2678 & -0.2305 & 0.1441 & 0 & 0 & -0.3103 & -0.1164 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2401 & 0 \\ -0.2678 & 0.2837 & 0.1441 & -0.09 & 0 & 0 & -0.1164 & -0.0436 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1501 & 0 \\ -0.2305 & 0.1441 & 0.4559 & -0.0314 & -0.2254 & -0.1127 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1441 & -0.09 & -0.0314 & 0.5244 & -0.1127 & -0.0563 & 0 & -0.378 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.2254 & -0.1127 & 0.8324 & 0.1921 & -0.269 & 0.0897 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1690 \\ 0 & 0 & -0.1127 & -0.0563 & 0.1921 & 0.1708 & 0.0897 & -0.0299 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0845 \\ -0.3103 & -0.1164 & 0 & 0 & -0.269 & 0.0897 & 1.5837 & 0 & -0.3103 & 0.1164 & -0.269 & -0.0897 & 0 & 0 \\ -0.1164 & -0.0436 & 0 & -0.378 & 0.0897 & -0.0299 & 0 & 0.9030 & 0.1164 & -0.0436 & -0.0897 & -0.0299 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.3103 & 0.1164 & 0.9250 & 0.2678 & 0 & 0 & -0.2401 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1164 & -0.0436 & 0.2678 & 0.2837 & 0 & 0 & -0.1501 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.269 & -0.0897 & 0 & 0 & 0.8324 & -0.1921 & 0 & 0.1690 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0897 & -0.0299 & 0 & 0 & -0.1921 & 0.1708 & 0 & -0.0845 \\ 0.2401 & -0.1501 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.2401 & -0.1501 & 0 & 0 & 0.3001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.169 & -0.0845 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1690 & -0.0845 & 0 & 0.1690 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_{H4} \\ \delta_{V4} \\ \Delta_{H5} \\ \delta_{V5} \\ \Delta_{H6} \\ \delta_{V6} \\ \Delta_{H9} \\ \delta_{V9} \\ \Delta_{H2} \\ \delta_{V2} \\ \Delta_{H8} \\ \delta_{V8} \\ \delta_{V3} \\ \delta_{V7} \end{pmatrix}$$

Entonces, los desplazamientos desconocidos equivalen a

$$\begin{pmatrix} \Delta_{H4} \\ \delta_{V4} \\ \Delta_{H5} \\ \delta_{V5} \\ \Delta_{H6} \\ \delta_{V6} \\ \Delta_{H9} \\ \delta_{V9} \\ \Delta_{H2} \\ \delta_{V2} \\ \Delta_{H8} \\ \delta_{V8} \\ \delta_{V3} \\ \delta_{V7} \end{pmatrix} = 10^{-4} \begin{pmatrix} -0.1791m \\ -0.8676m \\ 0.0855m \\ -0.4763m \\ -0.1404m \\ 0.0286m \\ -0.2257m \\ -0.2276m \\ -0.2173m \\ 0.3107m \\ -0.0896m \\ -0.3683m \\ -0.3089m \\ -0.2206m \end{pmatrix}$$

Para calcular las reaciones de los soportes, se soluciona el segundo subsistema empleando los resultados recién obtenidos.

$$\begin{pmatrix} R_{3x} \\ R_{7x} \\ R_{1x} \\ R_{1y} \end{pmatrix} = 10^6 \begin{pmatrix} -0.3842 & 0.2401 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.2362 & 0 & -0.3842 & -0.2401 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.3381 & -0.169 & -0.189 & 0 & 0 & 0 & -0.3381 & 0.1690 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.2305 & -0.1441 & -0.2254 & 0.1127 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.378 & -0.1441 & -0.09 & 0.1127 & -0.0563 & 0 & 0 \end{pmatrix} (10^{-4}) \begin{pmatrix} -0.1791 \\ -0.8676 \\ 0.0855 \\ -0.4763 \\ -0.1404 \\ 0.0286 \\ -0.2257 \\ -0.2276 \\ -0.2173 \\ 0.3107 \\ -0.0896 \\ -0.3683 \\ -0.3089 \\ -0.2206 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7.7302T \\ 5.3302T \\ -1.60T \\ 10T \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

$R_{3x} = 7.7302T \leftarrow$ $R_{7x} = 5.3302T \rightarrow$ $R_{1x} = 1.60T \leftarrow$ $R_{1y} = 10T \uparrow$

Se comprueba el equilibrio externo de la armadura.

$$+\uparrow \sum Fy = 10 - 10 = 0 \quad ok$$

$$+\rightarrow \sum Fx = 4 - 7.7302 + 5.3302 - 1.6 = 0 \quad ok$$

$$+\circlearrowright \sum M7 = -4(2) + 10(10) + 6(15) - 6(15) - 10(10) + 1.60(5) = 0 \quad ok$$

Cálculo de las fuerzas en los elementos 1, 8 y 9

Se calcula la fuerza en los elementos necesarios para analizar el nodo ① empleando la ecuación $1 - 15$.

Elemento 1:

$$q_1 = \left(\frac{(0.09)(2.1 * 10^7)}{5.896238208}\right)(-0.847998304 \quad -0.52999894 \quad 0.847998304 \quad 0.52999894)(10^{-4}) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.2173 \\ 0.3107 \end{pmatrix}$$

$$= -0.628244T \ (Compresión)$$

Elemento 8:

$$q_8 = \left(\frac{(0.09)(2.1 * 10^7)}{6.708203932}\right)(-0.894427191 \quad 0.447213596 \quad 0.894427191 \quad -0.447213596)(10^{-4}) \begin{pmatrix} -0.0896 \\ -0.3683 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

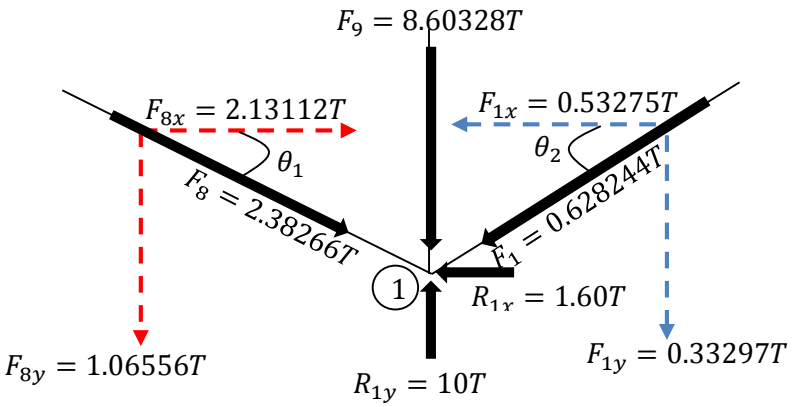
$$= -2.38266T\ (Compresión)$$

Elemento 9:

$$q_9 = \left(\frac{(0.09)(2.1 * 10^7)}{5}\right)(0 \quad -1 \quad 0 \quad 1)(10^{-4})\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.2257 \\ -0.2276 \end{pmatrix} = -8.60328T\ (Compresión)$$

Comprobación del equilibrio en la junta ①

Finalmente, se demuestra el equilibrio en el nodo ① con base en la figura 1-5c.



(c)

$$+\rightarrow \sum Fx = F_{8x} - R_{1x} - F_{1x} = (2.38266T)(\cos\theta_1) - 1.6 - (0.628244T)(\cos\theta_2)$$

$$= (2.38266T)\left(\frac{6}{6.708203932}\right) - 1.6 - (0.628244T)\left(\frac{5}{5.896238208}\right)$$

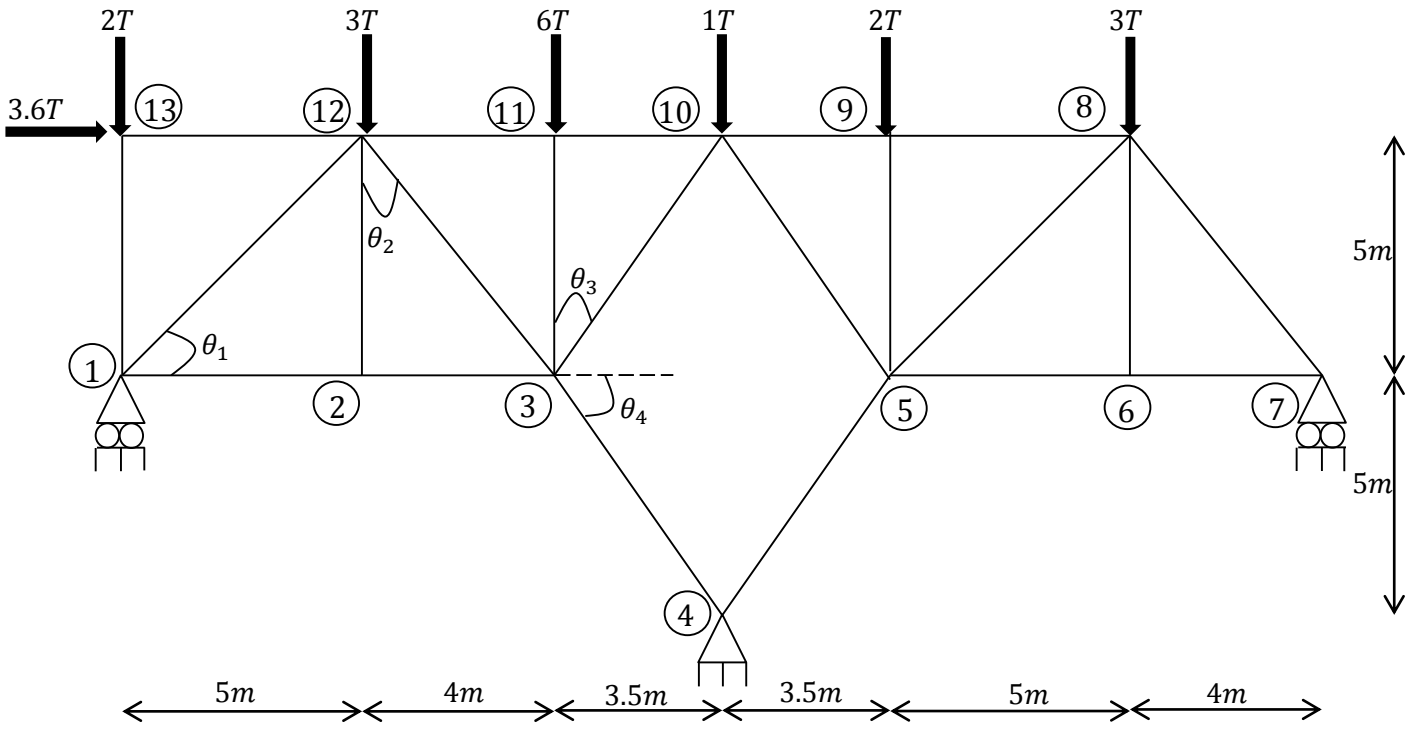
$$= 2.13112 - 1.6 - 0.53275 \cong 0 \quad ok$$

$$+\uparrow \sum Fy = -F_{8y} + R_{1y} - F_9 - F_{1y} = -(2.38266T)(\sin\theta_1) + 10 - 8.60328$$

$$-(0.628244T)(\sin\theta_2) = -(2.38266T)\left(\frac{3}{6.708203932}\right) + 10 - 8.60328$$

$$-(0.628244T)\left(\frac{3.125}{5.896238208}\right) = -1.06556 + 10 - 8.60328 - 0.33297 \approx 0 \quad ok$$

EJERCICIO 1.6 Calcule las reacciones en los soportes y la fuerza en cada uno de los elementos que componen la armadura que se muestra en la figura 1-6a mediante el método directo de la rigidez. Compruebe el equilibrio en las juntas para verificar que los resultados obtenidos son correctos. AE es constante.



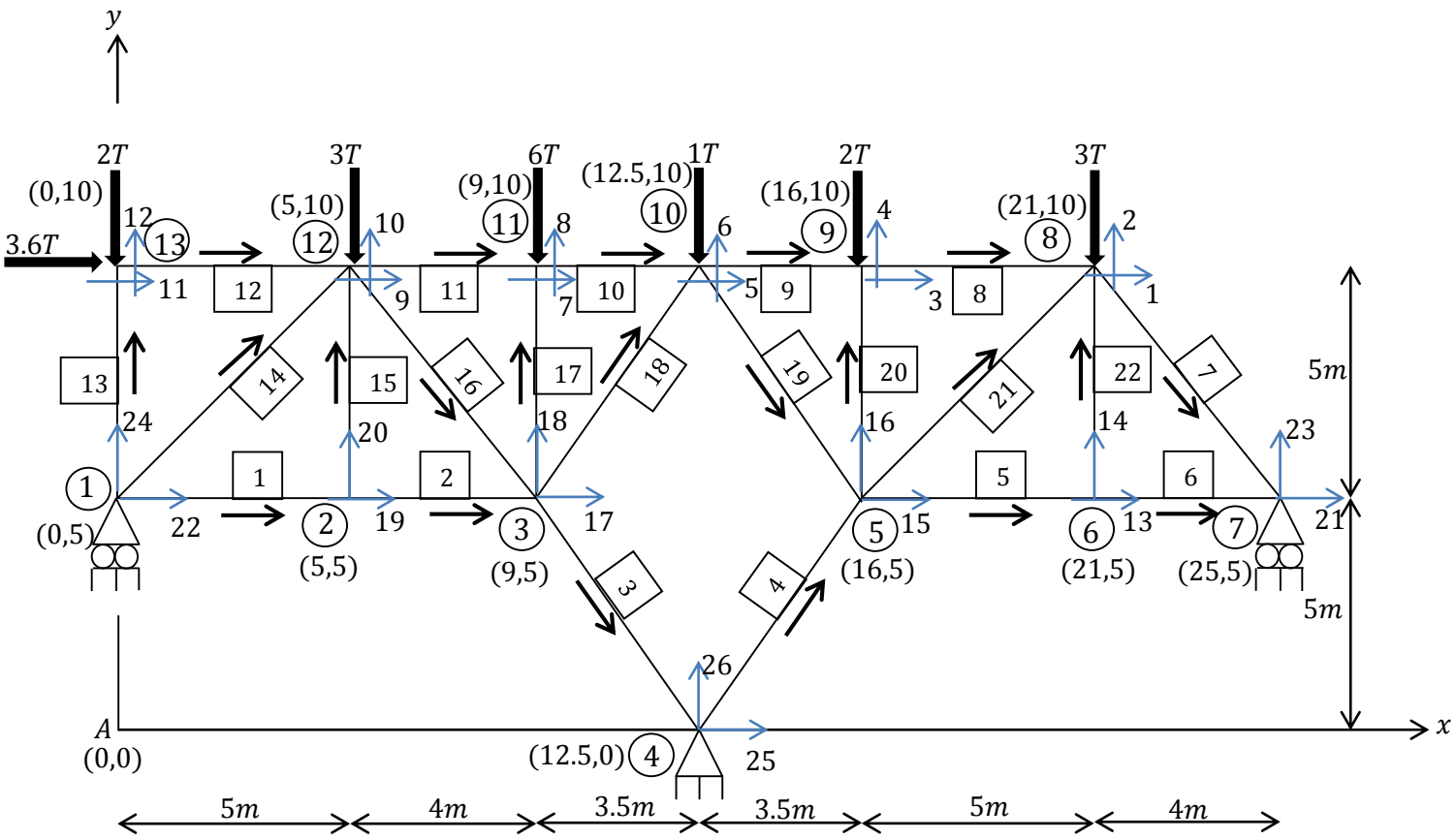
(a)

Figura 1-6

SOLUCIÓN

Notación

La armadura se compone de veintidós elementos. Por otra parte, trece nodos han sido identificados. Por comodidad, el origen de las coordenadas globales se establece en el punto A, figura 1-6b. De los veintiséis desplazamientos posibles, los codificados del 1 al 22 representan desplazamientos no restringidos, es decir, son incógnitas, mientras que del 23 al 26 representan desplazamientos restringidos y son iguales a cero.



(b)

Cosenos directores y matriz de rigidez global para cada elemento

Aplicando las expresiones algebraicas $1-2$, $1-3$ y $1-4$, resulta

Elemento 1. Debido a que el extremo cercano es ① y el extremo lejano es ②, se obtiene

$$L = 5m \qquad \lambda_x = \frac{5-0}{5} = 1 \qquad \lambda_y = \frac{5-5}{5} = 0$$

$$k_1 = AE \begin{matrix} \\ 22 \\ 24 \\ 19 \\ 20 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} 22 & 24 & 19 & 20 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0.2000 & 0 & -0.2000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.2000 & 0 & 0.2000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Elemento 2. El extremo cercano es ② y el extremo lejano es ③. En consecuencia,

$$L = 4m \qquad \lambda_x = \frac{9-5}{4} = 1 \qquad \lambda_y = \frac{5-5}{4} = 0$$

$$k_2 = AE \begin{matrix} \\ 19 \\ 20 \\ 17 \\ 18 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} 19 & 20 & 17 & 18 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0.2500 & 0 & -0.2500 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.2500 & 0 & 0.2500 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Elemento 3. Puesto que el extremo cercano es ③ y el extremo lejano es ④, se infiere

$$L = \sqrt{(5m)^2 + (3.5m)^2} = 6.10328m \qquad \lambda_x = \frac{12.5-9}{6.10328} = 0.57346$$

$$\lambda_y = \frac{0-5}{6.10328} = -0.81923$$

$$k_3 = AE \begin{matrix} \\ 17 \\ 18 \\ 25 \\ 26 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} 17 & 18 & 25 & 26 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0.0539 & -0.077 & -0.0539 & 0.077 \\ -0.077 & 0.11 & 0.077 & -0.11 \\ -0.0539 & 0.077 & 0.0539 & -0.077 \\ 0.077 & -0.11 & -0.077 & 0.11 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Elemento 4. Debido a que el extremo cercano es ④ y el extremo lejano es ⑤, se deduce

$$L = 6.10328m \qquad \lambda_x = \frac{16-12.5}{6.10328} = 0.57346$$

$$\lambda_y = \frac{5-0}{6.10328} = 0.81923$$

$$k_4 = AE \begin{matrix} \\ 25 \\ 26 \\ 15 \\ 16 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} 25 & 26 & 15 & 16 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0.0539 & 0.077 & -0.0539 & -0.077 \\ 0.077 & 0.11 & -0.077 & -0.11 \\ -0.0539 & -0.077 & 0.0539 & 0.077 \\ -0.077 & -0.11 & 0.077 & 0.11 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Elemento 5. Como ⑤ y ⑥ corresponden a los extremos cercano y lejano, resulta

$$L = 5m \qquad \lambda_x = \frac{21-16}{5} = 1 \qquad \lambda_y = \frac{5-5}{5} = 0$$

$$k_5 = AE\begin{pmatrix} 0.2000 & 0 & -0.2000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.2000 & 0 & 0.2000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} 15 \\ 16 \\ 13 \\ 14 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 15 & 16 & 13 & 14 \end{matrix}$$

Elemento 6. Dado que el extremo cercano es ⑥ y el extremo lejano es ⑦, se infiere

$$L = 4m \qquad \lambda_x = \frac{25-21}{4} = 1 \qquad \lambda_y = \frac{5-5}{4} = 0$$

$$k_6 = AE\begin{pmatrix} 0.2500 & 0 & -0.2500 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.2500 & 0 & 0.2500 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} 13 \\ 14 \\ 21 \\ 23 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 13 & 14 & 21 & 23 \end{matrix}$$

Elemento 7. Debido a que el extremo cercano es ⑧ y el extremo lejano es ⑦, se obtiene

$$L = \sqrt{(4m)^2 + (5m)^2} = 6.40312m \qquad \lambda_x = \frac{25-21}{6.40312} = 0.62470$$

$$\lambda_y = \frac{5-10}{6.40312} = -0.78087$$

$$k_7 = AE\begin{pmatrix} 0.0609 & -0.0762 & -0.0609 & 0.0762 \\ -0.0762 & 0.0952 & 0.0762 & -0.0952 \\ -0.0609 & 0.0762 & 0.0609 & -0.0762 \\ 0.0762 & -0.0952 & -0.0762 & 0.0952 \end{pmatrix}\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 21 \\ 23 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 2 & 21 & 23 \end{matrix}$$

Elemento 8. El extremo cercano es ⑨ y el extremo lejano es ⑧. Por consiguiente,

$$L = 5m \qquad \lambda_x = \frac{21-16}{5} = 1 \qquad \lambda_y = \frac{10-10}{5} = 0$$

$$k_8 = AE\begin{pmatrix} 0.2000 & 0 & -0.2000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.2000 & 0 & 0.2000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 3 & 4 & 1 & 2 \end{matrix}$$

Elemento 9. Dado que el extremo cercano es ⑩ y el extremo lejano es ⑨, se infiere

$$L = 3.5m \qquad \lambda_x = \frac{16 - 12.5}{3.5} = 1 \qquad \lambda_y = \frac{10 - 10}{3.5} = 0$$

$$k_9 = AE \begin{pmatrix} 0.2857 & 0 & -0.2857 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.2857 & 0 & 0.2857 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

Elemento 10. Si ⑪ es el extremo cercano y ⑩ es el extremo lejano, entonces

$$L = 3.5m \qquad \lambda_x = \frac{12.5 - 9}{3.5} = 1 \qquad \lambda_y = \frac{10 - 10}{3.5} = 0$$

$$k_{10} = AE \begin{pmatrix} 0.2857 & 0 & -0.2857 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.2857 & 0 & 0.2857 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

Elemento 11. El extremo cercano es ⑫ y el extremo lejano es ⑪. En consecuencia,

$$L = 4m \qquad \lambda_x = \frac{9 - 5}{4} = 1 \qquad \lambda_y = \frac{10 - 10}{4} = 0$$

$$k_{11} = AE \begin{pmatrix} 0.2500 & 0 & -0.2500 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.2500 & 0 & 0.2500 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 9 \\ 10 \\ 7 \\ 8 \end{matrix}$$

Elemento 12. Aquí ⑬ es el extremo cercano y ⑫ es el extremo lejano, de modo que

$$L = 5m \qquad \lambda_x = \frac{5 - 0}{5} = 1 \qquad \lambda_y = \frac{10 - 10}{5} = 0$$

$$k_{12} = AE \begin{pmatrix} 0.2000 & 0 & -0.2000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.2000 & 0 & 0.2000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 11 \\ 12 \\ 9 \\ 10 \end{matrix}$$

Elemento 13. Como ① y ⑬ corresponden a los extremos cercano y lejano, resulta

$$L = 5m \qquad \lambda_x = \frac{0-0}{5} = 0 \qquad \lambda_y = \frac{10-5}{5} = 1$$

$$k_{13} = AE \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} 22 & 24 & 11 & 12 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2000 & 0 & -0.2000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.2000 & 0 & 0.2000 \end{pmatrix} \begin{matrix} 22 \\ 24 \\ 11 \\ 12 \end{matrix}$$

Elemento 14. Aquí ① es el extremo cercano y ⑫ es el extremo lejano. Por consiguiente,

$$L = \sqrt{(5m)^2 + (5m)^2} = 7.07107m \qquad \lambda_x = \frac{5-0}{7.07107} = 0.70711$$

$$\lambda_y = \frac{10-5}{7.07107} = 0.70711$$

$$k_{14} = AE \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} 22 & 24 & 9 & 10 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0.0707 & 0.0707 & -0.0707 & -0.0707 \\ 0.0707 & 0.0707 & -0.0707 & -0.0707 \\ -0.0707 & -0.0707 & 0.0707 & 0.0707 \\ -0.0707 & -0.0707 & 0.0707 & 0.0707 \end{pmatrix} \begin{matrix} 22 \\ 24 \\ 9 \\ 10 \end{matrix}$$

Elemento 15. Debido a que el extremo cercano es ② y el extremo lejano es ⑫, se obtiene

$$L = 5m \qquad \lambda_x = \frac{5-5}{5} = 0 \qquad \lambda_y = \frac{10-5}{5} = 1$$

$$k_{15} = AE \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} 19 & 20 & 9 & 10 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2000 & 0 & -0.2000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.2000 & 0 & 0.2000 \end{pmatrix} \begin{matrix} 19 \\ 20 \\ 9 \\ 10 \end{matrix}$$

Elemento 16. El extremo cercano es ⑫ y el extremo lejano es ③. En consecuencia,

$$L = 6.40312m \qquad \lambda_x = \frac{9-5}{6.40312} = 0.62470$$

$$\lambda_y = \frac{5-10}{6.40312} = -0.78087$$

$$k_{16} = AE \begin{matrix} \\ 9 \\ 10 \\ 17 \\ 18 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} 9 & 10 & 17 & 18 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0.0609 & -0.0762 & -0.0609 & 0.0762 \\ -0.0762 & 0.0952 & 0.0762 & -0.0952 \\ -0.0609 & 0.0762 & 0.0609 & -0.0762 \\ 0.0762 & -0.0952 & -0.0762 & 0.0952 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Elemento 17. Dado que el extremo cercano es ⑬ y el extremo lejano es ⑪, se infiere

$$L = 5m \qquad \lambda_x = \frac{9-9}{5} = 0 \qquad \lambda_y = \frac{10-5}{5} = 1$$

$$k_{17} = AE \begin{matrix} \\ 17 \\ 18 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} 17 & 18 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2000 & 0 & -0.2000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.2000 & 0 & 0.2000 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Elemento 18. Si ③ es el extremo cercano y ⑩ es el extremo lejano, entonces

$$L = 6.10328m \qquad \lambda_x = \frac{12.5-9}{6.10328} = 0.57346$$

$$\lambda_y = \frac{10-5}{6.10328} = 0.81923$$

$$k_{18} = AE \begin{matrix} \\ 17 \\ 18 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} 17 & 18 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0.0539 & 0.077 & -0.0539 & -0.077 \\ 0.077 & 0.11 & -0.077 & -0.11 \\ -0.0539 & -0.077 & 0.0539 & 0.077 \\ -0.077 & -0.11 & 0.077 & 0.11 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Elemento 19. Como ⑩ y ⑤ corresponden a los extremos cercano y lejano, resulta

$$L = 6.10328m \qquad \lambda_x = \frac{16-12.5}{6.10328} = 0.57346$$

$$\lambda_y = \frac{5-10}{6.10328} = -0.81923$$

$$k_{19} = AE \begin{matrix} \\ 5 \\ 6 \\ 15 \\ 16 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} 5 & 6 & 15 & 16 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0.0539 & -0.077 & -0.0539 & 0.077 \\ -0.077 & 0.11 & 0.077 & -0.11 \\ -0.0539 & 0.077 & 0.0539 & -0.077 \\ 0.077 & -0.11 & -0.077 & 0.11 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Elemento 20. Puesto que el extremo cercano es ⑤ y el extremo lejano es ⑨, se obtiene

$$L = 5m \qquad \lambda_x = \frac{16-16}{5} = 0 \qquad \lambda_y = \frac{10-5}{5} = 1$$

$$k_{20} = AE \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} 15 & 16 & 3 & 4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2000 & 0 & -0.2000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.2000 & 0 & 0.2000 \end{pmatrix} \begin{matrix} 15 \\ 16 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

Elemento 21. Aquí ⑧ es el extremo cercano y ⑤ es el extremo lejano, de modo que

$$L = 7.07107m \qquad \lambda_x = \frac{21-16}{7.07107} = 0.70711$$

$$\lambda_y = \frac{10-5}{7.07107} = 0.70711$$

$$k_{21} = AE \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} 15 & 16 & 1 & 2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0.0707 & 0.0707 & -0.0707 & -0.0707 \\ 0.0707 & 0.0707 & -0.0707 & -0.0707 \\ -0.0707 & -0.0707 & 0.0707 & 0.0707 \\ -0.0707 & -0.0707 & 0.0707 & 0.0707 \end{pmatrix} \begin{matrix} 15 \\ 16 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

Elemento 22. El extremo cercano es ⑥ y el extremo lejano es ⑧. En consecuencia,

$$L = 5m \qquad \lambda_x = \frac{21-21}{5} = 0 \qquad \lambda_y = \frac{10-5}{5} = 1$$

$$k_{22} = AE \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} 13 & 14 & 1 & 2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2000 & 0 & -0.2000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.2000 & 0 & 0.2000 \end{pmatrix} \begin{matrix} 13 \\ 14 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

Matriz de rigidez de la estructura

Se ensamblan las veintidós matrices anteriores dando como resultado la matriz K, la cual debe seccionarse dando origen a cuatro submatrices que son

Submatriz K_{11}:

Columnas desde la 1 hasta la 12

$$K_{11} = AE *$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0.3317	−0.0055	−0.2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
−0.0055	0.3659	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
−0.2	0	0.4857	0	−0.2857	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0.2	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	−0.2857	0	0.6792	0	−0.2857	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0.2199	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	−0.2857	0	0.5357	0	−0.25	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0.2	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	−0.25	0	0.5817	−0.0055	−0.2	0
0	0	0	0	0	0	0	0	−0.0055	0.3659	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	−0.2	0	0.2	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.2
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	−0.2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
−0.0707	−0.0707	0	0	−0.0539	0.077	0	0	0	0	0	0
−0.0707	−0.0707	0	−0.2	0.077	−0.11	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	−0.0539	−0.077	0	0	−0.0609	0.0762	0	0
0	0	0	0	−0.077	−0.11	0	−0.2	0.0762	−0.0952	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	−0.2	0	0
−0.0609	0.0762	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	−0.0707	−0.0707	0	0

Columnas desde la 13 hasta la 22

13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	.
0	0	−0.0707	−0.0707	0	0	0	0	−0.0609	0	1
0	−0.2	−0.0707	−0.0707	0	0	0	0	0.0762	0	2
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3
0	0	0	−0.2	0	0	0	0	0	0	4
0	0	−0.0539	0.077	−0.0539	−0.077	0	0	0	0	5
0	0	0.077	−0.11	−0.077	−0.11	0	0	0	0	6
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7
0	0	0	0	0	−0.2	0	0	0	0	8
0	0	0	0	−0.0609	0.0762	0	0	0	−0.0707	9
0	0	0	0	0.0762	−0.0952	0	−0.2	0	−0.0707	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	11
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	12
0.45	0	−0.2	0	0	0	0	0	−0.25	0	13
0	0.2	0	0	0	0	0	0	0	0	14
−0.2000	0	0.3785	0.0707	0	0	0	0	0	0	15
0	0	0.0707	0.4906	0	0	0	0	0	0	16
0	0	0	0	0.4187	−0.0762	−0.25	0	0	0	17
0	0	0	0	−0.0762	0.5152	0	−0.2	0	0	18
0	0	0	0	−0.25	0	0.45	0	0	−0.2	19
0	0	0	0	0	0	0	0.2	0	0	20
−0.2500	0	0	0	0	0	0	0	0.3109	0	21
0	0	0	0	0	0	−0.2	0	0	0.2707	22

Submatriz K_{12}:

$$K_{12} = AE \begin{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0.0762 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0952 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0707 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0707 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0539 & -0.077 \\ 0 & 0 & -0.077 & -0.11 \\ 0 & 0 & -0.0539 & 0.077 \\ 0 & 0 & 0.077 & -0.11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0762 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0707 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} 23 & 24 & 25 & 26 \\ & & & \end{matrix} \begin{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \\ 15 \\ 16 \\ 17 \\ 18 \\ 19 \\ 20 \\ 21 \\ 22 \end{matrix} \end{matrix}$$

Submatriz K_{21}:

$$K_{21} = AE \begin{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0.0762 & -0.0952 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0762 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0707 & -0.0707 & 0 & -0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0707 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0539 & -0.077 & -0.0539 & 0.077 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.077 & -0.11 & 0.077 & -0.11 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 \\ & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & \end{matrix} \begin{matrix} \\ \begin{matrix} 23 \\ 24 \\ 25 \\ 26 \end{matrix} \end{matrix}$$

Submatriz K_{22}:

$$K_{22} = AE \begin{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0.0952 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2707 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1078 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2199 \end{pmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} 23 & 24 & 25 & 26 \\ & & & \end{matrix} \begin{matrix} \\ \begin{matrix} 23 \\ 24 \\ 25 \\ 26 \end{matrix} \end{matrix}$$

Vectores de desplazamientos y de cargas

Los vectores V y C son, respectivamente

$$D = \begin{pmatrix} D_D \\ \hline D_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \\ D_9 \\ D_{10} \\ D_{11} \\ D_{12} \\ D_{13} \\ D_{14} \\ D_{15} \\ D_{16} \\ D_{17} \\ D_{18} \\ D_{19} \\ D_{20} \\ D_{21} \\ D_{22} \\ \hline D_{23} \\ D_{24} \\ D_{25} \\ D_{26} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_{H8} \\ \delta_{V8} \\ \Delta_{H9} \\ \delta_{V9} \\ \Delta_{H10} \\ \delta_{V10} \\ \Delta_{H11} \\ \delta_{V11} \\ \Delta_{H12} \\ \delta_{V12} \\ \Delta_{H13} \\ \delta_{V13} \\ \Delta_{H6} \\ \delta_{V6} \\ \Delta_{H5} \\ \delta_{V5} \\ \Delta_{H3} \\ \delta_{V3} \\ \Delta_{H2} \\ \delta_{V2} \\ \Delta_{H7} \\ \Delta_{H1} \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \\ 15 \\ 16 \\ 17 \\ 18 \\ 19 \\ 20 \\ 21 \\ 22 \\ 23 \\ 24 \\ 25 \\ 26 \end{matrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} C_C \\ \hline C_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \\ C_8 \\ C_9 \\ C_{10} \\ C_{11} \\ C_{12} \\ C_{13} \\ C_{14} \\ C_{15} \\ C_{16} \\ C_{17} \\ C_{18} \\ C_{19} \\ C_{20} \\ C_{21} \\ C_{22} \\ \hline C_{23} \\ C_{24} \\ C_{25} \\ C_{26} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -6 \\ 0 \\ -3 \\ 3.6 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline R_{7y} \\ R_{1y} \\ R_{4x} \\ R_{4y} \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \\ 15 \\ 16 \\ 17 \\ 18 \\ 19 \\ 20 \\ 21 \\ 22 \\ 23 \\ 24 \\ 25 \\ 26 \end{matrix}$$

Cálculo de los desplazamientos incógnita y las reacciones en los soportes

Se plantea la expresión $C = KD$ para esta armadura. Al resolver el sistema simultaneo de ecuaciones, se tiene que los desplazamientos desconocidos son

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \\ D_9 \\ D_{10} \\ D_{11} \\ D_{12} \\ D_{13} \\ D_{14} \\ D_{15} \\ D_{16} \\ D_{17} \\ D_{18} \\ D_{19} \\ D_{20} \\ D_{21} \\ D_{22} \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{AE}\right) \begin{pmatrix} 98.6379 \\ -140.6764 \\ 68.9108 \\ -294.2143 \\ 48.1019 \\ -474.4071 \\ 29.3929 \\ -307.8249 \\ 8.0112 \\ -155.6615 \\ 26.0112 \\ -10 \\ 301.1976 \\ -140.6764 \\ 307.7429 \\ -284.2143 \\ -231.8023 \\ -277.8249 \\ -217.2570 \\ -155.6615 \\ 295.9612 \\ -199.0753 \end{pmatrix}$$

y las reacciones en los soportes son

$$\begin{pmatrix} R_{7y} \\ R_{1y} \\ R_{4x} \\ R_{4y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.6363T \\ -1.6363T \\ -3.6T \\ 20.2727T \end{pmatrix}$$

Los signos de los valores numéricos de las incógnitas indican que

$R_{7y} = 1.6363T\downarrow$ $R_{1y} = 1.6363T\downarrow$ $R_{4x} = 3.6T\leftarrow$ $R_{4y} = 20.2727T\uparrow$

Cálculo de las fuerzas en los elementos

A continuación, se calcula la fuerza en cada elemento a través de la ecuación $1-15$.

Elemento 1:

$$q_1 = \left(\frac{AE}{5}\right)(-1 \quad 0 \quad 1 \quad 0)\left(\frac{1}{AE}\right)\begin{pmatrix} -199.0753 \\ 0 \\ -217.2570 \\ -155.6615 \end{pmatrix} = -3.63634T\ (Compresión)$$

Elemento 2:

$$q_2 = \left(\frac{AE}{4}\right)(-1 \quad 0 \quad 1 \quad 0)\left(\frac{1}{AE}\right)\begin{pmatrix} -217.257 \\ -155.6615 \\ -231.8023 \\ -277.8249 \end{pmatrix} = -3.63633T\ (Compresión)$$

Elemento 3:

$$q_3 = \left(\frac{AE}{6.10328}\right)(-0.57346 \quad 0.81923 \quad 0.57346 \quad -0.81923)\left(\frac{1}{AE}\right)\begin{pmatrix} -231.8023 \\ -277.8249 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= -15.5118T\ (Compresión)$$

Elemento 4:

$$q_4 = \left(\frac{AE}{6.10328}\right)(-0.57346 \quad -0.81923 \quad 0.57346 \quad 0.81923)\left(\frac{1}{AE}\right)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 307.7429 \\ -284.2143 \end{pmatrix}$$

$$= -9.23416T\ (Compresión)$$

Elemento 5:

$$q_5 = \left(\frac{AE}{5}\right)(-1 \quad 0 \quad 1 \quad 0)\left(\frac{1}{AE}\right)\begin{pmatrix} 307.7429 \\ -284.2143 \\ 301.1976 \\ -140.6764 \end{pmatrix} = -1.30906T\ (Compresión)$$

Elemento 6:

$$q_6 = \left(\frac{AE}{4}\right)(-1 \quad 0 \quad 1 \quad 0)\left(\frac{1}{AE}\right)\begin{pmatrix} 301.1976 \\ -140.6764 \\ 295.9612 \\ 0 \end{pmatrix} = -1.3091T\ (Compresión)$$

Elemento 7:

$$q_7 = \left(\frac{AE}{6.40312}\right)(-0.6247 \quad 0.78087 \quad 0.6247 \quad -0.78087)\left(\frac{1}{AE}\right)\begin{pmatrix} 98.6379 \\ -140.6764 \\ 295.9612 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= 2.09552T\ (Tensión)$$

Elemento 8:

$$q_8 = \left(\frac{AE}{5}\right)(-1 \quad 0 \quad 1 \quad 0)\left(\frac{1}{AE}\right)\begin{pmatrix} 68.9108 \\ -294.2143 \\ 98.6379 \\ -140.6764 \end{pmatrix} = 5.94542T\ (Tensión)$$

Elemento 9:

$$q_9 = \left(\frac{AE}{3.5}\right)(-1 \quad 0 \quad 1 \quad 0)\left(\frac{1}{AE}\right)\begin{pmatrix} 48.1019 \\ -474.4071 \\ 68.9108 \\ -294.2143 \end{pmatrix} = 5.9454T\ (Tensión)$$

Elemento 10:

$$q_{10} = \left(\frac{AE}{3.5}\right)(-1 \quad 0 \quad 1 \quad 0)\left(\frac{1}{AE}\right)\begin{pmatrix} 29.3929 \\ -307.8249 \\ 48.1019 \\ -474.4071 \end{pmatrix} = 5.34543T\ (Tensión)$$

Elemento 11:

$$q_{11} = \left(\frac{AE}{4}\right)(-1 \quad 0 \quad 1 \quad 0)\left(\frac{1}{AE}\right)\begin{pmatrix} 8.0112 \\ -155.6615 \\ 29.3929 \\ -307.8249 \end{pmatrix} = 5.34543T\ (Tensión)$$

Elemento 12:

$$q_{12} = \left(\frac{AE}{5}\right)(-1 \quad 0 \quad 1 \quad 0)\left(\frac{1}{AE}\right)\begin{pmatrix} 26.0112 \\ -10 \\ 8.0112 \\ -155.6615 \end{pmatrix} = -3.6T\ (Compresión)$$

Elemento 13:

$$q_{13} = \left(\frac{AE}{5}\right)(0 \quad -1 \quad 0 \quad 1)\left(\frac{1}{AE}\right)\begin{pmatrix} -199.0753 \\ 0 \\ 26.0112 \\ -10 \end{pmatrix} = -2T\ (Compresión)$$

Elemento 14:

$$q_{14} = \left(\frac{AE}{7.07107}\right)(-0.70711 \quad -0.70711 \quad 0.70711 \quad 0.70711) *$$

$$\left(\frac{1}{AE}\right)\begin{pmatrix} -119.0753 \\ 0 \\ 8.0112 \\ -155.6615 \end{pmatrix} = 5.14252T\ (Tensión)$$

Elemento 15:

$$q_{15} = \left(\frac{AE}{5}\right)(0 \quad -1 \quad 0 \quad 1)\left(\frac{1}{AE}\right)\begin{pmatrix} -217.257 \\ -155.6615 \\ 8.0112 \\ -155.6615 \end{pmatrix} = 0$$

Elemento 16:

$$q_{16} = \left(\frac{AE}{6.40312}\right)(-0.6247 \quad 0.78087 \quad 0.6247 \quad -0.78087)\left(\frac{1}{AE}\right)\begin{pmatrix} 8.0112 \\ -155.6615 \\ -231.8023 \\ -277.8249 \end{pmatrix}$$

$$= -8.49863T\ (Compresión)$$

Elemento 17:

$$q_{17} = \left(\frac{AE}{5}\right)(0 \quad -1 \quad 0 \quad 1)\left(\frac{1}{AE}\right)\begin{pmatrix}-231.8023\\-277.8249\\29.3929\\-307.8249\end{pmatrix} = -6T\ (Compresión)$$

Elemento 18:

$$q_{18} = \left(\frac{AE}{6.10328}\right)(-0.57346 \quad -0.81923 \quad 0.57346 \quad 0.81923) *$$

$$\left(\frac{1}{AE}\right)\begin{pmatrix}-231.8023\\-277.8249\\48.1019\\-474.4071\end{pmatrix} = -0.087195T\ (Compresión)$$

Elemento 19:

$$q_{19} = \left(\frac{AE}{6.10328}\right)(-0.57346 \quad 0.81923 \quad 0.57346 \quad -0.81923) *$$

$$\left(\frac{1}{AE}\right)\begin{pmatrix}48.1019\\-474.4071\\307.7429\\-284.2143\end{pmatrix} = -1.13348T\ (Compresión)$$

Elemento 20:

$$q_{20} = \left(\frac{AE}{5}\right)(0 \quad -1 \quad 0 \quad 1)\left(\frac{1}{AE}\right)\begin{pmatrix}307.7429\\-284.2143\\68.9108\\-294.2143\end{pmatrix} = -2T\ (Compresión)$$

Elemento 21:

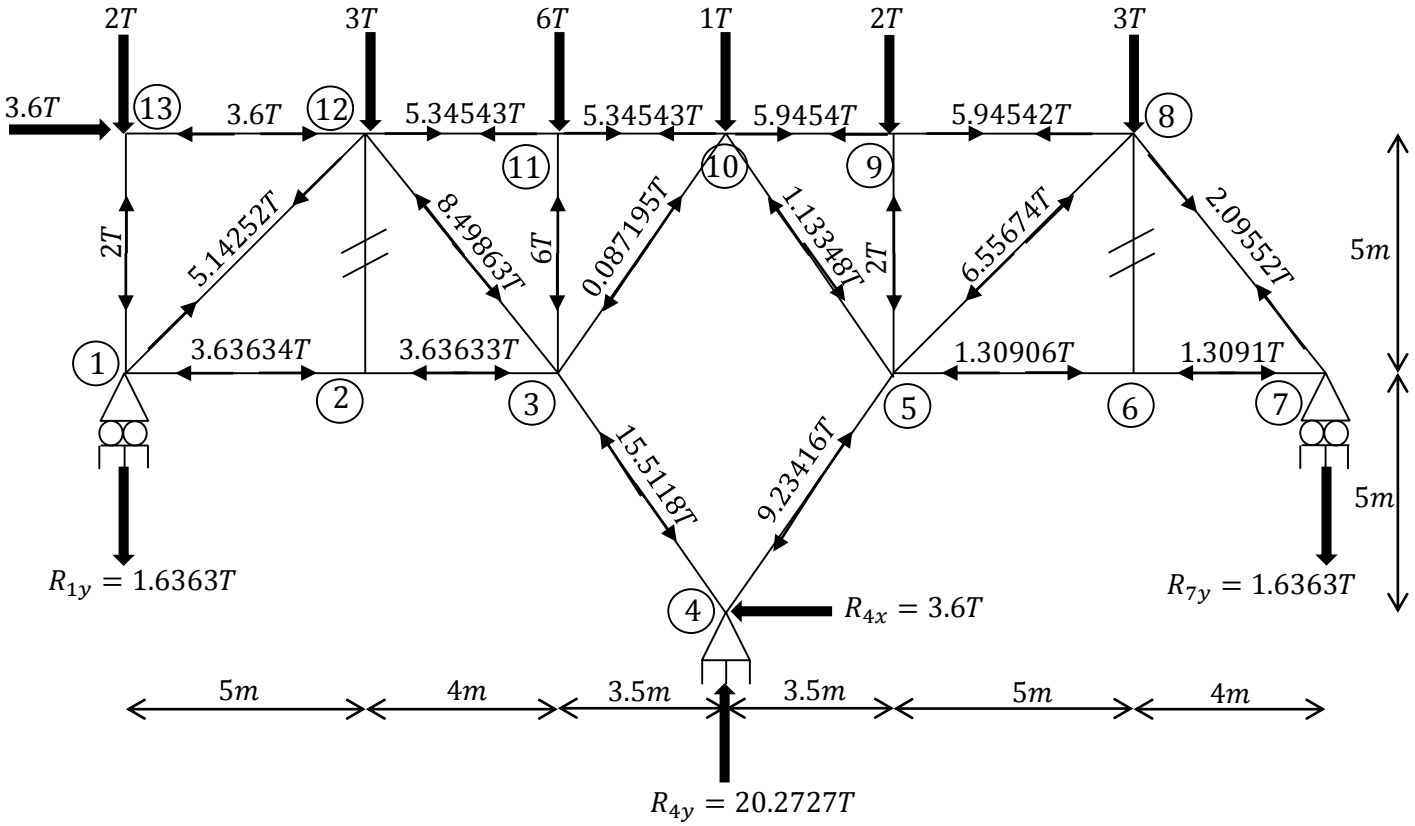
$$q_{21} = \left(\frac{AE}{7.07107}\right) * (-0.70711 \quad -0.70711 \quad 0.70711 \quad 0.70711) *$$

$$\left(\frac{1}{AE}\right)\begin{pmatrix}307.7429\\-284.2143\\98.6379\\-140.6764\end{pmatrix} = -6.55674T\ (Compresión)$$

Elemento 22:

$$q_{22} = \left(\frac{AE}{5}\right)(0 \quad -1 \quad 0 \quad 1)\left(\frac{1}{AE}\right)\begin{pmatrix} 301.1976 \\ -140.6764 \\ 98.6379 \\ -140.6764 \end{pmatrix} = 0$$

Enseguida se presenta en la figura 1-6c el diagrama final de la armadura.



(c)

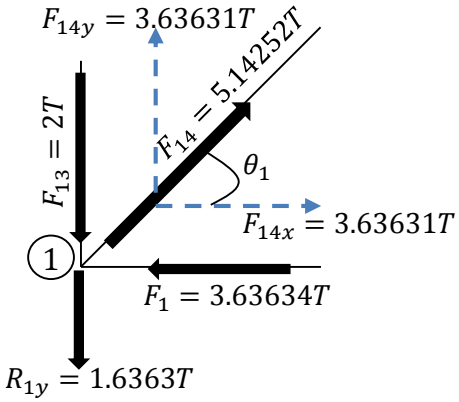
Comprobación del equilibrio en los nodos

Nodo ①, figura 1-6d.

Se calculan las componentes rectangulares de F_{14}.

$$F_{14x} = F_{14}(\sin\theta_1) = 5.14252T\left(\frac{5}{7.07107}\right) = 3.63631T$$

$$F_{14y} = F_{14}(\cos\theta_1) = 5.14252T\left(\frac{5}{7.07107}\right) = 3.63631T$$



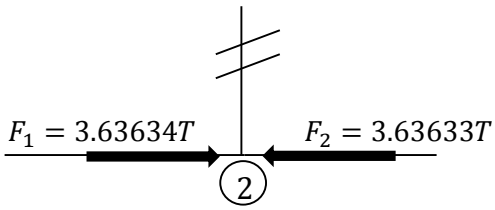
(d)

$$+\rightarrow \sum Fx = -3.63634 + 3.63631 \cong 0 \quad ok$$

$$+\uparrow \sum Fy = -1.6363 - 2 + 3.63631 \cong 0 \quad ok$$

Nodo ②, figura 1-6e.

$$+\rightarrow \sum Fx = 3.63634 - 3.63633 \cong 0 \quad ok$$



(e)

Nodo ③, figura 1-6f.

Se resuelven las fuerzas F_{16}, F_{18} y F_3 en sus componentes x y y respectivamente.

$$F_{16x} = F_{16}(\sin\theta_2) = 8.49863T\left(\frac{4}{6.40312}\right) = 5.30906T$$

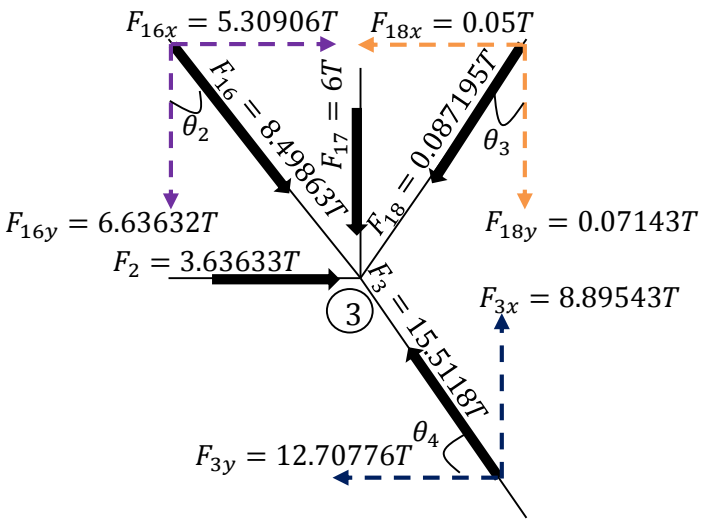
$$F_{16y} = F_{16}(\cos\theta_2) = 8.49863T\left(\frac{5}{6.40312}\right) = 6.63632T$$

$$F_{18x} = F_{18}(\sin\theta_3) = 0.087195T\left(\frac{3.5}{6.10328}\right) = 0.05T$$

$$F_{18y} = F_{18}(\cos\theta_3) = 0.087195T\left(\frac{5}{6.10328}\right) = 0.07143T$$

$$F_{3x} = F_3(\cos\theta_4) = 15.5118T\left(\frac{3.5}{6.10328}\right) = 8.89543T$$

$$F_{3y} = F_3(\sin\theta_4) = 15.5118T\left(\frac{5}{6.10328}\right) = 12.70776T$$



(f)

$$+\uparrow \sum Fy = 12.70776 - 0.07143 - 6 - 6.63632 \cong 0 \quad ok$$

$$+\rightarrow \sum Fx = 3.63633 + 5.30906 - 8.89543 - 0.05 \cong 0 \quad ok$$

Nodo ⑤, figura 1-6g.

Se determinan las componentes horizontal y vertical de F_4, F_{19} y F_{21}.

$$F_{4x} = F_4(\cos\theta_4) = 9.23416T\left(\frac{3.5}{6.10328}\right) = 5.29544T$$

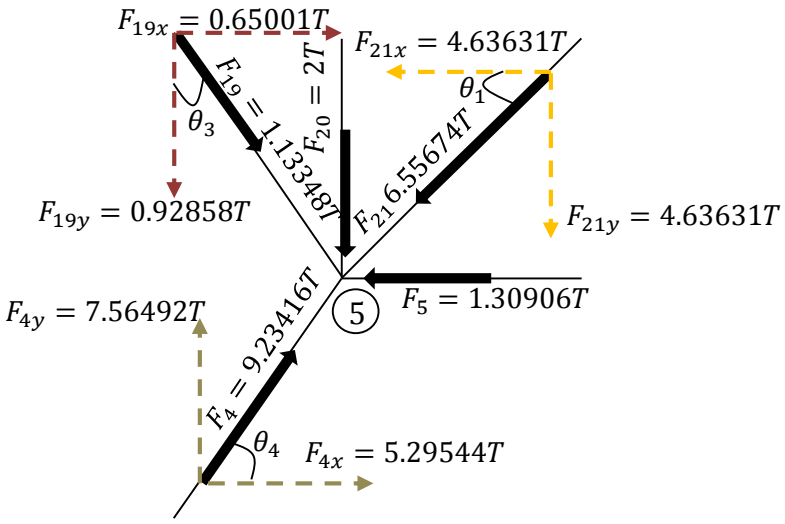
$$F_{4y} = F_4(\sin\theta_4) = 9.23416T\left(\frac{5}{6.10328}\right) = 7.56492T$$

$$F_{19x} = F_{19}(\sin\theta_3) = 1.13348T\left(\frac{3.5}{6.10328}\right) = 0.65001T$$

$$F_{19y} = F_{19}(\cos\theta_3) = 1.13348T\left(\frac{5}{6.10328}\right) = 0.92858T$$

$$F_{21x} = F_{21}(\cos\theta_1) = 6.55674T\left(\frac{5}{7.07107}\right) = 4.63631T$$

$$F_{21y} = F_{21}(\sin\theta_1) = 6.55674T\left(\frac{5}{7.07107}\right) = 4.63631T$$

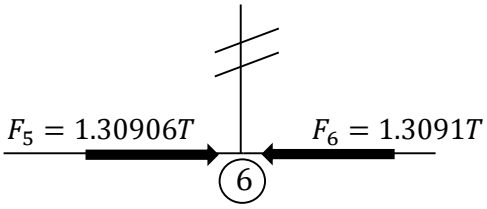


(g)

$$+\uparrow \sum Fy = 7.56492 - 0.92858 - 2 - 4.63631 \cong 0 \quad ok$$

$$+\rightarrow \sum Fx = 5.29544 - 1.30906 - 4.63631 + 0.65001 \cong 0 \quad ok$$

Nodo ⑥, figura 1-6h.



(h)

$$+\rightarrow \sum Fx = 1.30906 - 1.3091 \cong 0 \quad ok$$

Nodo ⑦, figura 1-6i.

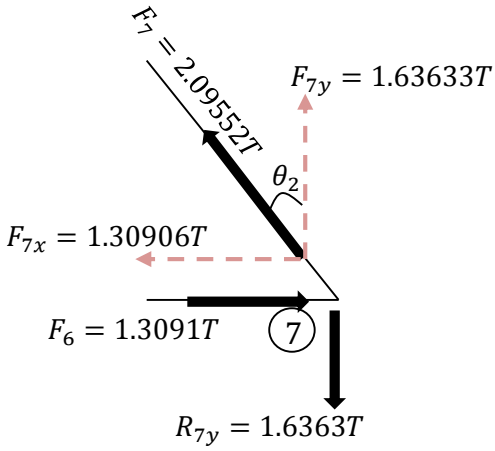
Se descompone la fuerza de F_7 en sus componentes rectangulares.

$$F_{7x} = F_7(\sin\theta_2) = 2.09552T\left(\frac{4}{6.40312}\right) = 1.30906T$$

$$F_{7y} = F_7(\cos\theta_2) = 2.09552T\left(\frac{5}{6.40312}\right) = 1.63633T$$

$$+\uparrow \sum Fy = -1.6363 + 1.63633 \cong 0 \quad ok$$

$$+\rightarrow \sum Fx = -1.30906 + 1.3091 \cong 0 \quad ok$$



(i)

Nodo ⑨, figura 1-6j.

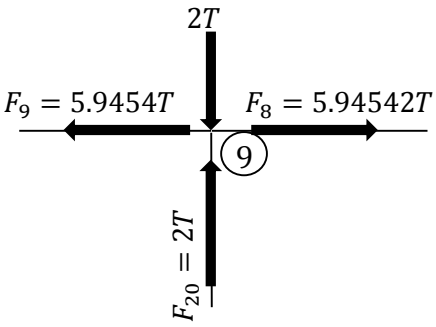
$$+\uparrow \sum Fy = 2 - 2 = 0 \quad ok \qquad +\rightarrow \sum Fx = -5.9454 + 5.94542 \cong 0 \quad ok$$

Nodo ⑪, figura 1-6k.

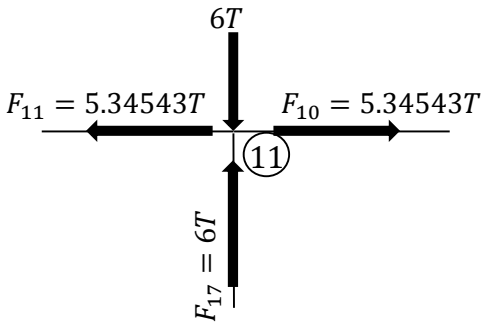
$$+\uparrow \sum Fy = 6 - 6 = 0 \quad ok \qquad +\rightarrow \sum Fx = 5.34543 - 5.34543 \cong 0 \quad ok$$

Nodo ⑬, figura 1-6l.

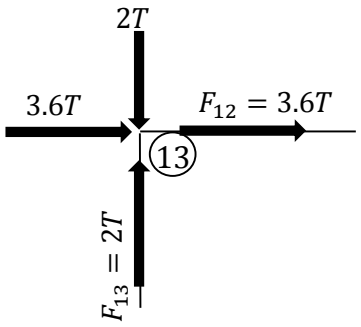
$$+\uparrow \sum Fy = 2 - 2 = 0 \quad ok \qquad +\rightarrow \sum Fx = 3.6 - 3.6 = 0 \quad ok$$



(j)



(k)

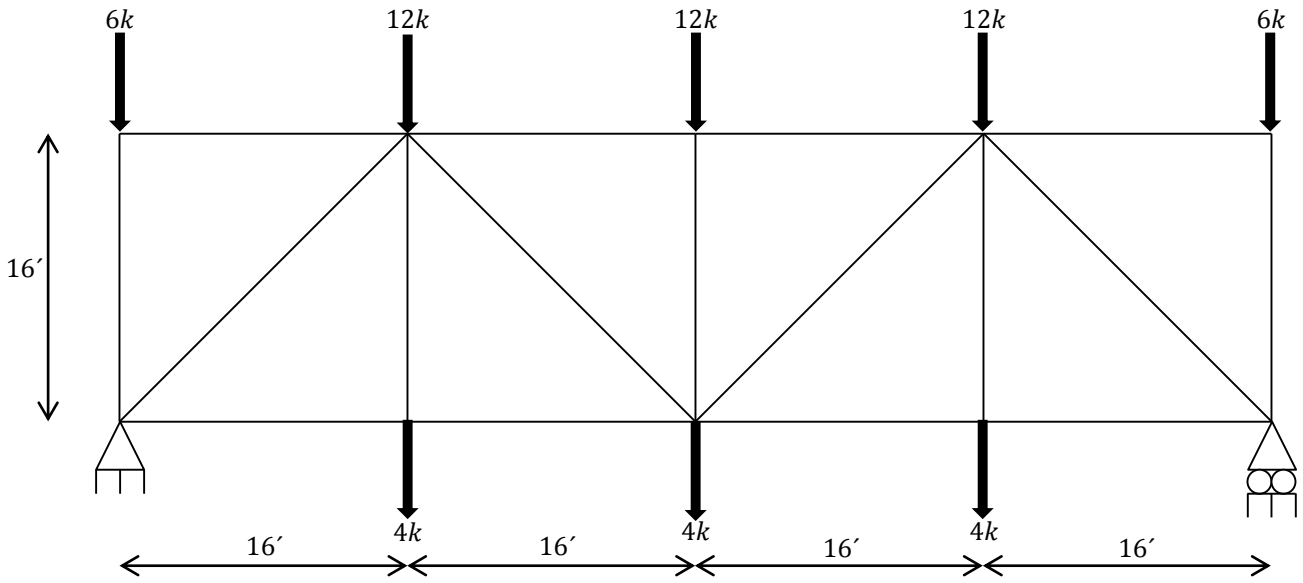


(l)

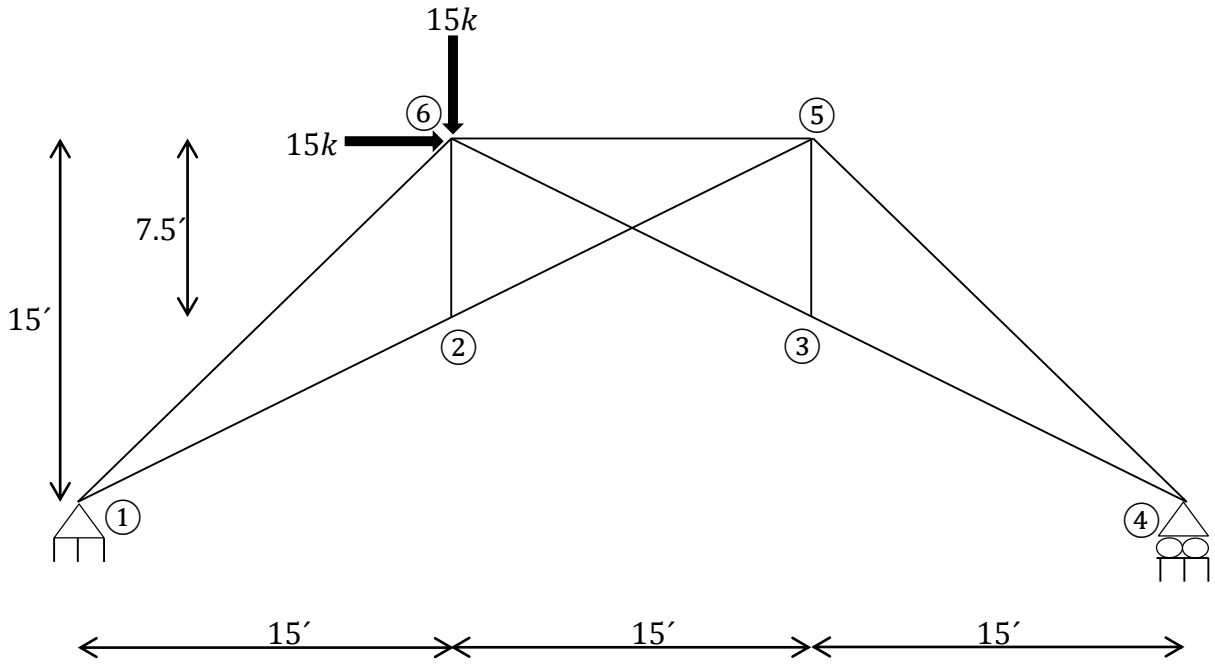
Con lo anterior se demuestra que los resultados obtenidos con el método directo de la rigidez en la armadura son correctos.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1.1 Para las siguientes armaduras isostáticas, determine las reacciones en los soportes y las fuerzas en los elementos. AE es constante.

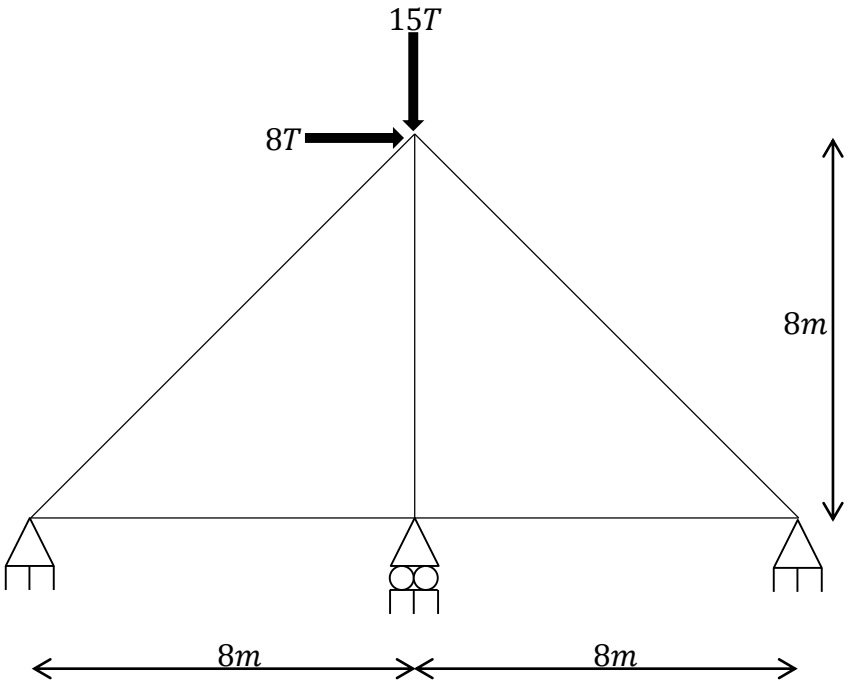


(a)

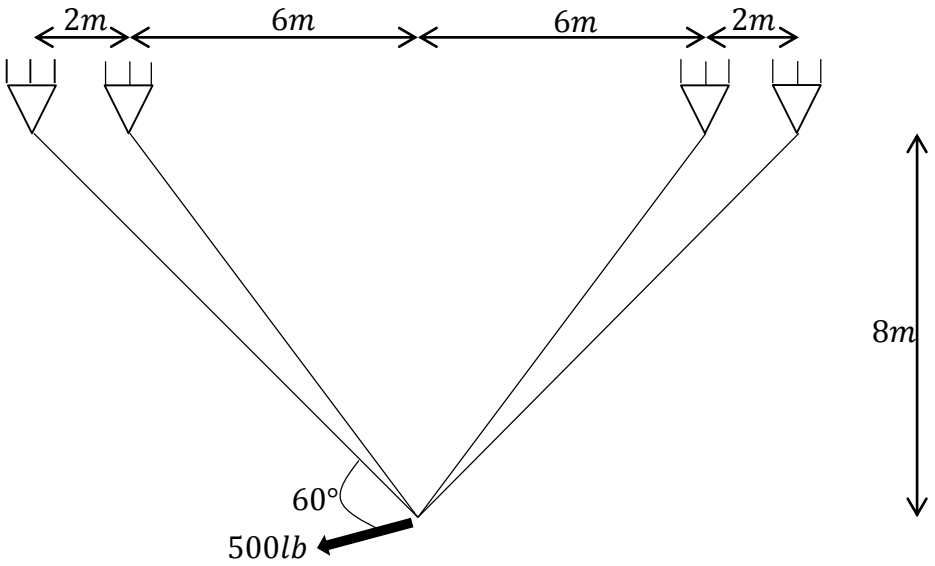


(b)

1.2 Para las siguientes armaduras estáticamente indeterminadas, calcule las fuerzas reactivas de los apoyos y la fuerza en cada elemento. AE es constante. Al final, compruebe el equilibrio en dos nodos cualesquiera por estructura.



(a)

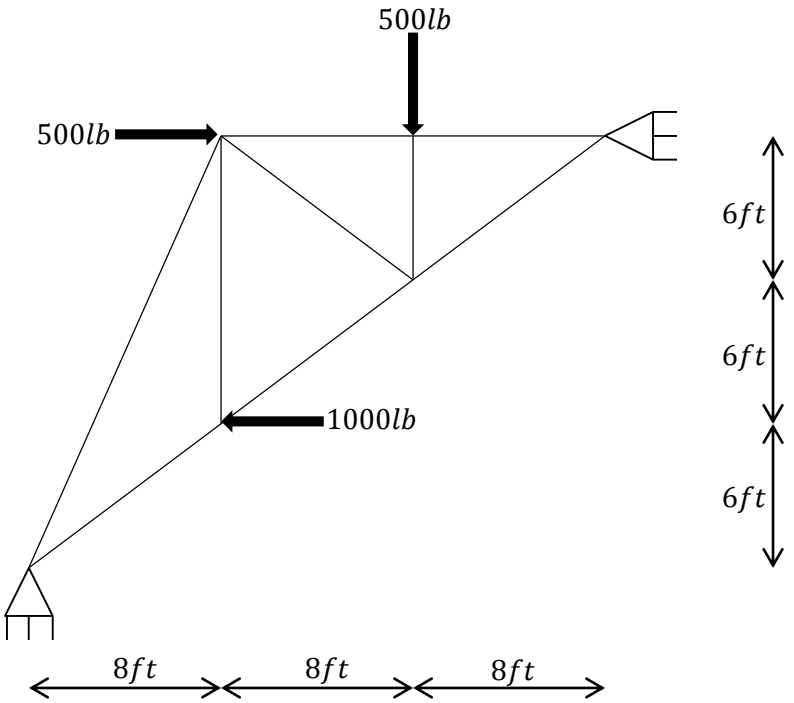


(b)

2

ARMADURAS CON DESPLAZAMIENTO EN ALGUNO O VARIOS DE SUS SOPORTES

EJERCICIO 2.1 La armadura que se observa en la figura 2-1a está sometida a las cargas indicadas. Determine las reacciones en los soportes y la fuerza en cada elemento si el soporte articulado izquierdo inferior se asienta $0.005ft$. Considere que $E = 29(10^6)lb/in^2 = 4176000000lb/ft^2$ y que $A = 0.75in^2 = 0.0052ft^2$.



(a)

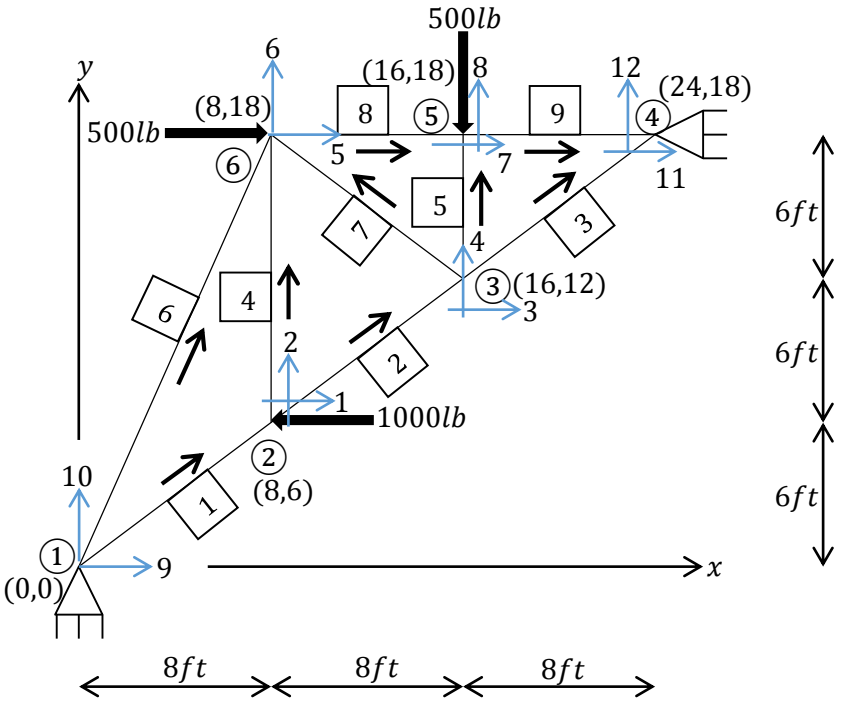
Figura 2-1

SOLUCIÓN

Notación

Se divide la armadura en elementos finitos. Se tienen nueve elementos y seis nodos, los cuales son identificados de forma respectiva por números dentro de un cuadrado

y dentro de un círculo. De los doce grados de libertad, ocho son desconocidos y como siempre se codifican numéricamente en primer lugar. El origen de los ejes globales x y y se asocia en ①, figura 2-1b.



(b)

Cosenos directores y matriz de rigidez global para cada elemento

Se determinan los cosenos directores y la matriz de rigidez en coordenadas globales de los elementos. Para ello, se emplean las ecuaciones $1-2$, $1-3$ y $1-4$.

Elemento 1. Se tiene que ① y ② son los extremos cercano y lejano. Por consiguiente,

$$L=\sqrt{(8ft)^2+(6ft)^2}=10ft \qquad \lambda_x=\frac{8-0}{10}=0.8 \qquad \lambda_y=\frac{6-0}{10}=0.6$$

$$k_1=10^6\begin{matrix}\\ \\ \\ \\ \end{matrix}\begin{matrix}9 & 10 & 1 & 2\end{matrix}\\ \begin{pmatrix} 1.3898 & 1.0423 & -1.3898 & -1.0423 \\ 1.0423 & 0.7817 & -1.0423 & -0.7817 \\ -1.3898 & -1.0423 & 1.3898 & 1.0423 \\ -1.0423 & -0.7817 & 1.0423 & 0.7817 \end{pmatrix}\begin{matrix}9\\10\\1\\2\end{matrix}$$

Elemento 2. Aquí ② es el extremo cercano y ③ es el extremo lejano, de modo que

$$L = 10ft \qquad \lambda_x = \frac{16-8}{10} = 0.8 \qquad \lambda_y = \frac{12-6}{10} = 0.6$$

$$k_2 = 10^6 \begin{pmatrix} 1.3898 & 1.0423 & -1.39898 & -1.0423 \\ 1.0423 & 0.7817 & -1.0423 & -0.7817 \\ -1.3898 & -1.0423 & 1.3898 & 1.0423 \\ -1.0423 & -0.7817 & 1.0423 & 0.7817 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

Elemento 3. Si ③ es el extremo cercano y ④ es el extremo lejano, entonces

$$L = 10ft \qquad \lambda_x = \frac{24-16}{10} = 0.8 \qquad \lambda_y = \frac{18-12}{10} = 0.6$$

$$k_3 = 10^6 \begin{pmatrix} 1.3898 & 1.0423 & -1.39898 & -1.0423 \\ 1.0423 & 0.7817 & -1.0423 & -0.7817 \\ -1.3898 & -1.0423 & 1.3898 & 1.0423 \\ -1.0423 & -0.7817 & 1.0423 & 0.7817 \end{pmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 11 \\ 12 \end{matrix}$$

Elemento 4. Dado que el extremo cercano es ② y el extremo lejano es ⑥, se infiere

$$L = 12ft \qquad \lambda_x = \frac{8-8}{12} = 0 \qquad \lambda_y = \frac{18-6}{12} = 1$$

$$k_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1809600 & 0 & -1809600 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1809600 & 0 & 1809600 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

Elemento 5. Debido a que el extremo cercano es ③ y el extremo lejano es ⑤, se obtiene

$$L = 6ft \qquad \lambda_x = \frac{16-16}{6} = 0 \qquad \lambda_y = \frac{18-12}{6} = 1$$

$$k_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3619200 & 0 & -3619200 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3619200 & 0 & 3619200 \end{pmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 7 \\ 8 \end{matrix}$$

Elemento 6. El extremo cercano es ① y el extremo lejano es ⑥. En consecuencia,

$$L = \sqrt{(8ft)^2 + (18ft)^2} = 19.6977 \qquad \lambda_x = \frac{8-0}{19.6977} = 0.4061$$

$$\lambda_y = \frac{18-0}{19.6977} = 0.9138$$

$$k_6 = 10^5 \begin{pmatrix} 1.8184 & 4.0915 & -1.8184 & -4.0915 \\ 4.0915 & 9.2058 & -4.0915 & -9.2058 \\ -1.8184 & -4.0915 & 1.8184 & 4.0915 \\ -4.0915 & -9.2058 & 4.0915 & 9.2058 \end{pmatrix} \begin{matrix} 9 \\ 10 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

Elemento 7. Se tiene que ③ y ⑥ son los extremos cercano y lejano. Por consiguiente,

$$L = 10ft \qquad \lambda_x = \frac{8-16}{10} = -0.8 \qquad \lambda_y = \frac{18-12}{10} = 0.6$$

$$k_7 = 10^6 \begin{pmatrix} 1.3898 & -1.0423 & -1.3898 & 1.0423 \\ -1.0423 & 0.7817 & 1.0423 & -0.7817 \\ -1.3898 & 1.0423 & 1.3898 & -1.0423 \\ 1.0423 & -0.7817 & -1.0423 & 0.7817 \end{pmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

Elemento 8. Si ⑥ es el extremo cercano y ⑤ es el extremo lejano, entonces

$$L = 8ft \qquad \lambda_x = \frac{16-8}{8} = 1 \qquad \lambda_y = \frac{18-18}{8} = 0$$

$$k_8 = \begin{pmatrix} 2714400 & 0 & -2714400 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2714400 & 0 & 2714400 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix}$$

Elemento 9. Debido a que el extremo cercano es ⑤ y el extremo lejano es ④, se obtiene

$$L = 8ft \qquad \lambda_x = \frac{24-16}{8} = 1 \qquad \lambda_y = \frac{18-18}{8} = 0$$

$$k_9 = \begin{array}{c} \begin{matrix} 7 & 8 & 11 & 12 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2714400 & 0 & -2714400 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2714400 & 0 & 2714400 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 11 \\ 12 \end{matrix} \end{array}$$

Matriz de rigidez de la estructura

Si se ensamblan las nueve matrices anteriores, entonces se obtiene la matriz de rigidez K para la armadura. Al efectuar una partición en ella de tal modo que sea compatible con las particiones de D y C, se originan las siguientes submatrices:

Submatriz K_{11}:

$$K_{11} = 10^6 \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2.7795 & 2.0847 & -1.3898 & -1.0423 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2.0847 & 3.3731 & -1.0423 & -0.7817 & 0 & -1.8096 & 0 & 0 \\ -1.3898 & -1.0423 & 4.1693 & 1.0423 & -1.3898 & 1.0423 & 0 & 0 \\ -1.0423 & -0.7817 & 1.0423 & 5.9644 & 1.0423 & -0.7817 & 0 & -3.6192 \\ 0 & 0 & -1.3898 & 1.0423 & 4.2860 & -0.6332 & -2.7144 & 0 \\ 0 & -1.8096 & 1.0423 & -0.7817 & -0.6332 & 3.5119 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2.7144 & 0 & 5.4288 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3.6192 & 0 & 0 & 0 & 3.6192 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} \end{array}$$

Submatriz K_{12}:

$$K_{12} = 10^6 \begin{array}{c} \begin{matrix} 9 & 10 & 11 & 12 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} -1.3898 & -1.0423 & 0 & 0 \\ 1.0423 & -0.7817 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.3898 & -1.0423 \\ 0 & 0 & -1.0423 & -0.7817 \\ -0.1818 & -0.4091 & 0 & 0 \\ -0.4091 & -0.9206 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2.7144 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} \end{array}$$

Submatriz K_{21}:

$$K_{21} = 10^6 \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} -1.3898 & -1.0423 & 0 & 0 & -0.1818 & -0.4091 & 0 & 0 \\ -1.0423 & -0.7817 & 0 & 0 & -0.4091 & -0.9206 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.3898 & -1.0423 & 0 & 0 & -2.7144 & 0 \\ 0 & 0 & -1.0423 & -0.7817 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix} \end{array}$$

Submatriz K_{22}:

$$K_{22} = 10^6 \begin{matrix} \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} 9 & 10 & 11 & 12 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1.5716 & 1.4515 & 0 & 0 \\ 1.4515 & 1.7023 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4.1042 & 1.0423 \\ 0 & 0 & 1.0423 & 0.7817 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Vectores de desplazamientos y de cargas

El soporte articulado ④ impide los desplazamientos 11 y 12. Aunque en teoría el apoyo articulado ① no permite la deflexión en ese nodo codificada como 10, hay un desplazamiento impuesto de $0.005ft$, el cual aparece en el vector D con magnitud negativa porque se presenta en la dirección y negativa, es decir, hacia abajo, ya que se trata de un asentamiento; luego es obvio que el desplazamiento 9 es inexistente por la presencia del segundo soporte mencionado. Entonces, el vector total de desplazamientos es

$$D = \begin{pmatrix} D_D \\ \hline D_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \\ \hline D_9 \\ D_{10} \\ D_{11} \\ D_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_{H2} \\ \delta_{V2} \\ \Delta_{H3} \\ \delta_{V3} \\ \Delta_{H6} \\ \delta_{V6} \\ \Delta_{H5} \\ \delta_{V5} \\ \hline 0 \\ -0.005 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix}$$

Por otra parte, el vector total de cargas es

$$C = \begin{pmatrix} C_C \\ \hline C_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \\ C_8 \\ \hline C_9 \\ C_{10} \\ C_{11} \\ C_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 500 \\ 0 \\ 0 \\ -500 \\ \hline R_{1x} \\ R_{1y} \\ R_{4x} \\ R_{4y} \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix}$$

Cálculo de los desplazamientos incógnita y las reacciones en los soportes

De $C = KD$ (ecuación $1-8$), se extraen y se resuelven dos subsistemas con la finalidad de determinar primero los desplazamientos incógnita y posteriormente las reacciones incógnita.

Retomando la ecuación $1-10$, el primer subsistema es

$$C_C = K_{11}D_D + K_{12}D_C$$

Como esta vez el vector D_C es diferente de cero dado que alguno de los soportes se desplaza, el despeje de los desplazamientos desconocidos es

$$D_D = {K_{11}}^{-1}(C_C - K_{12}D_C) \qquad (2-1)$$

De acuerdo a la ecuación $1-11$, el segundo subsistema es

$$C_D = K_{21}D_D + K_{22}D_C$$

De esta ecuación se obtienen las fuerzas reactivas de los apoyos.

Al escribir y resolver la ecuación $2-1$ para la armadura de la figura 2-1b, resulta

$$\begin{pmatrix}\Delta_{H2}\\ \delta_{V2}\\ \Delta_{H3}\\ \delta_{V3}\\ \Delta_{H6}\\ \delta_{V6}\\ \Delta_{H5}\\ \delta_{V5}\end{pmatrix} = \frac{1}{10^6}\begin{pmatrix} 2.7795 & 2.0847 & -1.3898 & -1.0423 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 2.0847 & 3.3731 & -1.0423 & -0.7817 & 0 & -1.8096 & 0 & 0\\ -1.3898 & -1.0423 & 4.1693 & 1.0423 & -1.3898 & 1.0423 & 0 & 0\\ -1.0423 & -0.7817 & 1.0423 & 5.9644 & 1.0423 & -0.7817 & 0 & -3.6192\\ 0 & 0 & -1.3898 & 1.0423 & 4.2860 & -0.6332 & -2.7144 & 0\\ 0 & -1.8096 & 1.0423 & -0.7817 & -0.6332 & 3.5119 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2.7144 & 0 & 5.4288 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -3.6192 & 0 & 0 & 0 & 3.6192\end{pmatrix}^{-1} *$$

$$\left[\begin{pmatrix}-1000\\0\\0\\0\\500\\0\\0\\-500\end{pmatrix} - 10^6\begin{pmatrix}-1.3898 & -1.0423 & 0 & 0\\ 1.0423 & -0.7817 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1.3898 & -1.0423\\ 0 & 0 & -1.0423 & -0.7817\\ -0.1818 & -0.4091 & 0 & 0\\ -0.4091 & -0.9206 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2.7144 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-0.005\\0\\0\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}0.000122ft\\-0.004243ft\\0.001267ft\\-0.003888ft\\0.000450ft\\-0.004657ft\\0.000225ft\\-0.004027ft\end{pmatrix}$$

Se planeta la ecuación $1-11$ para este caso particular. Al usar los resultados recién obtenidos y simplificar se tiene

$$\begin{pmatrix}R_{1x}\\R_{1y}\\R_{4x}\\R_{4y}\end{pmatrix} = 10^6\begin{pmatrix}-1.3898 & -1.0423 & 0 & 0 & -0.1818 & -0.4091 & 0 & 0\\ -1.0423 & -0.7817 & 0 & 0 & -0.4091 & -0.9206 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1.3898 & -1.0423 & 0 & 0 & -2.7144 & 0\\ 0 & 0 & -1.0423 & -0.7817 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.000122\\-0.004243\\0.001267\\-0.003888\\0.000450\\-0.004657\\0.000225\\-0.004027\end{pmatrix}$$

$$+10^6\begin{pmatrix}1.5716 & 1.4515 & 0 & 0\\ 1.4515 & 1.7023 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4.1042 & 1.0423\\ 0 & 0 & 1.0423 & 0.7817\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ -0.005\\ 0\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1181.6604lb\\ -1219.9579lb\\ 1681.6604lb\\ 1719.9579lb\end{pmatrix}$$

Es decir, la magnitud, dirección y sentido de las reacciones en los soportes son

$R_{1x} = 1181.6604lb \leftarrow$ $R_{1y} = 1219.9579lb \downarrow$ $R_{4x} = 1681.6604lb \rightarrow$

$R_{4y} = 1719.9579lb \uparrow$

Cálculo de las fuerzas en los elementos

Con base en la ecuación $1 - 15$, se calcula la fuerza de cada elemento.

Elemento 1:

$$q_1 = \left(\frac{(0.0052)(4176000000)}{10}\right)(-0.8 \quad -0.6 \quad 0.8 \quad 0.6)\begin{pmatrix}0\\ -0.005\\ 0.000122\\ -0.004243\end{pmatrix}$$

$$= 1199.2978lb\ (Tensión)$$

Elemento 2:

$$q_2 = \left(\frac{(0.0052)(4176000000)}{10}\right)(-0.8 \quad -0.6 \quad 0.8 \quad 0.6)\begin{pmatrix}0.000122\\ -0.004243\\ 0.001267\\ -0.003888\end{pmatrix}$$

$$= 2449.2978lb\ (Tensión)$$

Elemento 3:

$$q_3 = \left(\frac{(0.0052)(4176000000)}{10}\right)(-0.8 \quad -0.6 \quad 0.8 \quad 0.6)\begin{pmatrix}0.001267\\ -0.003888\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$= 2865.9644lb\ (Tensión)$$

Elemento 4:

$$q_4 = \left(\frac{(0.0052)(4176000000)}{12}\right)(0 \quad -1 \quad 0 \quad 1)\begin{pmatrix}0.000122\\ -0.004243\\ 0.000450\\ -0.004657\end{pmatrix}$$

$$= -750lb\ (Compresión)$$

Elemento 5:

$$q_5 = \left(\frac{(0.0052)(4176000000)}{6}\right)(0 \quad -1 \quad 0 \quad 1)\begin{pmatrix} 0.001267 \\ -0.003888 \\ 0.000225 \\ -0.004027 \end{pmatrix}$$

$$= -500lb\ (Compresión)$$

Elemento 6:

$$q_6 = \left(\frac{(0.0052)(4176000000)}{19.6977}\right)(-0.4061 \quad -0.9138 \quad 0.4061 \quad 0.9138)\begin{pmatrix} 0 \\ -0.005 \\ 0.000450 \\ -0.004657 \end{pmatrix}$$

$$= 547.1588lb\ (Tensión)$$

Elemento 7:

$$q_7 = \left(\frac{(0.0052)(4176000000)}{10}\right)(0.8 \quad -0.6 \quad -0.8 \quad 0.6)\begin{pmatrix} 0.001267 \\ -0.003888 \\ 0.000450 \\ -0.004657 \end{pmatrix}$$

$$= 416.6667lb\ (Tensión)$$

Elemento 8:

$$q_8 = \left(\frac{(0.0052)(4176000000)}{8}\right)(-1 \quad 0 \quad 1 \quad 0)\begin{pmatrix} 0.000450 \\ -0.004657 \\ 0.000225 \\ -0.004027 \end{pmatrix}$$

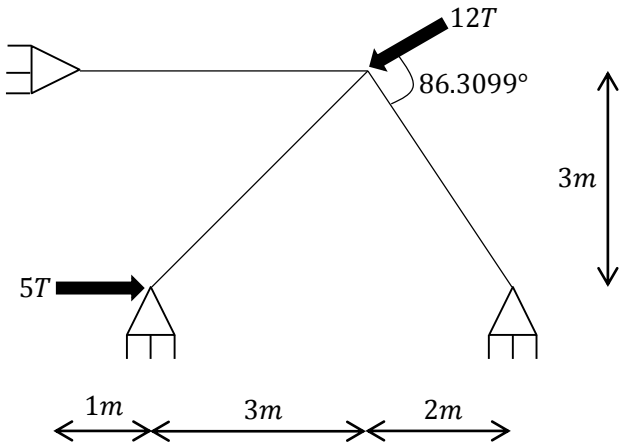
$$= -611.1111lb\ (Compresión)$$

Elemento 9:

$$q_9 = \left(\frac{(0.0052)(4176000000)}{8}\right)(-1 \quad 0 \quad 1 \quad 0)\begin{pmatrix} 0.000225 \\ -0.004027 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= -611.1111lb\ (Compresión)$$

EJERCICIO 2.2 Determine las reacciones en los soportes y la fuerza en cada uno de los tres elementos que componen la armadura que se visualiza en la figura 2-2a. Considere de forma respectiva un asentamiento en los apoyos articulados inferiores izquierdo y derecho de $0.2cm = 0.002m$ y de $0.3cm = 0.003m$. $AE = 1.89 * 10^6\ T$.

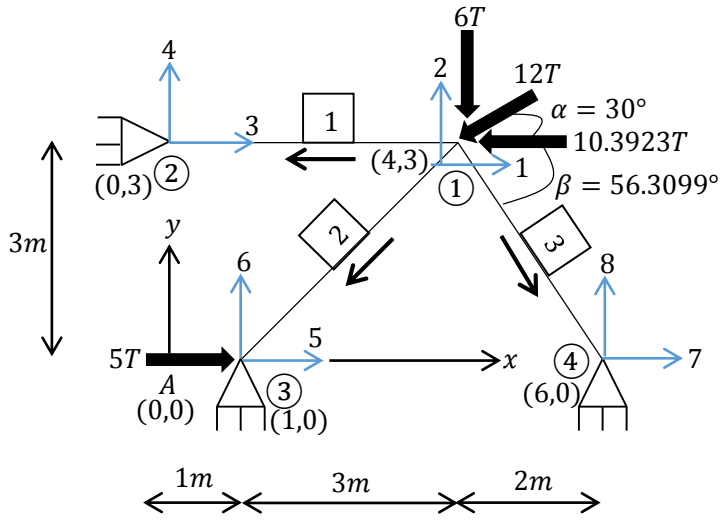


(a)

Figura 2-2

SOLUCIÓN

Notación



(b)

El origen de las coordenadas globales se propone en el punto A por mayor comodidad, figura 2-2b. Cuatro nodos han sido identificados y ocho grados de libertad se han designado en la armadura. Las únicas componentes de

desplazamiento desconocidas son las del nodo ①, de ahí en fuera, todas las demás son conocidas.

Cosenos directores y matriz de rigidez global para cada elemento

Al aplicar las ecuaciones $1-2$, $1-3$ y $1-4$, se obtienen los siguientes resultados:

Elemento 1. El extremo cercano es ① y el extremo lejano es ②. En consecuencia,

$$L = 4m \qquad \lambda_x = \frac{0-4}{4} = -1 \qquad \lambda_y = \frac{3-3}{4} = 0$$

$$k_1 = AE \begin{pmatrix} 0.2500 & 0 & -0.2500 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.2500 & 0 & 0.2500 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix}$$

Elemento 2. Los extremos cercano y lejano son ① y ③, así que

$$L = \sqrt{(3m)^2 + (3m)^2} = 4.2426m$$

$$\lambda_x = \frac{1-4}{4.2426} = -0.7071 \qquad \lambda_y = \frac{0-3}{4.2426} = -0.7071$$

$$k_2 = AE \begin{pmatrix} 0.1179 & 0.1179 & -0.1179 & -0.1179 \\ 0.1179 & 0.1179 & -0.1179 & -0.1179 \\ -0.1179 & -0.1179 & 0.1179 & 0.1179 \\ -0.1179 & -0.1179 & 0.1179 & 0.1179 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 2 & 5 & 6 \end{matrix}$$

Elemento 3. Si ① y ④ corresponden a los extremos cercano y lejano, entonces

$$L = \sqrt{(2m)^2 + (3m)^2} = 3.6056m$$

$$\lambda_x = \frac{6-4}{3.6056} = 0.5547 \qquad \lambda_y = \frac{0-3}{3.6056} = -0.8321$$

$$k_3 = AE \begin{pmatrix} 0.0853 & -0.1280 & -0.0833 & 0.1280 \\ -0.1280 & 0.1920 & 0 & -0.1920 \\ -0.0853 & 0.1280 & 0.0833 & -0.1280 \\ 0.1280 & -0.1920 & -0.1280 & 0.1920 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 2 & 7 & 8 \end{matrix}$$

Matriz de rigidez de la estructura

Al ensamblar las tres matrices anteriores, la matriz de rigidez con un orden de $8\,X\,8$ es

$$K = AE \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccccccc} 0.4532 & -0.0102 & -0.2500 & 0 & -0.1179 & -0.1179 & -0.0853 & 0.1280 \\ -0.0102 & 0.3099 & 0 & 0 & -0.1179 & -0.1179 & 0.1280 & -0.1920 \\ -0.2500 & 0 & 0.2500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1179 & -0.1179 & 0 & 0 & 0.1179 & 0.1179 & 0 & 0 \\ -0.1179 & -0.1179 & 0 & 0 & 0.1179 & 0.1179 & 0 & 0 \\ -0.0853 & 0.1280 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0853 & -0.1280 \\ 0.1280 & -0.1920 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1280 & 0.1920 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array}$$

Vectores de desplazamientos y de cargas

Los grados de libertad codificados con 1 y 2 representan los desplazamientos horizontal y vertical del nodo ①. Por imposición, los desplazamientos 6 y 8 tiene un valor de $-0.002m$ y $-0.003m$. Así mismo, los apoyos articulados ②, ③ y ④ impiden los desplazamientos con códigos $3, 4, 5$ y 7. Entonces, la matriz total de desplazamientos es

$$D = \begin{pmatrix} D_D \\ \hline D_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \hline D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_{H1} \\ \delta_{V1} \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.002 \\ 0 \\ -0.003 \end{pmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array}$$

A continuación se construye el vector total de cargas externas. La carga de $12T$ que actúa en ⑤ ha sido descompuesta en sus componentes rectangulares para los ejes x, y puesto que en ese nodo se tienen números de código de grados de libertad en tales direcciones, figura 2-2b. Como $\beta = \tan^{-1}(3/2) = 56.3099°$ y $\alpha = 86.3099° - 56.3099° = 30°$, entonces las componentes horizontal y vertical de la fuerza citada son resultado de $(12T)(\cos 30°) = 10.3923T$ y $(12T)(\sin 30°) = 6T$; estas dos fuerzas aparecen con una magnitud negativa en el vector porque ocurren en las direcciones x negativa y y negativa. En las demás direcciones de código se presentan las reacciones en los soportes. Obsérvese que puesto que en la dirección 5 hay una carga de $5T$ y además se genera la reacción en x del soporte ③, entonces la carga en 5 es igual a la suma de ambas fuerzas. Por consiguiente,

$$C = \begin{pmatrix} C_C \\ \hline C_D \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c} C_1 \\ C_2 \\ \hline C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \\ C_8 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} -10.3923 \\ -6 \\ \hline R_{2x} \\ R_{2y} \\ R_{3x}+5 \\ R_{3y} \\ R_{4x} \\ R_{4y} \end{array}\right) \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix}$$

Cálculo de los desplazamientos incógnita y las reacciones en los soportes

Para la armadura de este ejercicio, $C = KD$ resulta en

$$\begin{pmatrix} -10.3923 \\ -6 \\ \hline R_{2x} \\ R_{2y} \\ R_{3x}+5 \\ R_{3y} \\ R_{4x} \\ R_{4y} \end{pmatrix} = AE \left(\begin{array}{cc|cccccc} 0.4532 & -0.0102 & -0.2500 & 0 & -0.1179 & -0.1179 & -0.0853 & 0.1280 \\ -0.0102 & 0.3099 & 0 & 0 & -0.1179 & -0.1179 & 0.1280 & -0.1920 \\ \hline -0.2500 & 0 & 0.2500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1179 & -0.1179 & 0 & 0 & 0.1179 & 0.1179 & 0 & 0 \\ -0.1179 & -0.1179 & 0 & 0 & 0.1179 & 0.1179 & 0 & 0 \\ -0.0853 & 0.1280 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0853 & -0.1280 \\ 0.1280 & -0.1920 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1280 & 0.1920 \end{array}\right) \begin{pmatrix} \Delta_{H1} \\ \delta_{V1} \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.002 \\ 0 \\ -0.003 \end{pmatrix}$$

Se calculan los desplazamientos desconocidos con base en la ecuación $2-1$.

$$\begin{pmatrix} \Delta_{H1} \\ \delta_{V1} \end{pmatrix} = \frac{1}{AE} \begin{pmatrix} 0.4532 & -0.0102 \\ -0.0102 & 0.3099 \end{pmatrix}^{-1} \left[\begin{pmatrix} -10.3923 \\ -6 \end{pmatrix} - AE \begin{pmatrix} -0.2500 & 0 & -0.1179 & -0.1179 & -0.0853 & 0.1280 \\ 0 & 0 & -0.1179 & -0.1179 & 0.1280 & -0.1920 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.002 \\ 0 \\ -0.003 \end{pmatrix} \right]$$

Si se sustituye $AE = 1.89 * 10^6\ T$ y se efectúan las operaciones matriciales indicadas, se tiene

$$\begin{pmatrix} \Delta_{H1} \\ \delta_{V1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0002564m \\ -0.0026215m \end{pmatrix}$$

Las reacciones en los soportes se obtienen a partir de la ecuación $1-11$.

$$\begin{pmatrix} R_{2x} \\ R_{2y} \\ R_{3x}+5 \\ R_{3y} \\ R_{4x} \\ R_{4y} \end{pmatrix} = AE \begin{pmatrix} -0.25 & 0 \\ 0 & 0 \\ -0.1179 & -0.1179 \\ -0.01179 & -0.1179 \\ -0.0853 & 0.128 \\ 0.128 & -0.192 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.0002564 \\ -0.0026215 \end{pmatrix} + AE \begin{pmatrix} 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1179 & 0.1179 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1179 & 0.1179 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0853 & -0.128 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.128 & 0.192 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.002 \\ 0 \\ -0.003 \end{pmatrix}$$

Nuevamente con $AE = 1.89 * 10^6$ y además simplificando, resulta

$$\begin{pmatrix} R_{2x} \\ R_{2y} \\ R_{3x} \\ R_{3y} \\ R_{4x} \\ R_{4y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -121.1479T \\ 0 \\ 76.3241T \\ 81.3241T \\ 50.2161T \\ -75.3241T \end{pmatrix}$$

Lo cual indica que

$R_{2x} = 121.1479T \leftarrow$ $\quad R_{2y} = 0$ $\quad R_{3x} = 76.3241T \rightarrow$ $\quad R_{3y} = 81.3241T \uparrow$

$R_{4x} = 50.2161T \rightarrow$ $\quad R_{4y} = 75.3241T \downarrow$

Cálculo de las fuerzas en los elementos

A través de la ecuación $1 - 15$, se conoce el valor de la fuerza en cada elemento.

Elemento 1:

$$q_1 = \left(\frac{1.89 * 10^6}{4}\right)(1 \quad 0 \quad -1 \quad 0)\begin{pmatrix} 0.0002564 \\ -0.0026215 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 121.1479T\ (Tensión)$$

Elemento 2:

$$q_2 = \left(\frac{1.89 * 10^6}{4.2426}\right)(0.7071 \quad 0.7071 \quad -0.7071 \quad -0.7071)\begin{pmatrix} 0.0002564 \\ -0.0026215 \\ 0 \\ -0.002 \end{pmatrix}$$

$$= -115.0097\ (Compresión)$$

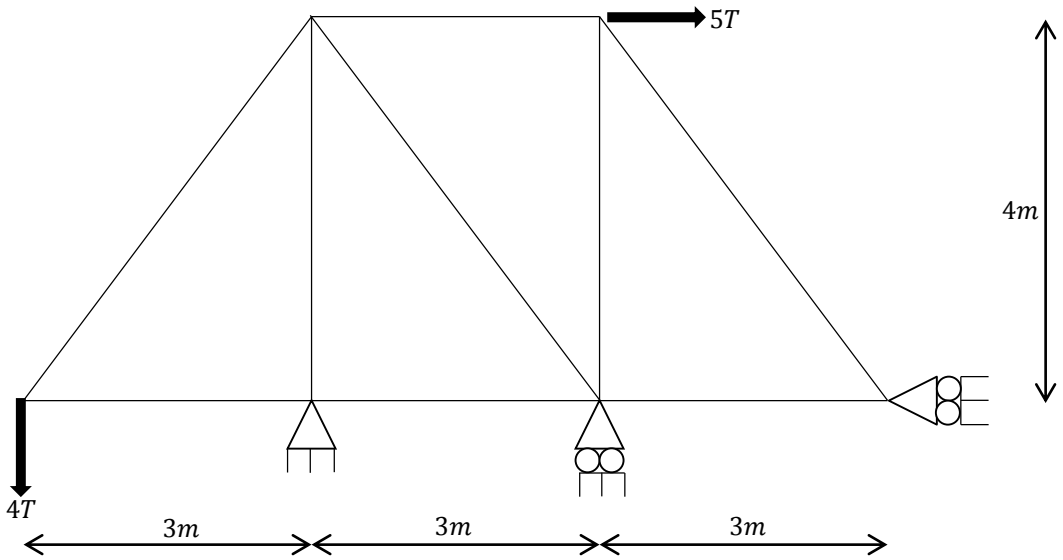
Elemento 3:

$$q_2 = \left(\frac{1.89 * 10^6}{3.6056}\right)(-0.5547 \quad 0.8321 \quad 0.5547 \quad -0.8321)\begin{pmatrix} 0.0002564 \\ -0.0026215 \\ 0 \\ -0.003 \end{pmatrix}$$

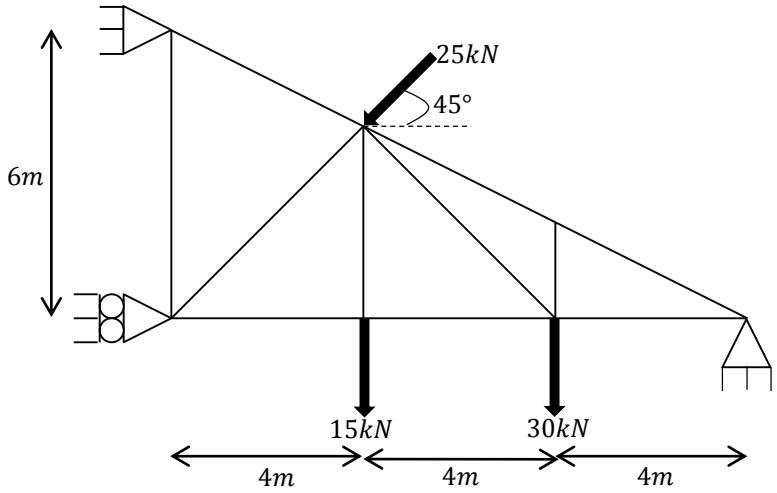
$$= 90.5283\ (Tensión)$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

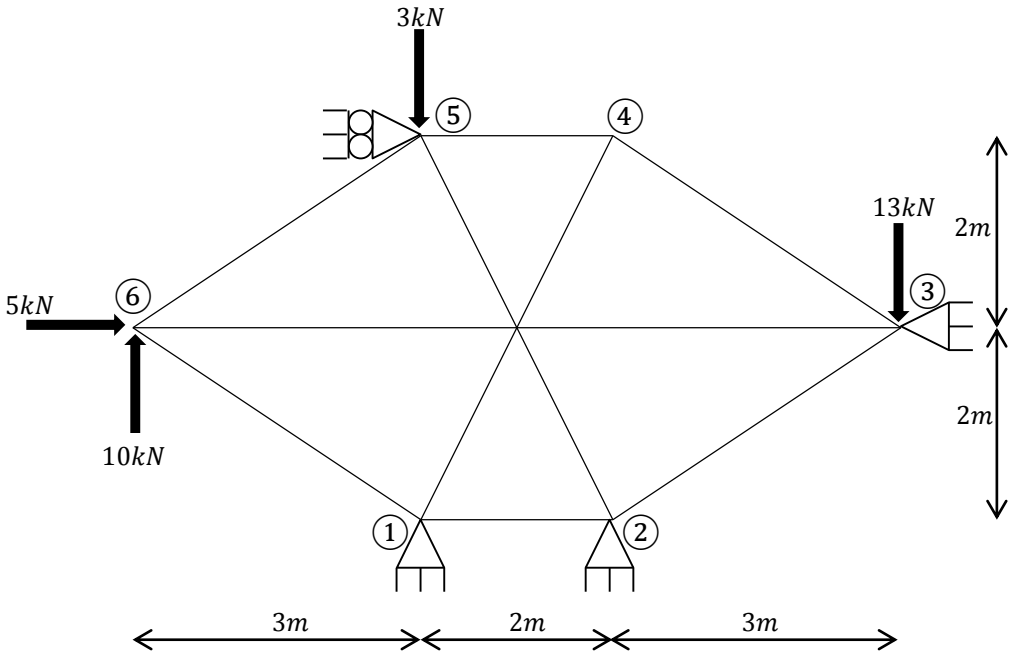
2.1 Determine las reacciones en los soportes y las fuerzas en cada elemento de la siguiente armadura. Figúrese para todas las barras una sección transversal cuadrada de $10cm$ por lado y un Módulo de Elasticidad de $E = 2.1 * 10^7 \frac{T}{m^2}$ que corresponde al del acero. Suponga un asentamiento de $1cm$ en el apoyo articulado.



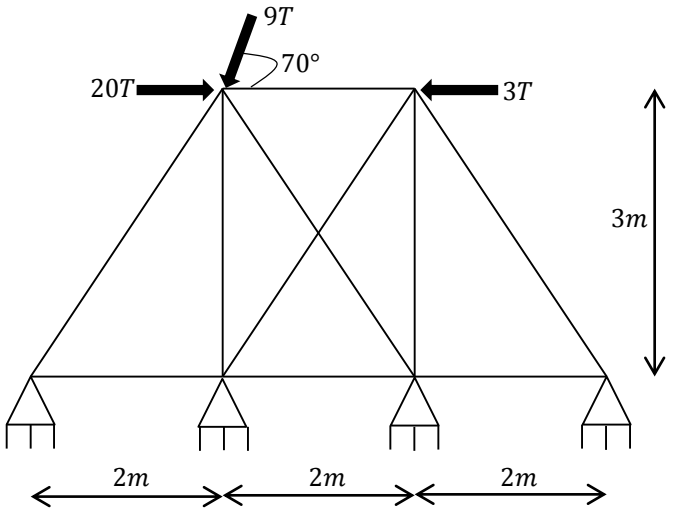
2.2 La armadura que se observa en la figura más próxima está sometida a las cargas indicadas. Calcule las reacciones en los apoyos y la fuerza en cada elemento si los soportes articulados derecho inferior e izquierdo superior se asientan de forma respectiva $0.70cm$ y el $1.5cm$. Considere $AE = 8(10^3 kN)$.



2.3 La armadura que se visualiza en la figura más próxima soporta las cargas indicadas. Determine las reacciones en los apoyos y la fuerza en cada elemento si los soportes articulados ① y ② se asientan $2.5cm$. Suponga $AE = 8(10^3 kN)$. Para evitar confusiones sobre los nodos, estos han sido identificados con un código de número dentro de un círculo.



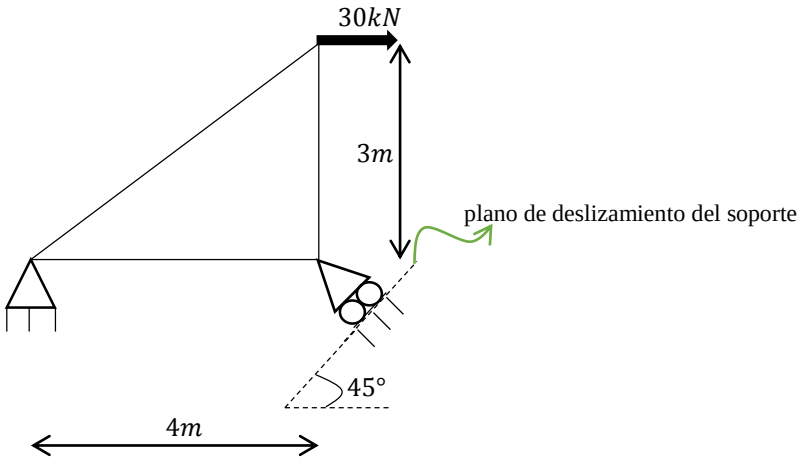
2.4 Calcule las reacciones en los soportes y la fuerza en cada elemento de la siguiente armadura. Considere un asentamiento de $50mm$ en cada apoyo articulado. Suponga que $A = 0.9m^2$ y $E = 2.1 * 10^6 \frac{T}{m^2}$. Al último, demuestre el equilibrio en cada nodo.



3

ARMADURAS CON UN RODILLO EN UN PLANO INCLINADO

EJERCICIO 3.1 Use el análisis matricial de la rigidez para determinar las reacciones en los soportes y las fuerzas internas de la armadura que se muestra en la figura 3-1a cuyo apoyo simple tiene un plano de deslizamiento inclinado a 45° respecto a la horizontal. Considere AE como constante.



(a)

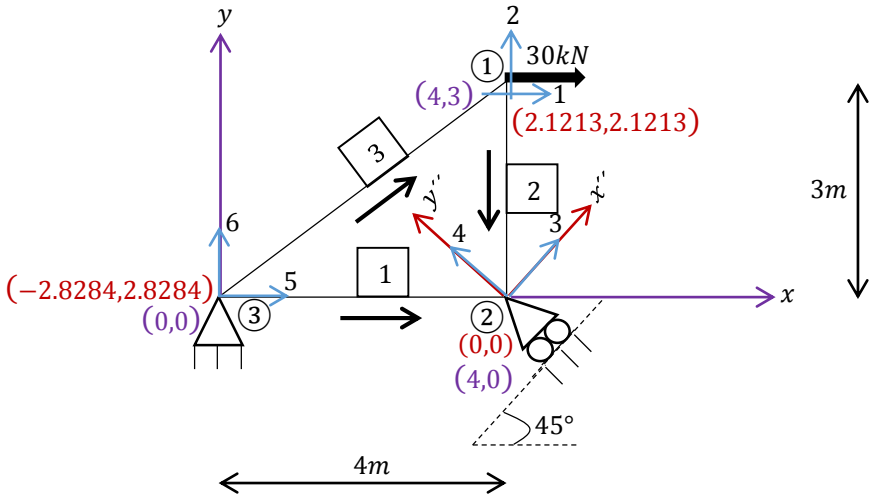
Figura 3-1

SOLUCIÓN

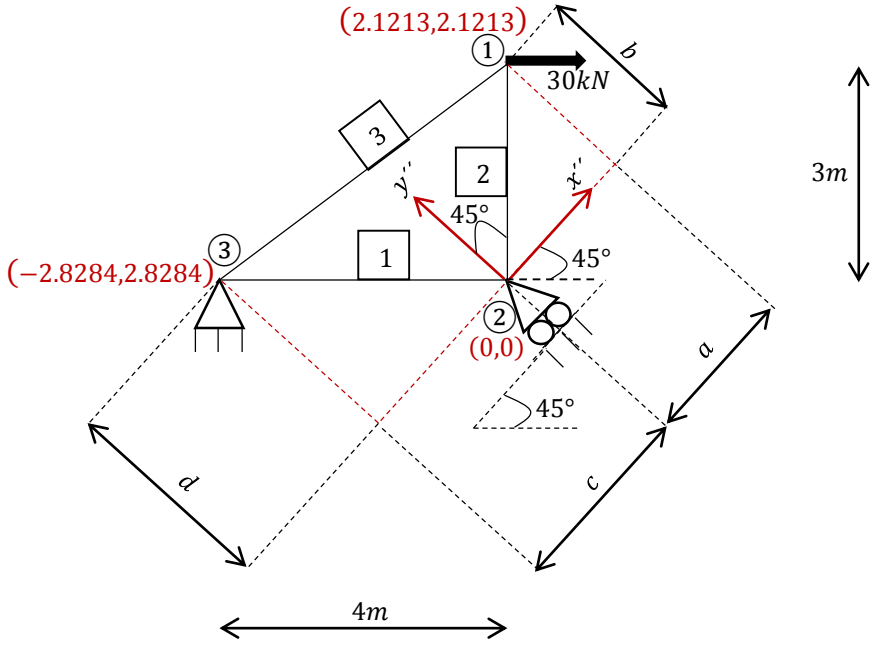
Notación

Se numeran los nodos y los elementos con un orden indistinto. Recuerde que la punta de la flecha en cada elemento está dirigida hacia el extremo alejado F, por lo que el extremo contrario es el cercano N, del mismo. En los elementos 1 y 2, el extremo lejano tiene que ser forzosamente el nodo ②, ya que es ahí donde está el soporte girado, figura 3-1b. Por conveniencia, se establece el origen de las coordenadas globales x, y en el nodo ③. Como el soporte en rodillos ② se

encuentra sobre un plano inclinado, en este nodo se emplean ejes nodales x'',y''. Evidentemente la dirección x'' debe coincidir con el plano de deslizamiento del soporte inclinado y y'' es perpendicular a x''. Se codifican los desplazamientos de tal modo que primero estén los desconocidos o no restringidos y después los conocidos o restringidos; puesto que la línea de acción de la fuerza reactiva del soporte ② se dirige hacia y'', el desplazamiento codificado como 4 está restringido y es nulo. Los números entre paréntesis de color morado son alusivos a las coordenadas x, y del nodo, mientras que los de color rojo indican las coordenadas x'', y''.



(b)



(c)

Las coordenadas en los ejes x'', y'' para los nodos ① y ③ pueden obtenerse por trigonometría con base en la figura 3-1c.

$$a = 3m(cos45°) = 2.1213m \qquad b = 3m(sin45°) = 2.1213m$$

$$c = 4m(cos45°) = 2.8284m \qquad d = 4m(sin45°) = 2.8284m$$

Cosenos directores y matriz de rigidez global para cada elemento

Figúrese que un elemento de armadura está conectado a un rodillo inclinado en su extremo F. Al tener un sistema de coordenadas globales x, y en el nodo cercano N, y un sistema de coordenadas nodales x'', y'' en el nodo lejano F, deben calcularse cosenos directores para ambos sistemas de coordenadas. Evidentemente, los cosenos directores λ_x y λ_y del primer sistema se siguen evaluando con las ecuaciones $1-2$ y $1-3$. En tanto, los correspondientes al segundo sistema se determinan como sigue:

$$\lambda_{x''} = cos\theta_{x''} = \frac{x''_F - x''_N}{L} = \frac{x''_F - x''_N}{\sqrt{(x''_F - x''_N)^2 + (y''_F - y''_N)^2}} \qquad (3-1)$$

$$\lambda_{y''} = cos\theta_{y''} = \frac{y''_F - y''_N}{L} = \frac{y''_F - y''_N}{\sqrt{(x''_F - x''_N)^2 + (y''_F - y''_N)^2}} \qquad (3-2)$$

donde

$\theta_{x''}$, $\theta_{y''}$ = ángulos más pequeños entre los ejes x'', y'' globales positivos y el eje local x' positivo.

x''_N, y''_N = coordenadas x'', y'' del extremo cercano N del elemento en turno.

x''_F, y''_F = coordenadas x'', y'' del extremo lejano F del elemento en turno.

L = longitud del elemento.

Luego, la matriz de rigidez en coordenadas globales de un elemento i bajo estas condiciones es

$$k_i = \frac{AE}{L}\begin{matrix} \\ N_x \\ N_y \\ F_{x''} \\ F_{y''} \end{matrix}\begin{matrix} \begin{matrix} N_x & N_y & F_{x''} & F_{y''} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} \lambda_x^2 & \lambda_x\lambda_y & -\lambda_x\lambda_{x''} & -\lambda_x\lambda_{y''} \\ \lambda_x\lambda_y & \lambda_y^2 & -\lambda_y\lambda_{x''} & -\lambda_y\lambda_{y''} \\ -\lambda_x\lambda_{x''} & -\lambda_y\lambda_{x''} & \lambda_{x''}^2 & \lambda_{x''}\lambda_{y''} \\ -\lambda_x\lambda_{y''} & -\lambda_y\lambda_{y''} & \lambda_{x''}\lambda_{y''} & \lambda_{y''}^2 \end{pmatrix} \end{matrix} \qquad (3-3)$$

donde

$A =$ área de la sección transversal del elemento.

$E =$ módulo de elasticidad del elemento.

$L =$ longitud del elemento.

$N_x,\ N_y =$ número de código del grado de libertad global asociado con el extremo cercano N en las direcciones x y y respectivamente del elemento en turno.

$F_{x''}, F_{y''} =$ número de código del grado de libertad nodal asociado con el extremo lejano F en las direcciones x'' y y'' respectivamente del elemento en turno.

$\lambda_x,\ \lambda_y =$ cosenos de θ_x y θ_y respectivamente.

$\lambda_{x''},\ \lambda_{y''} =$ cosenos de $\theta_{x''}$ y $\theta_{y''}$ respectivamente.

Debido a que los elementos 1 y 2 están conectados a un soporte inclinado, tienen números de código en la dirección de los ejes globales y nodales, en consecuencia, se aplican las expresiones $1-2, 1-3, 3-1$ y $3-2$ para obtener sus cosenos directores en ambos sistemas coordenados, y la matriz de rigidez de cada uno de ellos se calcula empleando la ecuación $3-3$. Por otra parte, el elemento 3 sólo tiene cosenos directores λ_x y λ_y, así que su matriz de rigidez global se desarrolla de la forma habitual, es decir, mediante la ecuación $1-4$.

A partir de la figura 3-1b y de la información proporcionada al inicio del problema se tienen los datos de las tablas 3-1, 3-2 y 3-3.

Elemento	Nodo		A	E	$L\ (m)$
	N	F			
1	3	2	A	E	4
2	1	2	A	E	3
3	3	1	A	E	5

Tabla 3-1

Elemento	Numeración de los grados de libertad					
	N_x	N_y	$F_{x''}$	$F_{y''}$	F_x	F_y
1	5	6	3	4		
2	1	2	3	4		
3	5	6			1	2

Tabla 3-2

Elemento	Coordenadas de los extremos cercano N y lejano F							
	x_N	y_N	x_F	y_F	x''_N	y''_N	x''_F	y''_F
1	0	0	4	0	-2.8284	2.8284	0	0
2	4	3	4	0	2.1213	2.1213	0	0
3	0	0	4	3				

Tabla 3-3

Por consiguiente,

Elemento 1:

$$\lambda_x = \frac{4-0}{4} = 1 \qquad \lambda_y = \frac{0-0}{4} = 0$$

$$\lambda_{x''} = \frac{0-(-2.8284)}{4} = 0.7071 \qquad \lambda_{y''} = \frac{0-2.8284}{4} = -0.7071$$

$$k_1 = AE \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} 5 & 6 & 3 & 4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0.2500 & 0 & -0.1768 & 0.1768 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1768 & 0 & 0.1250 & -0.1250 \\ 0.1768 & 0 & -0.1250 & 0.1250 \end{pmatrix} \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

Elemento 2:

$$\lambda_x = \frac{4-4}{3} = 0 \qquad \lambda_y = \frac{0-3}{3} = -1$$

$$\lambda_{x''} = \frac{0-2.1213}{3} = -0.7071 \qquad \lambda_{y''} = \frac{0-2.1213}{3} = -0.7071$$

$$k_2 = AE \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3333 & -0.2357 & -0.2357 \\ 0 & -0.2357 & 0.1667 & 0.1667 \\ 0 & -0.2357 & 0.1667 & 0.1667 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

Elemento 3:

$$\lambda_x = \frac{4-0}{5} = 0.8 \qquad \lambda_y = \frac{3-0}{5} = 0.6$$

$$k_3 = AE \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} 5 & 6 & 1 & 2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0.1280 & 0.0960 & -0.1280 & -0.0960 \\ 0.0960 & 0.0720 & -0.0960 & -0.0720 \\ -0.1280 & -0.0960 & 0.1280 & 0.0960 \\ -0.0960 & -0.0720 & 0.0960 & 0.0720 \end{pmatrix} \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

Matriz de rigidez de la estructura

Para obtener la matriz de rigidez de la estructura, se ensamblan las tres matrices anteriores siguiendo el procedimiento acostumbrado. Puede verse que K tiene un orden de $6\,X\,6$ debido a que seis grados de libertad fueron identificados en la armadura, además, la partición en ella se efectúa como siempre.

$$K = AE \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccccc} 0.1280 & 0.0960 & 0 & 0 & -0.1280 & -0.0960 \\ 0.0960 & 0.4053 & -0.2357 & -0.2357 & -0.0960 & -0.0720 \\ 0 & -0.2357 & 0.2917 & 0.0417 & -0.1768 & 0 \\ 0 & -0.2357 & 0.0417 & 0.2917 & 0.1768 & 0 \\ -0.1280 & -0.0960 & -0.1768 & 0.1768 & 0.3780 & 0.0960 \\ -0.0960 & -0.0720 & 0 & 0 & 0.0960 & 0.0720 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}$$

Vectores de desplazamientos y de cargas

De la figura 3-1b, se observa que los desplazamientos codificados con 1 y 2 corresponden a las componentes horizontal y vertical del desplazamiento en el nodo ①, así que $D_1 = \Delta_{H1}$ y $D_2 = \delta_{V1}$; también puede verse que el desplazamiento 3 viene siendo el desplazamiento resultante del nodo ②, por lo que $D_3 = \Delta_2$. Dadas las restricciones de los soportes ② y ③, los desplazamientos con códigos $4, 5$ y 6 son inexistentes, entonces, $D_4 = D_5 = D_6 = 0$.

Por otro lado, en la dirección 1 se encuentra aplicada una carga de $30kN$ en el sentido positivo de x, de modo que $C_1 = 30kN$, mientras que en las direcciones 2 y 3 no hay cargas externas, de ahí que $C_2 = C_3 = 0$. Además, en la dirección 4 se presenta la fuerza reactiva resultante del soporte ②, es por eso que $C_4 = R_2$, y en las direcciones 5 y 6 ocurren las reacciones en x y y del soporte ③, en consecuencia, $C_5 = R_{3x}$ y $C_6 = R_{3y}$.

Siendo así, las matrices D y C son, respectivamente

$$D = \begin{pmatrix} D_D \\ \hline D_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \hline D_3 \\ \hline D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_{H1} \\ \delta_{V1} \\ \hline \Delta_2 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \qquad C = \begin{pmatrix} C_C \\ \hline C_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ \hline C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \\ \hline R_2 \\ R_{3x} \\ R_{3y} \end{pmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}$$

Cálculo de los desplazamientos incógnita y las reacciones en los soportes

Aquí, $C = KD$ (ecuación $1-8$) resulta en

$$\left(\begin{array}{c} 30 \\ 0 \\ 0 \\ \hline R_2 \\ R_{3x} \\ R_{3y} \end{array}\right) = AE \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0.1280 & 0.0960 & 0 & 0 & -0.1280 & -0.0960 \\ 0.0960 & 0.4053 & -0.2357 & -0.2357 & -0.0960 & -0.0720 \\ 0 & -0.2357 & 0.2917 & 0.0417 & -0.1768 & 0 \\ \hline 0 & -0.2357 & 0.0417 & 0.2917 & 0.1768 & 0 \\ -0.1280 & -0.0960 & -0.1768 & 0.1768 & 0.3780 & 0.0960 \\ -0.0960 & -0.0720 & 0 & 0 & 0.0960 & 0.0720 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} \Delta_{H1} \\ \delta_{V1} \\ \Delta_2 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right)$$

Al desarrollar la solución para los desplazamientos como en la ecuación $1-12$, se tiene

$$\begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = AE \begin{pmatrix} 0.1280 & 0.0960 & 0 \\ 0.0960 & 0.4053 & -0.2357 \\ 0 & -0.2357 & 0.2917 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_{H1} \\ \delta_{V1} \\ \Delta_2 \end{pmatrix}$$

Si se resuelve el sistema, despejando las incógnitas de manera afín a la ecuación $1-13$ y expandiendo, se obtiene

$$\begin{pmatrix} \Delta_{H1} \\ \delta_{V1} \\ \Delta_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{AE} \begin{pmatrix} 0.1280 & 0.0960 & 0 \\ 0.0960 & 0.4053 & -0.2357 \\ 0 & -0.2357 & 0.2917 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{AE} \begin{pmatrix} 352.5000 \\ -157.5000 \\ -127.2804 \end{pmatrix}$$

Las reacciones en los soportes se hallan efectuando el producto matricial correspondiente a la partición inferior, es decir, con la ecuación $1-14$. Al emplear los desplazamientos calculados previamente da

$$\begin{pmatrix} R_2 \\ R_{3x} \\ R_{3y} \end{pmatrix} = AE \begin{pmatrix} 0 & -0.2357 & 0.0417 \\ -0.1280 & -0.0960 & -0.1768 \\ -0.0960 & -0.0720 & 0 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{AE}\right) \begin{pmatrix} 352.5000 \\ -157.5000 \\ -127.2804 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31.8195kN \\ -7.5000kN \\ -22.5000kN \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

$$R_2 = 31.8195kN \nwarrow \qquad R_{3x} = 7.5kN \leftarrow \qquad R_{3y} = 22.5kN \downarrow$$

Cálculo de las fuerzas en los elementos

Para determinar la fuerza de tensión q de un elemento i conectado a un soporte inclinado en el nodo lejano F, se emplea la siguiente ecuación:

$$q_i = \frac{AE}{L}(-\lambda_x \quad -\lambda_y \quad \lambda_{x''} \quad \lambda_{y''}) \begin{pmatrix} D_{Nx} \\ D_{Ny} \\ D_{Fx''} \\ D_{Fy''} \end{pmatrix} \qquad (3-4)$$

donde

$A =$ área de la sección transversal del elemento.

$E =$ módulo de elasticidad del elemento.

$L =$ longitud del elemento.

$\lambda_x,\ \lambda_y =$ cosenos de θ_x y θ_y respectivamente.

$\lambda_{x''},\ \lambda_{y''} =$ cosenos de $\theta_{x''}$ y $\theta_{y''}$ respectivamente.

$D_{Nx},\ D_{Ny} =$ desplazamientos horizontal y vertical del nodo N del elemento en turno.

$D_{Fx''}, D_{Fy''} =$ desplazamientos en las direcciones x'', y'' del nodo F del elemento en turno.

Por consiguiente, para conocer el valor de las fuerzas en los elementos 1 y 2 aplicamos la ecuación $3-4$, mientras que la fuerza del elemento 3 se encuentra con base en la ecuación $1-15$.

Elemento 1:

$$q_1 = \left(\frac{AE}{4}\right)(-1 \quad -0 \quad 0.7071 \quad -0.7071)\left(\frac{1}{AE}\right)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -127.2804 \\ 0 \end{pmatrix} = -22.5KN\ (Compresión)$$

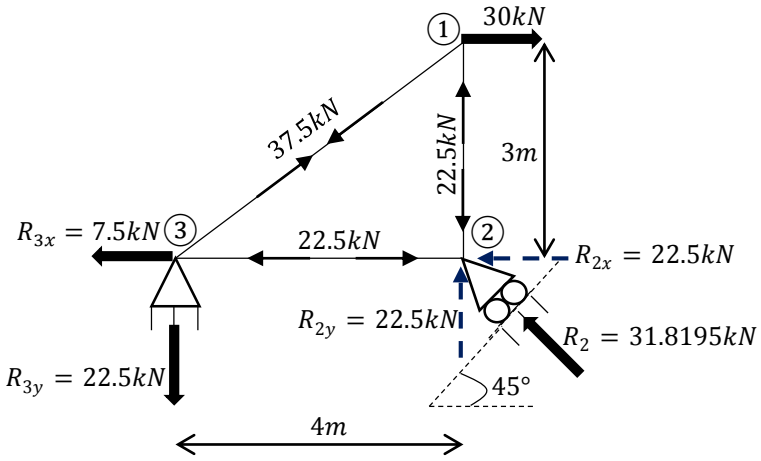
Elemento 2:

$$q_2 = \left(\frac{AE}{3}\right)(-0 \quad -(-1) \quad -0.7071 \quad -0.7071)\left(\frac{1}{AE}\right)\begin{pmatrix} 352.5 \\ -157.5 \\ -127.2804 \\ 0 \end{pmatrix} = -22.5KN\ (Compresión)$$

Elemento 3:

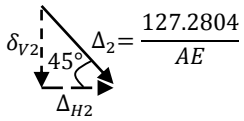
$$q_3 = \left(\frac{AE}{5}\right)(-0.8 \quad -0.6 \quad 0.8 \quad 0.6)\left(\frac{1}{AE}\right)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 352.5 \\ -157.5 \end{pmatrix} = 37.5KN\ (Tensión)$$

Se muestran los resultados obtenidos en el diagrama de la figura 3-1d.



(d)

Con base en la figura 3-1e, se calculan las componentes horizontal y vertical del desplazamiento resultante en el nodo ②, el cual ocurre en la dirección x'' negativa por haber resultado de magnitud negativa.



(e)

$$\Delta_{H2} = \Delta_2(\cos 45°) = \left(\frac{127.2804}{AE}\right)(\cos 45°) = \frac{90.0008}{AE}$$

$$\delta_{V2} = \Delta_2(\sin 45°) = \left(\frac{127.2804}{AE}\right)(\sin 45°) = \frac{90.0008}{AE}$$

Como Δ_{H2} y δ_{V2} actúan en las direcciones x positiva y y negativa, las magnitudes definitivas serían $90.0008/AE$ y $-90.0008/AE$ de forma respectiva.

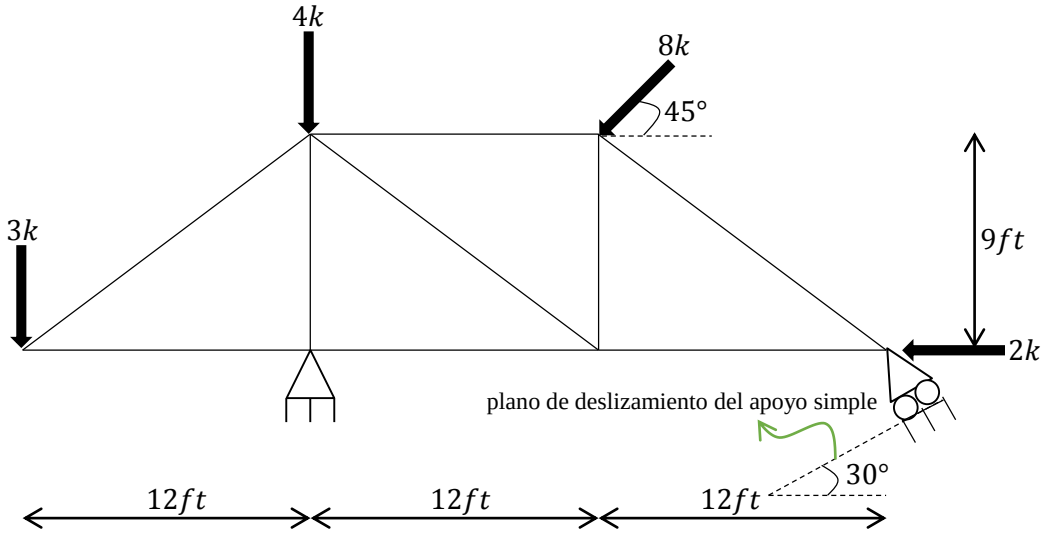
Finalmente, se comprueba el equilibrio externo de la estructura; para ello, la fuerza resultante R_2 se descompone en sus componentes horizontal y vertical.

$$+\uparrow \sum Fy = -22.5 + 22.5 = 0 \quad ok$$

$$+\rightarrow \sum Fx = -7.5 - 22.5 + 30 = 0 \quad ok$$

$$+\circlearrowleft \sum MA = 30(3) - 22.5(4) = 0 \quad ok$$

EJERCICIO 3.2 Calcule las reacciones en los apoyos de la armadura isostática que se observa en la figura 3-2a cuyo apoyo simple tiene un plano de deslizamiento que forma un ángulo de $30°$ respecto de la horizontal. AE es constante.

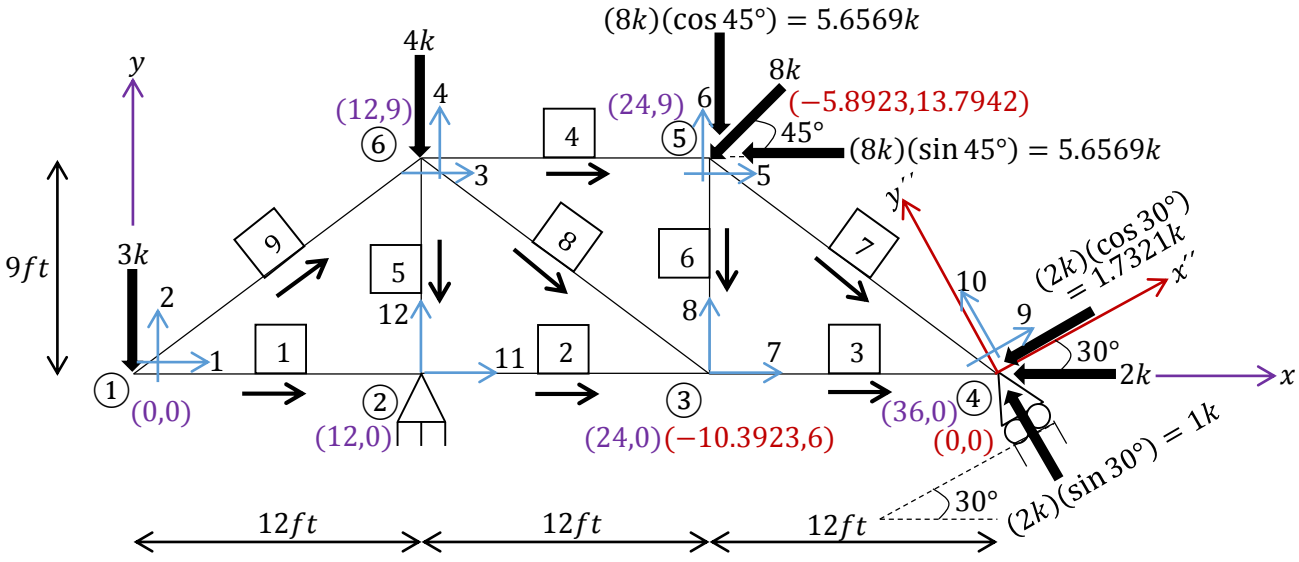


(a)

Figura 3-2

SOLUCIÓN

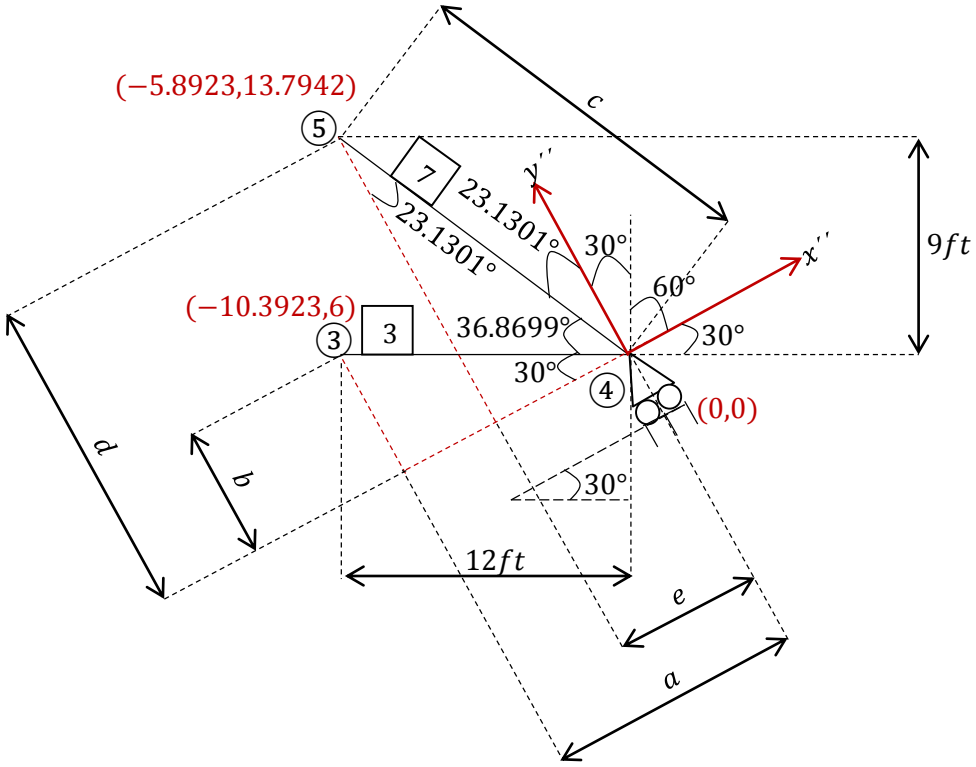
Notación



(b)

La armadura tiene nueve elementos y seis nodos, los cuales han sido numerados en un orden aleatorio. Obsérvese en la figura 3-2a que el apoyo simple se sitúa sobre un plano que está inclinado a $30°$ respecto del eje horizontal. Entonces, en ese nodo, identificado como ④, se establece un sistema de coordenadas nodales, figura 3-2b. El origen de los ejes globales x, y se asocia al nodo ①.

Las coordenadas en los ejes x'', y'' para los nodos ③ y ⑤ pueden obtenerse por trigonometría de forma respectiva con base en la figuras 3-1c.



(c)

$$a = 12ft(\cos 30°) = 10.3923ft \qquad b = 12ft(\sin 30°) = 6ft$$

$$c = \sqrt{(12ft)^2 + (9ft)^2} = 15ft$$

$$d = 15ft(\cos 23.1301°) = 13.7942ft \qquad e = 15ft(\sin 23.1301°) = 5.8923ft$$

Cosenos directores y matriz de rigidez global para cada elemento

Para los elementos que están conectados al soporte inclinado, es decir, el 3 y el 7, se emplean las ecuaciones $1-2, 1-3, 3-1$ y $3-2$ para calcular los cosenos

directores en los dos sistemas coordenados. La matriz de rigidez de cada uno de ellos se obtiene al aplicar la ecuación $3-3$. Por otro lado, para los elementos restantes, únicamente se utilizan las ecuaciones $1-2$ y $1-3$ para evaluar los cosenos directores, y su matriz de rigidez individual es resultado de la ecuación $1-3$.

Elemento 1:

$$L = 12ft \qquad \lambda_x = \frac{12-0}{12} = 1 \qquad \lambda_y = \frac{0-0}{12} = 0$$

$$k_1 = AE \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} 1 & 2 & 11 & 12 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0.0833 & 0 & -0.0833 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0833 & 0 & 0.0833 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 11 \\ 12 \end{matrix}$$

Elemento 2:

$$L = 12ft \qquad \lambda_x = \frac{24-12}{12} = 1 \qquad \lambda_y = \frac{0-0}{12} = 0$$

$$k_2 = AE \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} 11 & 12 & 7 & 8 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0.0833 & 0 & -0.0833 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0833 & 0 & 0.0833 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 11 \\ 12 \\ 7 \\ 8 \end{matrix}$$

Elemento 3:

$$L = 12ft \qquad \lambda_x = \frac{36-24}{12} = 1 \qquad \lambda_y = \frac{0-0}{12} = 0$$

$$\lambda_{x''} = \frac{0-(-10.3923)}{4} = 0.866 \qquad \lambda_{y''} = \frac{0-6}{12} = -0.5$$

$$k_3 = AE \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} 7 & 8 & 9 & 10 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0.0833 & 0 & -0.0722 & 0.0417 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0722 & 0 & 0.0625 & -0.0361 \\ 0.0417 & 0 & -0.0361 & 0.0208 \end{pmatrix} \begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix}$$

Elemento 4:

$$L = 12ft \qquad \lambda_x = \frac{24-12}{12} = 1 \qquad \lambda_y = \frac{9-9}{12} = 0$$

$$k_4 = AE\begin{pmatrix} 0.0833 & 0 & -0.0833 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0833 & 0 & 0.0833 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{matrix}3\\4\\5\\6\end{matrix}$$

Elemento 5:

$$L = 9ft \qquad \lambda_x = \frac{12-12}{9} = 0 \qquad \lambda_y = \frac{0-9}{9} = -1$$

$$k_5 = AE\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1111 & 0 & -0.1111 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1111 & 0 & 0.1111 \end{pmatrix}\begin{matrix}3\\4\\11\\12\end{matrix}$$

Elemento 6:

$$L = 9ft \qquad \lambda_x = \frac{24-24}{9} = 0 \qquad \lambda_y = \frac{0-9}{9} = -1$$

$$k_6 = AE\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1111 & 0 & -0.1111 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1111 & 0 & 0.1111 \end{pmatrix}\begin{matrix}5\\6\\7\\8\end{matrix}$$

Elemento 7:

$$L = 15ft \qquad \lambda_x = \frac{36-24}{15} = 0.8 \qquad \lambda_y = \frac{0-9}{15} = -0.6$$

$$\lambda_{x''} = \frac{0-(-5.8923)}{15} = 0.3928 \qquad \lambda_{y''} = \frac{0-13.7942}{15} = -0.9196$$

$$k_7 = AE\begin{pmatrix} 0.0427 & -0.0320 & -0.0209 & 0.0490 \\ -0.0320 & 0.0240 & 0.0157 & -0.0368 \\ -0.0209 & 0.0157 & 0.0103 & -0.0241 \\ 0.0490 & -0.0368 & -0.0241 & 0.0564 \end{pmatrix}\begin{matrix}5\\6\\9\\10\end{matrix}$$

Elemento 8:

$$L = 15ft \qquad \lambda_x = \frac{24-12}{15} = 0.8 \qquad \lambda_y = \frac{0-9}{15} = -0.6$$

$$k_8 = AE \begin{array}{c} \begin{matrix} 3 & 4 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0.0427 & -0.0320 & -0.0427 & 0.0320 \\ -0.0320 & 0.0240 & 0.0320 & -0.0240 \\ -0.0427 & 0.0320 & 0.0427 & -0.0320 \\ 0.0320 & -0.0240 & -0.0320 & 0.0240 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 7 \\ 8 \end{matrix}$$

Elemento 9:

$$L = 15ft \qquad \lambda_x = \frac{12-0}{15} = 0.8 \qquad \lambda_y = \frac{9-0}{15} = 0.6$$

$$k_9 = AE \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0.0427 & 0.0320 & -0.0427 & -0.0320 \\ 0.0320 & 0.0240 & -0.0320 & -0.0240 \\ -0.0427 & -0.0320 & 0.0427 & 0.0320 \\ -0.0320 & -0.0240 & 0.0320 & 0.0240 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

Matriz de rigidez de la estructura

Al ensamblar las nueve matrices previas, se obtiene K. Efectuando la partición apropiada en ella obtenemos las siguientes submatrices:

Submatriz K_{11}:

$$K_{11} = AE \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0.1260 & 0.0320 & -0.0427 & -0.0320 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0320 & 0.0240 & -0.0320 & -0.0240 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0427 & -0.0320 & 0.1687 & 0 & -0.0833 & 0 & -0.0427 & 0.0320 & 0 \\ -0.0320 & -0.0240 & 0 & 0.1591 & 0 & 0 & 0.0320 & -0.0240 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0833 & 0 & 0.1260 & -0.0320 & 0 & 0 & -0.0209 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0320 & 0.1351 & 0 & -0.1111 & 0.0157 \\ 0 & 0 & -0.0427 & 0.0320 & 0 & 0 & 0.2093 & -0.0320 & -0.0722 \\ 0 & 0 & 0.0320 & -0.0240 & 0 & -0.1111 & -0.0320 & 0.1351 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0209 & 0.0157 & -0.0722 & 0 & 0.0728 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix}$$

Submatriz K_{12}:

$$K_{12} = AE \begin{array}{c} \begin{matrix} 10 & 11 & 12 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -0.0833 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.1111 \\ 0.0490 & 0 & 0 \\ -0.0368 & 0 & 0 \\ 0.0417 & -0.0833 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.0602 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix}$$

Submatriz K_{21}:

$$K_{21} = AE\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0490 & -0.0368 & 0.0417 & 0 & -0.0602 & 10 \\ -0.0833 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0833 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & -0.1111 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Submatriz K_{22}:

$$K_{22} = AE\begin{pmatrix} 10 & 11 & 12 & \\ 0.0722 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0.1677 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 0.1111 & 12 \end{pmatrix}$$

Vectores de desplazamientos y de cargas

Los desplazamientos codificados con $10, 11$ y 12 son nulos debido a que los soportes ④ y ② los impiden. Entonces, el vector total de desplazamientos externos es

$$D = \begin{pmatrix} D_D \\ \hline D_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \\ D_9 \\ \hline D_{10} \\ D_{11} \\ D_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_{H1} \\ \delta_{V1} \\ \Delta_{H6} \\ \delta_{V6} \\ \Delta_{H5} \\ \delta_{V5} \\ \Delta_{H3} \\ \delta_{V3} \\ \Delta_4 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix}$$

Enseguida se construye el vector total de cargas externas. La carga de $8k$ aplicada en el nodo ⑤ es descompuesta en sus componentes rectangulares para los ejes x, y debido a que en ese nodo se tienen números de código de grados de libertad en tales direcciones, figura 3-2b. Por otra parte, la carga de $2k$ del nodo ④ se resuelve en sus componentes rectangulares para los ejes $x´´, y´´$ dado que tal nodo presenta codificaciones numéricas de grados de libertad en esas direcciones. En consecuencia,

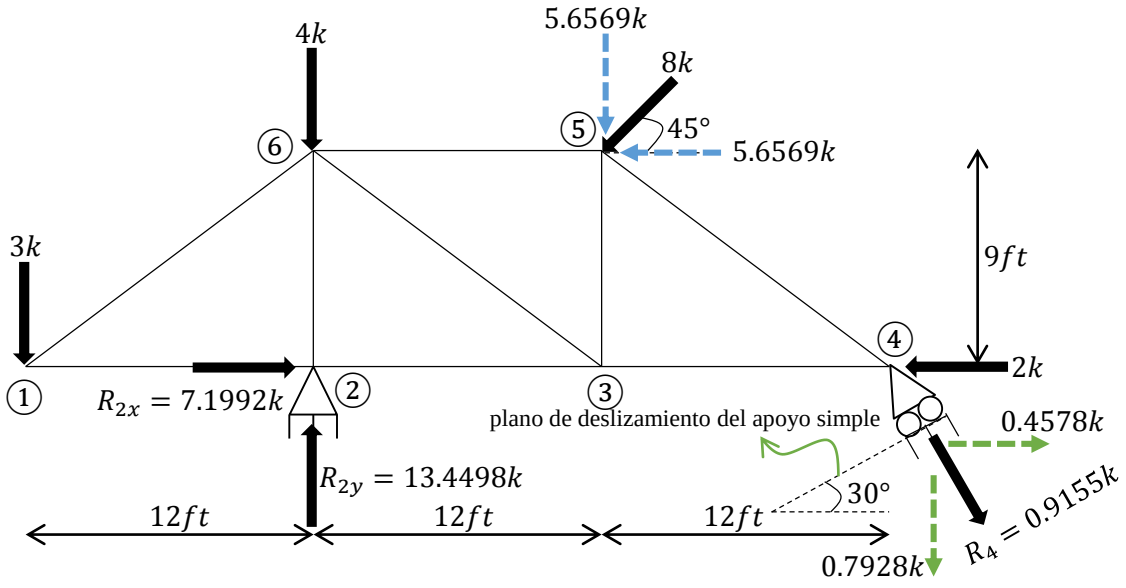
$$C = \begin{pmatrix} C_C \\ \hline C_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \\ C_8 \\ \hline C_9 \\ C_{10} \\ C_{11} \\ C_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ -4 \\ -5.6569 \\ -5.6569 \\ 0 \\ 0 \\ \hline -1.7321 \\ R_4 + 1 \\ R_{2x} \\ R_{2y} \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix}$$

Cálculo de los desplazamientos incógnita y las reacciones en los soportes

Al establecer $C = KD$ y resolver el sistema de ecuaciones como se ha efectuado en los ejercicios anteriores resulta

$$\begin{pmatrix} \Delta_{H1} \\ \delta_{V1} \\ \Delta_{H6} \\ \delta_{V6} \\ \Delta_{H5} \\ \delta_{V5} \\ \Delta_{H3} \\ \delta_{V3} \\ \Delta_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{AE} \begin{pmatrix} 48.0000 \\ -665.8696 \\ -266.8661 \\ -121.0481 \\ -322.0627 \\ -271.2035 \\ -134.3907 \\ -213.1554 \\ -191.2066 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} R_4 \\ R_{2x} \\ R_{2y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.9155k \\ 7.1992k \\ 13.4498k \end{pmatrix}$$

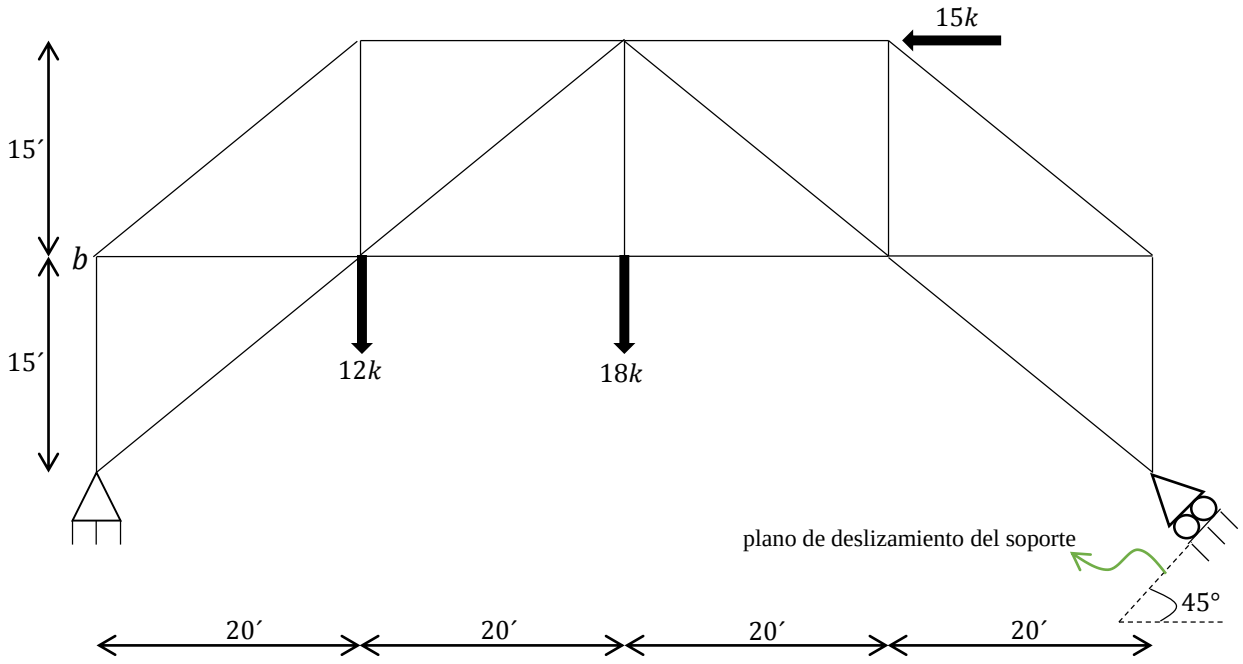
Puede comprobarse fácilmente el equilibrio externo de la armadura con base en la figura 3-2d.



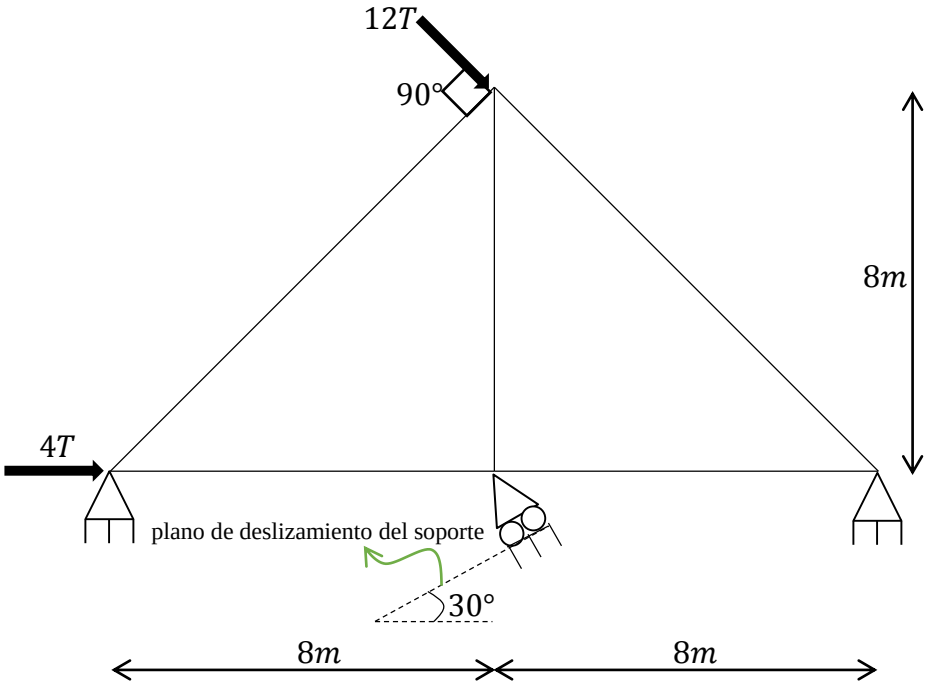
(d)

PROBLEMAS PROPUESTOS

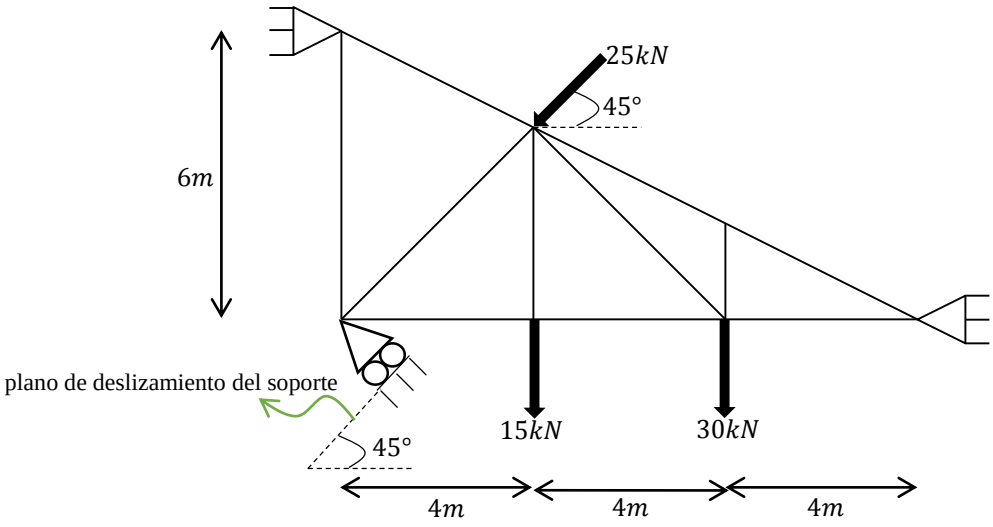
3.1 Determine las reacciones en los soportes y la fuerza en cada elemento de las siguientes armaduras, las cuales tienen un rodillo situado en un plano inclinado. AE es constante. Verifique el equilibrio en todos los nodos a manera de comprobar que los resultados obtenidos son correctos.



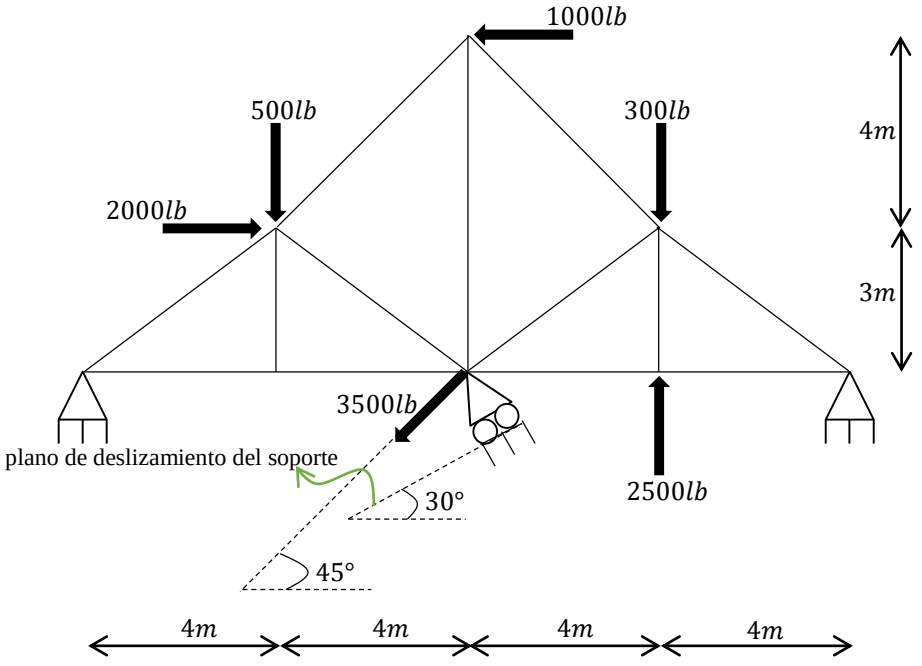
(a)



(b)


25kN
45°
6m
plano de deslizamiento del soporte
45°
15kN
30kN
4m
4m
4m

(c)


1000lb
500lb
300lb
2000lb
4m
3m
3500lb
plano de deslizamiento del soporte
30°
2500lb
45°
4m
4m
4m
4m

(d)

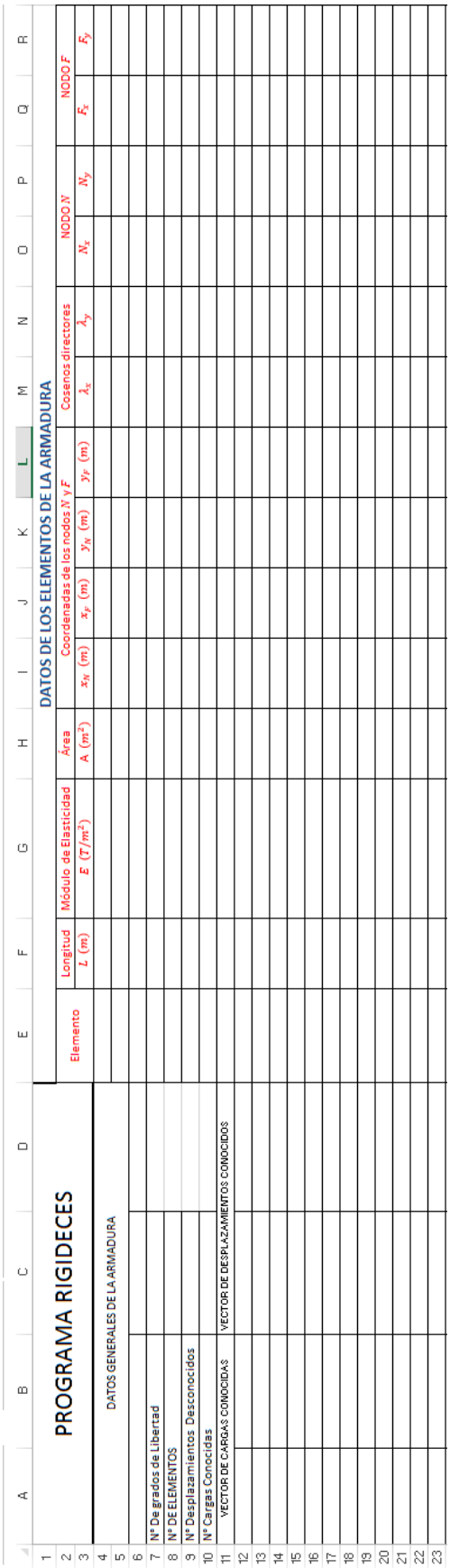
4

CÓDIGO EN MATLAB Y MANUAL PARA EL USUARIO

Se he creado un archivo de Excel bajo el nombre DATOS PROGRAMA dentro de una carpeta denominada LIBRO ARMADURA y en él se ha diseñado una hoja de datos llamada DATOS ARMADURA, figura 4-1. La carpeta mencionada contiene además un archivo de MATLAB titulado MATRIZ_RIG_ARMADURA que consiste en un código del método de rigidez matricial aplicado a armaduras en el plano.

A continuación se proporciona tal código fuente:

```
%PROGRAMA QUE CALCULA REACCIONES EN LOS SOPORTES,DESPLAZAMIENTOS Y
FUERZAS%
%INTERNAS EN LOS ELEMENTOS DE UNA ARMADURA EN 2D POR EL MÉTODO DE
RIGIDEZ%
clear;
clc;
k=zeros(4);
l=1;
disp('------------------- DATOS PARA EL ANÁLISIS ------------------------
')
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%
%VECTOR DE CARGAS CONOCIDAS%
CC=xlsread('DATOS PROGRAMA.xlsx','DATOS ARMADURA','B12:B18');
%VECTOR DE DESPLAZAMIENTOS CONOCIDOS%
DC=xlsread('DATOS PROGRAMA.xlsx','DATOS ARMADURA','D12:D14');
%NÚMERO DE GRADOS DE LIBERTAD%
GL=xlsread('DATOS PROGRAMA.xlsx','DATOS ARMADURA','C7');
KT=zeros(GL);
%NÚMERO DE ELEMENTOS%
i=xlsread('DATOS PROGRAMA.xlsx','DATOS ARMADURA','C8');
%NÚMERO DE DESPLAZAMIENTOS DESCONOCIDOS%
d=xlsread('DATOS PROGRAMA.xlsx','DATOS ARMADURA','C9');
%NÚMERO DE CARGAS CONOCIDAS%
fu=xlsread('DATOS PROGRAMA.xlsx','DATOS ARMADURA','C10');
dceros=zeros(1,GL-d);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%
```



PROGRAMA RIGIDECES

DATOS GENERALES DE LA ARMADURA

Nº De grados de Libertad	
Nº DE ELEMENTOS	
Nº Desplazamientos Desconocidos	
Nº Cargas Conocidas	

VECTOR DE CARGAS CONOCIDAS

VECTOR DE DESPLAZAMIENTOS CONOCIDOS

DATOS DE LOS ELEMENTOS DE LA ARMADURA

Elemento	Longitud L (m)	Módulo de Elasticidad E (T/m^2)	Área A (m^2)	Coordenadas de los nodos N y F				Cosenos directores		NODO N		NODO F	
				x_N (m)	x_F (m)	y_N (m)	y_F (m)	λ_x	λ_y	N_x	N_y	F_x	F_y

Figura 4-1

```
disp('LECTURA DE DATOS DEL ELEMENTO i ----------------------------------
')
%LONGITUD%
L=xlsread('DATOS PROGRAMA.xlsx','DATOS ARMADURA','F4:F30');
%MÓDULO DE ELASTICIDAD%
E=xlsread('DATOS PROGRAMA.xlsx','DATOS ARMADURA','G4:G30');
%ÁREA DE LA SECCIÓN TRANSVERSAL%
A=xlsread('DATOS PROGRAMA.xlsx','DATOS ARMADURA','H4:H30');
%COSENOS DIRECTORES (LAMBDA x Y LAMBDA y)%
Lx=xlsread('DATOS PROGRAMA.xlsx','DATOS ARMADURA','M4:M30');
Ly=xlsread('DATOS PROGRAMA.xlsx','DATOS ARMADURA','N4:N30');
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%
disp('LECTURA DE DATOS NODO CERCANO N-----------------------------------
--------')
Nx=xlsread('DATOS PROGRAMA.xlsx','DATOS ARMADURA','O4:O30');
Ny=xlsread('DATOS PROGRAMA.xlsx','DATOS ARMADURA','P4:P30');
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%
disp('LECTURA DE DATOS NODO LEJANO F------------------------------------
-------')
Fx=xlsread('DATOS PROGRAMA.xlsx','DATOS ARMADURA','Q4:Q30');
Fy=xlsread('DATOS PROGRAMA.xlsx','DATOS ARMADURA','R4:R30');
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%
disp('OBTENCIÓN DE MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL DEL ELEMENTO----------------
')
for n=1:i
    fprintf('ELEMENTO %i.\n\n',n)
disp('------------------------------------------------------------------
')
    k(1,1)=((Lx(n,1)^2)*(A(n,1)*E(n,1)))/L(n,1);
    k(1,2)=((Lx(n,1)*Ly(n,1))*(A(n,1)*E(n,1)))/L(n,1);
    k(1,3)=-(((Lx(n,1)^2)*(A(n,1)*E(n,1)))/L(n,1));
    k(1,4)=-(((Lx(n,1)*Ly(n,1))*(A(n,1)*E(n,1)))/L(n,1));
    k(2,1)=((Lx(n,1)*Ly(n,1))*(A(n,1)*E(n,1)))/L(n,1);
    k(2,2)=((Ly(n,1)^2)*(A(n,1)*E(n,1)))/L(n,1);
    k(2,3)=-(((Lx(n,1)*Ly(n,1))*(A(n,1)*E(n,1)))/L(n,1));
    k(2,4)=-(((Ly(n,1)^2)*(A(n,1)*E(n,1)))/L(n,1));
    k(3,1)=-(((Lx(n,1)^2)*(A(n,1)*E(n,1)))/L(n,1));
    k(3,2)=-(((Lx(n,1)*Ly(n,1))*(A(n,1)*E(n,1)))/L(n,1));
    k(3,3)=((Lx(n,1)^2)*(A(n,1)*E(n,1)))/L(n,1);
    k(3,4)=((Lx(n,1)*Ly(n,1))*(A(n,1)*E(n,1)))/L(n,1);
    k(4,1)=-(((Lx(n,1)*Ly(n,1))*(A(n,1)*E(n,1)))/L(n,1));
    k(4,2)=-(((Ly(n,1)^2)*(A(n,1)*E(n,1)))/L(n,1));
    k(4,3)=((Lx(n,1)*Ly(n,1))*(A(n,1)*E(n,1)))/L(n,1);
    k(4,4)=((Ly(n,1)^2)*(A(n,1)*E(n,1)))/L(n,1);
fprintf('MATRIZ k%i.',n)
    k
disp('------------------------------------------------------------------
')
K=zeros(GL);
K(Nx(n,1),Nx(n,1))=k(1,1);
K(Nx(n,1),Ny(n,1))=k(1,2);
K(Nx(n,1),Fx(n,1))=k(1,3);
K(Nx(n,1),Fy(n,1))=k(1,4);
K(Ny(n,1),Nx(n,1))=k(2,1);
```

```
K(Ny(n,1),Ny(n,1))=k(2,2);
K(Ny(n,1),Fx(n,1))=k(2,3);
K(Ny(n,1),Fy(n,1))=k(2,4);
K(Fx(n,1),Nx(n,1))=k(3,1);
K(Fx(n,1),Ny(n,1))=k(3,2);
K(Fx(n,1),Fx(n,1))=k(3,3);
K(Fx(n,1),Fy(n,1))=k(3,4);
K(Fy(n,1),Nx(n,1))=k(4,1);
K(Fy(n,1),Ny(n,1))=k(4,2);
K(Fy(n,1),Fx(n,1))=k(4,3);
K(Fy(n,1),Fy(n,1))=k(4,4);
KT=K+KT;
end
disp('-------------- MATRIZ DE RIGIDEZ DE LA ESTRUCTURA -----------------
')
KT
disp('-------------------------------------------------------------------
')
disp('---------------------- SUBMATRIZ K11 ----------------------------
')
K11=KT(1:d,1:d)
disp('---------------------- SUBMATRIZ K12 ----------------------------
')
K12=KT(1:d,d+1:GL)
disp('---------------------- SUBMATRIZ K21 ----------------------------
')
K21=KT(d+1:GL,1:d)
disp('---------------------- SUBMATRIZ K22 ----------------------------
')
K22=KT(d+1:GL,d+1:GL)
disp('-------------------- SOLUCIÓN DEL PROBLEMA ------------------------
')
disp('-------------------------------------------------------------------
')
disp('------------------ VECTOR DE CARGAS CONOCIDAS --------------------
')
CC
disp('-------------------------------------------------------------------
')
disp('-------------------- SOLUCIÓN DEL SUBSISTEMA 1 --------------------
---')
disp('----------------- DESPLAZAMIENTOS DESCONOCIDOS --------------------
')
DD=(inv(K11))*(CC-(K12*DC))
desplazamientos=[DD;DC];
disp('-------------------------------------------------------------------
')
disp('-------------------- SOLUCION DEL SUBSISTEMA 2 --------------------
---')
disp('---------------------- CARGAS DESCONOCIDAS ----------------------
')
CD=(K21*DD)+(K22*DC)
disp('-------------------------------------------------------------------
')
disp('----------------------- FUERZAS INTERNAS ------------------------
')
```

```
disp('-----------------  O FUERZAS EN LOS ELEMENTOS --------------------
')
for m=1:n
    fprintf('ELEMENTO %i.\n\n',m)

dp=[desplazamientos(Nx(m,1),1);desplazamientos(Ny(m,1),1);desplazamientos
(Fx(m,1),1);desplazamientos(Fy(m,1),1)] ;
    Fbar=((A(m,1)*E(m,1))/L(m,1))*[-Lx(m,1) -Ly(m,1) Lx(m,1) Ly(m,1)]*dp
    fb(l,m)=Fbar(l);
    disp('-----------------------------------------------------------------
')
end
disp('---------------------- FUERZAS EN LOS ELEMENTOS -------------------
')
fba=[[1:1:n]',fb']
disp('-----------------------------------------------------------------
')
disp('------------------------ TABLA DE RESULTADOS ----------------------
')
disp('---------------------- LA SIGUIENTE TABLA MUESTRA -----------------
')
disp('----------------- LAS FUERZAS  Y LOS DESPLAZAMIENTOS --------------
')
disp('---------------------- EN LOS NODOS DE LA ARMADURA ----------------
')
fuerzas=[CC;CD];
TABLA=[[1:1:GL]',fuerzas,desplazamientos]
format long
disp('-----------------------------------------------------------------
')
disp('----------------- GRACIAS POR EMPLEAR ESTE PROGRAMA ---------------
')
```

Supongamos que se desea resolver la armadura representada en la figura 1-1a del EJERCICIO 1-1 de este libro. Una vez que se ha efectuado la parte de la notación, figura 4-2 (ver fig. 1-1b, pág. 3), y ya que se han formulado los vectores de cargas conocidas C_C y desplazamientos conocidos D_C (ver pág. 15), se procede a efectuar el llenado de la hoja de datos del archivo de EXCEL de la figura 4-1.

$$C_C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix}$$

$$D_C = \begin{pmatrix} D_8 \\ D_9 \\ D_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix}$$

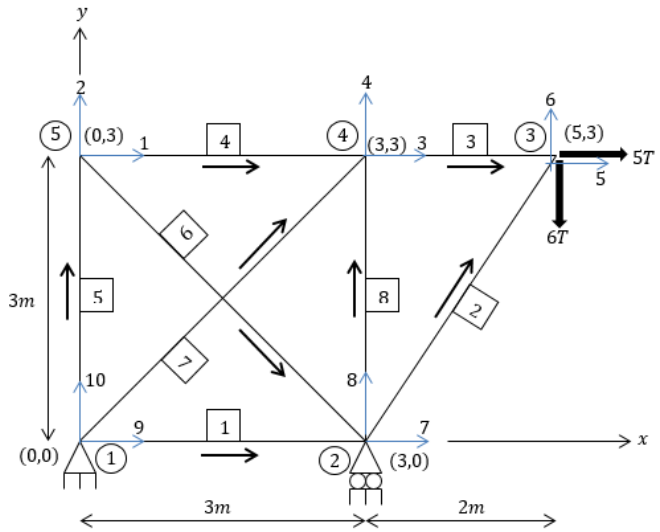


Figura 4-2

PROGRAMA RIGIDECES				DATOS DE LOS ELEMENTOS DE LA ARMADURA													
				Elemento	Longitud	Módulo de Elasticidad	Área	Coordenadas de los nodos N y F				Cosenos directores		NODO N		NODO F	
					$L\ (m)$	$E\ (T/m^2)$	A (m^2)	$x_N\ (m)$	$x_F\ (m)$	$y_N\ (m)$	$y_F\ (m)$	λ_x	λ_y	N_x	N_y	F_x	F_y
DATOS GENERALES DE LA ARMADURA				1	3	2100000	0.12	0	3	0	0	1	0	9	10	7	8
				2	3.6055513	2100000	0.12	3	5	0	3	0.5547002	0.8320503	7	8	5	6
				3	2	2100000	0.12	3	5	3	3	1	0	3	4	5	6
N° De grados de Libertad		10		4	3	2100000	0.12	0	3	3	3	1	0	1	2	3	4
N° DE ELEMENTOS		8		5	3	2100000	0.12	0	0	0	3	0	1	9	10	1	2
N° Desplazamientos Desconocidos		7		6	4.2426407	2100000	0.16	0	3	3	0	0.7071068	-0.707107	1	2	7	8
N° Cargas Conocidas		7		7	4.2426407	2100000	0.16	0	3	0	3	0.7071068	0.7071068	9	10	3	4
VECTOR DE CARGAS CONOCIDAS		VECTOR DE DESPLAZAMIENTOS CONOCIDOS		8	3	2100000	0.16	3	3	0	3	0	1	7	8	3	4
1	0	8	0														
2	0	9	0														
3	0	10	0														
4	0																
5	5																
6	-6																
7	0																

Figura 4-3

En la figura 4-3 se observa que todos los datos requeridos para correr el código en matlab han sido colocados de manera íntegra.

Cabe mencionar que la hoja de Excel de la figura 4-1 tiene programadas las ecuaciones de la longitud del elemento (L) y los cosenos directores $(\lambda_x,\ \lambda_y)$, columnas F, M y N, por lo que en automático se calcularán al insertar los datos de las columnas I, J, K y L, que corresponden a las coordenadas de los nodos cercano N y lejano F en los ejes x, y del elemento en turno $(x_N,\ x_F,\ y_N,\ x_F)$, figura 4-3.

El usuario debe asegurarse de que tanto el archivo de Excel como el de Matlab estén situados en la misma carpeta previo a la ejecución del segundo.

Finalmente, se da click en el icono de MATLAB .

Entonces, el programa imprime la matriz de rigidez en coordenadas globales k_i de cada elemento i, la matriz de rigidez de la estructura K, las submatrices K_{11}, K_{12}, K_{21} y K_{22}, el vector de cargas conocidas C_C, el vector de desplazamientos desconocidos D_D, el vector de cargas desconocidas C_D, la fuerza q_i de cada elemento i, una tabla de las fuerzas internas y una tabla que muestra los resultados obtenidos para las cargas y los desplazamientos en los nodos de la armadura. En la figura 4-4 se muestran los resultados del análisis con MATLAB.

Command Window

```
------------------- DATOS PARA EL ANÁLISIS -----------------------
LECTURA DE DATOS DEL ELEMENTO i ----------------------------------
LECTURA DE DATOS NODO CERCANO N-----------------------------------------
LECTURA DE DATOS NODO LEJANO F------------------------------------------
OBTENCIÓN DE MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL DEL ELEMENTO-----------------
ELEMENTO 1.

-----------------------------------------------------------------
MATRIZ k1.
k =

       84000           0      -84000           0
           0           0           0           0
      -84000           0       84000           0
           0           0           0           0

-----------------------------------------------------------------
```

```
ELEMENTO 2.

-------------------------------------------------------------------
MATRIZ k2.
k =

  1.0e+004 *

    2.1505    3.2258   -2.1505   -3.2258
    3.2258    4.8387   -3.2258   -4.8387
   -2.1505   -3.2258    2.1505    3.2258
   -3.2258   -4.8387    3.2258    4.8387

-------------------------------------------------------------------
ELEMENTO 3.

-------------------------------------------------------------------
MATRIZ k3.
k =

      126000           0     -126000           0
           0           0           0           0
     -126000           0      126000           0
           0           0           0           0

-------------------------------------------------------------------
ELEMENTO 4.

-------------------------------------------------------------------
MATRIZ k4.
k =

       84000           0      -84000           0
           0           0           0           0
      -84000           0       84000           0
           0           0           0           0

-------------------------------------------------------------------
ELEMENTO 5.

-------------------------------------------------------------------
MATRIZ k5.
k =

           0           0           0           0
           0       84000           0      -84000
           0           0           0           0
           0      -84000           0       84000
```

```
--------------------------------------------------------------------
ELEMENTO 6.

--------------------------------------------------------------------
MATRIZ k6.
k =

  1.0e+004 *

    3.9598   -3.9598   -3.9598    3.9598
   -3.9598    3.9598    3.9598   -3.9598
   -3.9598    3.9598    3.9598   -3.9598
    3.9598   -3.9598   -3.9598    3.9598

--------------------------------------------------------------------
ELEMENTO 7.

--------------------------------------------------------------------
MATRIZ k7.
k =

  1.0e+004 *

    3.9598    3.9598   -3.9598   -3.9598
    3.9598    3.9598   -3.9598   -3.9598
   -3.9598   -3.9598    3.9598    3.9598
   -3.9598   -3.9598    3.9598    3.9598

--------------------------------------------------------------------
ELEMENTO 8.

--------------------------------------------------------------------
MATRIZ k8.
k =

           0           0           0           0
           0      112000           0     -112000
           0           0           0           0
           0     -112000           0      112000

--------------------------------------------------------------------
```

```
-------------- MATRIZ DE RIGIDEZ DE LA ESTRUCTURA -----------------

KT =

  1.0e+005 *

    1.2360   -0.3960   -0.8400         0         0         0   -0.3960    0.3960         0         0
   -0.3960    1.2360         0         0         0         0    0.3960   -0.3960         0   -0.8400
   -0.8400         0    2.4960    0.3960   -1.2600         0         0         0   -0.3960   -0.3960
         0         0    0.3960    1.5160         0         0         0   -1.1200   -0.3960   -0.3960
         0         0   -1.2600         0    1.4751    0.3226   -0.2151   -0.3226         0         0
         0         0         0         0    0.3226    0.4839   -0.3226   -0.4839         0         0
   -0.3960    0.3960         0         0   -0.2151   -0.3226    1.4510   -0.0734   -0.8400         0
    0.3960   -0.3960         0   -1.1200   -0.3226   -0.4839   -0.0734    1.9998         0         0
         0         0   -0.3960   -0.3960         0         0   -0.8400         0    1.2360    0.3960
         0   -0.8400   -0.3960   -0.3960         0         0         0         0    0.3960    1.2360

-----------------------------------------------------------------
---------------------- SUBMATRIZ K11 ----------------------------

K11 =

  1.0e+005 *

    1.2360   -0.3960   -0.8400         0         0         0   -0.3960
   -0.3960    1.2360         0         0         0         0    0.3960
   -0.8400         0    2.4960    0.3960   -1.2600         0         0
         0         0    0.3960    1.5160         0         0         0
         0         0   -1.2600         0    1.4751    0.3226   -0.2151
         0         0         0         0    0.3226    0.4839   -0.3226
   -0.3960    0.3960         0         0   -0.2151   -0.3226    1.4510

---------------------- SUBMATRIZ K12 ----------------------------

K12 =

  1.0e+005 *

    0.3960         0         0
   -0.3960         0   -0.8400
         0   -0.3960   -0.3960
   -1.1200   -0.3960   -0.3960
   -0.3226         0         0
   -0.4839         0         0
   -0.0734   -0.8400         0
```

```
---------------------- SUBMATRIZ K21 -----------------------------

K21 =

  1.0e+005 *

    0.3960   -0.3960         0   -1.1200   -0.3226   -0.4839   -0.0734
         0         0   -0.3960   -0.3960         0         0   -0.8400
         0   -0.8400   -0.3960   -0.3960         0         0         0

---------------------- SUBMATRIZ K22 -----------------------------

K22 =

  1.0e+005 *

    1.9998         0         0
         0    1.2360    0.3960
         0    0.3960    1.2360

-------------------------------------------------------------------
------------------ VECTOR DE CARGAS CONOCIDAS --------------------

CC =

     0
     0
     0
     0
     5
    -6
     0

-------------------------------------------------------------------
-------------------- SOLUCIÓN DEL SUBSISTEMA 1 ---------------------
----------------- DESPLAZAMIENTOS DESCONOCIDOS --------------------

DD =

  1.0e-003 *

    0.1356
    0.0444
    0.1800
   -0.0470
    0.2514
   -0.2937
   -0.0032
```

```
-------------------- SOLUCION DEL SUBSISTEMA 2 ----------------------
---------------------- CARGAS DESCONOCIDAS -------------------------

CD =

   15.0000
   -5.0000
   -9.0000

-----------------------------------------------------------------
------------------------ FUERZAS INTERNAS -----------------------
-----------------  O FUERZAS EN LOS ELEMENTOS --------------------
ELEMENTO 1.


Fbar =

   -0.2663

-----------------------------------------------------------------
ELEMENTO 2.


Fbar =

   -7.2111

-----------------------------------------------------------------
ELEMENTO 3.


Fbar =

    9.0000

-----------------------------------------------------------------
ELEMENTO 4.


Fbar =

    3.7337

-----------------------------------------------------------------
```

```
------------------------------------------------------------------
ELEMENTO 5.


Fbar =

    3.7337

------------------------------------------------------------------
ELEMENTO 6.


Fbar =

   -5.2802

------------------------------------------------------------------
ELEMENTO 7.


Fbar =

    7.4477

------------------------------------------------------------------
ELEMENTO 8.


Fbar =

   -5.2663
---------------------- FUERZAS EN LOS ELEMENTOS -------------------

fba =

    1.0000   -0.2663
    2.0000   -7.2111
    3.0000    9.0000
    4.0000    3.7337
    5.0000    3.7337
    6.0000   -5.2802
    7.0000    7.4477
    8.0000   -5.2663

------------------------------------------------------------------
```

```
------------------------------------------------------------------
------------------------ TABLA DE RESULTADOS ---------------------
--------------------- LA SIGUIENTE TABLA MUESTRA -----------------
---------------- LAS CARGAS  Y LOS DESPLAZAMIENTOS -------------
--------------------- EN LOS NODOS DE LA ARMADURA ----------------

TABLA =

    1.0000         0    0.0001
    2.0000         0    0.0000
    3.0000         0    0.0002
    4.0000         0   -0.0000
    5.0000    5.0000    0.0003
    6.0000   -6.0000   -0.0003
    7.0000         0   -0.0000
    8.0000   15.0000         0
    9.0000   -5.0000         0
   10.0000   -9.0000         0

------------------------------------------------------------------
----------------- GRACIAS POR EMPLEAR ESTE PROGRAMA --------------
```

Figura 4-4

Remítase al EJERCICIO 1-1 en el que la resolución de la armadura fue efectuada sin el uso del código. Obsérvese que los resultados de la solución “a mano” prácticamente coinciden con los resultados proporcionados por el código MATRIZ_RIG_ARMADURA de MATLAB.

Ahora se realizan algunas aclaraciones y sugerencias, es decir, se ofrecen algunos tips para el correcto uso del código.
Según sea la armadura a analizar, la hoja de datos de la figura 4-1 se adapta con ligeras modificaciones. Concretamente, las unidades pueden ser otras, así que, por ejemplo, m puede ser reemplazada por ft o T por lb.

En la figura 4-3, se visualiza que el vector de cargas conocidas abarca de B12 a B18 y que el vector de desplazamientos conocidos comprende desde D12 hasta D14. De ahí que casi al inicio del código se haya puesto

```
%VECTOR DE CARGAS CONOCIDAS%
CC=xlsread('DATOS PROGRAMA.xlsx','DATOS ARMADURA','B12:B18');
%VECTOR DE DESPLAZAMIENTOS CONOCIDOS%
DC=xlsread('DATOS PROGRAMA.xlsx','DATOS ARMADURA','D12:D14');
```

Si las dimensiones de C_C y/o D_C son distintas, únicamente se debe hacer un ajuste en la parte recién mostrada de la programación con el objeto de que haya compatibilidad con la hoja de datos de Excel.

Si se debe resolver un ejercicio en el que se tenga entre los datos de la armadura que AE es constante para todos los elementos (este caso se puede dar cuando la armadura es estáticamente determinada o cuando la armadura es estáticamente indeterminada sin asentamiento en alguno, varios o todos sus soportes) entonces es conveniente hacer unitarios estos términos, por consiguiente, se digita un 1 en las columnas G y H para cada elemento. Cuando el programa imprima los resultados, aunque no aparezca en la pantalla, el usuario debe intuir que estarán afectadas por un factor AE: la matriz de rigidez de cada elemento, y la matriz de rigidez de la estructura y sus submatrices; además, el vector de desplazamientos desconocidos estará multiplicado por $1/AE$.

El código que se ofrece no es útil cuando se desea analizar alguna armadura con un rodillo en un plano inclinado.

PROBLEMA DE PROYECTO

4.1 Elabore una subrutina o efectúe una adaptación al código en MATLAB que se ofrece en este libro, el cual analiza armaduras con el método matricial de la rigidez, de tal modo que este sea capaz de resolver armaduras con un rodillo en un plano inclinado.

BIBLIOGRAFÍA

Hibbeler, R. (2012). *Análisis estructural*. México: PEARSON.

Magdaleno, C. (1978). *Análisis Matricial de Estructuras Reticulares*. México: INDEPENDIENTE.

Tena, A. (2007). *Análisis de Estructuras con Métodos Matriciales*. México: LIMUSA.

Colindres, R. (1978). *Dinámica de Suelos y Estructuras Aplicadas a la Ingeniería Sísmica*. México: LIMUSA.

Ortiz, D. (2013). Tesis: *Problemario de Análisis de Estructuras Isostáticas e Hiperestáticas para Vigas, Marcos y Armaduras en* R^2*.* México: UNAM.

El libro se ha escrito con la finalidad de contribuir en el apoyo a profesores, estudiantes y todos los interesados en general en la enseñanza y el aprendizaje del análisis de armaduras empleando el método matricial de la rigidez, el cual representa un apartado trascendental en la disciplina denominada análisis estructural. Esta última constituye uno de los pilares más importantes de la carrera de Ingeniería Civil y de otras como Ingeniería Mecánica, Ingeniería Aeronáutica y Arquitectura.

El método matricial de la rigidez es un método de cálculo aplicable tanto a estructuras isostáticas como estructuras hiperestáticas de elementos que se comportan de forma elástica y lineal. Es también denominado método de los desplazamientos y en inglés se le conoce como direct stiffness method (DSM, método directo de la rigidez).

El énfasis de este libro es resolver de manera minuciosa y clara una gran variedad de ejercicios sobre armaduras isostáticas e hiperestáticas a través del método directo de la rigidez. La solución se hace manualmente y empleando la programación con MATLAB. Esto tiene como objetivo ofrecer al lector una idea muy acercada de cómo efectúan el análisis estructural de armaduras los software de estructuras disponibles hoy en día como el SAP 2000, ETABS o ANSYS, debido a que estos trabajan con ese método. Por otra parte, en automático se le brinda al lector un medio para comprobar los resultados obtenidos en los programas de cálculo mencionados, en vez de limitarse simplemente a confiar en los resultados generados.

A continuación se proporciona el enfoque seguido en esta obra. El libro se divide en dos partes. La primera está conformada por tres capítulos y comprende los ejercicios resueltos “a mano” de armaduras con el método directo de la rigidez. En el capítulo 1 se analizan armaduras simples, compuestas y complejas. Las armaduras con un asentamiento en uno o más de sus soportes son estudiadas en el capítulo 2. En el capítulo 3 se verán armaduras con un rodillo en un plano inclinado.
La segunda parte del libro abarca en el último capítulo la programación del método de rigidez aplicado a armaduras. Específicamente, en el capítulo 4 se presenta el código en MATLAB y un manual para el usuario del mismo.

RESOLUCIÓN DE ARMADURAS EN 2D CON EL MÉTODO MATRICIAL DE LA RIGIDEZ

David Ortiz Soto