ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS

Problemas resueltos

Segunda Edición

(Revisada)

“Prometimos vencer y vencimos”

David Ortiz Soto

ACERCA DEL AUTOR

David Ortiz Soto es ingeniero civil egresado de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), Facultad de Estudios Superiores Aragón (FES Aragón), con créditos concluidos en la Maestría en Ingeniería Civil, área disciplinaria de Estructuras, por la Sección de Estudios de Posgrado e Investigación (SEPI) de la Escuela Superior de Ingeniería y Arquitectura, Unidad Zacatenco (ESIA-UZ), del Instituto Politécnico Nacional (IPN).

Actualmente desarrolla su tesis de Maestría denominada *"Efectos de la deformación del creep en columnas de concreto"*, siendo el Dr. Ernesto Pineda León el director de esta.

El Ing. David Ortiz es autor, con los ingenieros Hugo Martínez, Sergio Omar Berruecos, Daniel Hernández, et al., del libro *"Estructuras Isostáticas en 2D: Problemas Resueltos",* el cual presentó oficialmente por primera vez en el *evento* Simposio de Investigación en Sistemas Constructivos, Computacionales y Arquitectónicos (SISCCA) 2014 con sede en la Universidad Juárez del Estado de Durango, FICA. De igual forma, es autor del libro "Resolución de armaduras en *2D con el método matricial de la rigidez"* y es uno de los editores de la WEB de Ingeniería Civil más importante de América Latina llamada *"CivilGeeks"*, en la que ha escrito diversos artículos. Estuvo como invitado en el quinto aniversario del Tecnológico Nacional de México, Instituto Tecnológico de Iztapalapa III (TecNM, ITI III), donde ofreció conferencia de *"Análisis Estructural"*. Asimismo, es uno de los creadores de la Biblioteca que lleva por nombre *"Problemario de Análisis de Estructuras en 2D y 3D"*.

Hoy en día, es el representante de la comunidad estudiantil de posgrado de ESIA Zacatenco.

Ha sido invitado varias veces al Programa de Radio *"Ingenio Civil"* de Nuestra Voz Radio: ¡La Voz del Pueblo Organizado!; en alguna emisión de tal programa alternó con el Ph. D. Genner Villarreal Castro de Perú.

Muchos años vivió en Zumpango, pero actualmente radica en Tecámac, ambos municipios del Estado de México, colindantes con el D. F.

ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS
Problemas resueltos

ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS
Problemas resueltos

SEGUNDA EDICIÓN

DAVID ORTIZ SOTO
Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Ingeniería y Arquitectura

Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Estudios Superiores Aragón

Revisión Técnica:
Dr. Ernesto Pineda León
Docente en Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Ingeniería y Arquitectura
Sección de Estudios de Posgrado e Investigación, y Licenciatura

Universidad de Londres
Queen Mary College

Universidad de Sonora
Facultad de Ingeniería

México 2015

Datos de catalogación bibliográfica

Ortiz, D.

Análisis de Estructuras: Problemas Resueltos

Segunda edición

INDEPENDIENTE, México, 2015

Distribuidora virtual oficial: CivilGeeks

Número de Registro de Obra 03-2018-072610372700-01

Área: Ingeniería

Formato: Carta 21.6 cm x 27.9 cm

No está permitida la reproducción total o parcial de este libro, ni su tratamiento informático, ni la transmisión de ninguna forma o cualquier medio, ya sea electrónico, mecánico, por fotocopia, por registro u otros métodos, con fines lucrativos.

Obra inscrita en el Registro Público del Derecho de Autor, SEP, INDAUTOR por el autor David Ortiz Soto.

Impreso en México

DEDICATORIAS

El presente libro está dedicado a todos los estudiantes y profesores que han levantado la voz para exigir sus derechos y un sistema justo en el Instituto Politécnico Nacional (IPN) sin miedo a represalias, haciendo uso del “derecho a pensar”.

Siendo hoy 27 de septiembre del 2014, a 10 días del “PARO INDEFINIDO” que han organizado diversos estudiantes de la Escuela Superior de Ingeniería y Arquitectura, Unidad Zacatenco, bajo el argumento de no haber recibido respuesta a su pliego petitorio por parte de las autoridades, el movimiento está más fuerte que nunca y nadie dará un paso atrás hasta haber conseguido el objetivo. La principal inconformidad es el nuevo plan de estudios (2014) impuesto en ESIA UZ y considerado de menor calidad al precedente (2004), por lo que se ha exigido abrogación del mismo.

Muchos profesores tanto de Licenciatura como de Posgrado se han solidarizado con este movimiento.

La presente obra también se ha realizado en apoyo absoluto a los investigadores de la SEPI ESIA Zacatenco, quienes han protestado ante lo que ellos han denominado “la imposición de un jefe ilegítimo de posgrado”.

Finalmente, va dedicado para todos aquellos que en conjunto han formado la “Resistencia Global Politécnica”, manifestándose en contra del “Nuevo Reglamento Interno del IPN” y exigiendo la destitución de diversos directivos corruptos, desde vocacionales hasta unidades de nivel superior: asimismo está dedicado a todos los solidarios pertenecientes a otras universidades como la UNAM, UAM, etc., hasta la población en general que se han unido a la lucha.

Dedico de manera especial este libro a Dios, a mi madre Clara y mi padre Antonio, así como a mis hermanos José Carlos y Antonio.

A mis abuelas Paulina Ramírez y Juana Marín.

A mis sobrinos Diego y Antonio.

He sido bendecido por el apoyo y afecto que me ha brindado cada uno de los miembros de mi familia a lo largo de mi vida, lo cual les agradezco infinitamente, incluyendo aquellos que se han adelantado (abuelos Rafael y Antonio, y tía Lucía).

Con toda sinceridad, les doy las gracias a todos mis amigos(as), compañeros(as), profesores(as), investigadores y colegas que siempre me han respaldado.

Agradezco a las Instituciones en las que me he formado académicamente a nivel de Licenciatura y Posgrado: FES Aragón UNAM y ESIA UZ IPN.

Hago un reconocimiento especial al amigo e investigador Dr. Ernesto Pineda León por todos los conocimientos que me ha transmitido y por haber efectuado la revisión técnica de este libro.

A todas las personas de México y del extranjero que directa o indirectamente me han apoyado y/o han depositado su confianza en mí.

A todo aquel que con los puños en alto sigue luchando por un mundo más justo (estudiantes, profesionistas honestos, obreros, campesinos, jornaleros y demás). Somos el pueblo trabajador, los siempre condicionados y reprimidos.

A la memoria de mis amigos Juan, Miguel, Luis y Gilberto…buen viaje.

A los lectores, esperando que este texto sea de su agrado y utilidad.

“La información no es sólo para el que la paga, es para todos(as).”

“No hay fronteras ni banderas para el conocimiento.”

“Escribir para resistir en un mundo de opresión.”

Gracias por todo su apoyo a todos(as) ustedes y por siempre alentarme a seguir adelante.

LA RESISTENCIA GLOBAL DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL (IPN)
Y LAS UNIVERSIDADES SOLIDARIAS

¡Basta ya! mi futuro no está en venta…
hermano no te vayas a la deriva…
mejor pon el puño arriba…
porque mi gente está apoyando a esta nación…
aquí estamos todos resistiendo
vamos todos a bordo, que no se quede nadie
cuidando al compañero y que aquí nadie nos calle…
organización y hay que tener cuidado
hay muchos que provocan porque vienen de infiltrados
son tan ignorantes, se olvidan de su pueblo,
confunden intereses y creen son parte del dueño…
nuestro delito es ser conscientes…
no caigo en el juego de la desinformación…
vivir en libertad, disfrutar del consenso, fomentar el apoyo mutuo
solidaridad y diversidad sexual
y todo nuestro apoyo a las comunidades étnicas
voy a seguir creyendo… que la razón más justa es la verdad
nadie va parar la libertad…
busquemos el derecho de imaginar

By el artista mexicano Herón Skalo

CONTACTO

Cuenta Personal

David Ortiz M en I https://www.facebook.com/davidortizMenI

Página de la Biblioteca

Se les hace la amable invitación a unirse a la página oficial de Facebook de la Biblioteca; para localizarla, se les sugiere teclear en el buscador las palabras Problemario de Análisis de Estructuras en 2D Y 3D.

Si buscas un sitio donde se haga válido el supuesto derecho que todos tenemos de "La educación es gratuita y no un privilegio", la Biblioteca citada es uno de los lugares indicados, pues toda la información que elaboramos (Libros, Tesis, Vídeos Tutoriales y Manuales) profesionistas de México, Perú, Bolivia y Ecuador es de libre descarga. Si necesitas una dosis de entretenimiento, ahí la encontrarás. Siempre serás bienvenido al lugar donde a través de la expresión artística manifestamos nuestra inconformidad ante un sistema injusto y carente de oportunidades para todos por igual. Es en la literatura de Ingeniería más combativa que jamás hayas visto donde podrás notar que pintamos las banderas de un solo color, pues todos(as) tienen cabida, y los egos y las envidias no existen. Que disfruten de nuestra producción intelectual: es la novel propuesta del siglo XXI.

PREFACIO

El libro se ha escrito con la finalidad de contribuir en el apoyo a profesores, estudiantes y todos los interesados en general en la enseñanza y el aprendizaje del análisis estructural, el cual representa un apartado trascendental en el área de la Ingeniería Estructural. Esta a su vez, constituye una de las partes más importantes de la carrera de Ingeniería Civil y de otras carreras como Ingeniería Mecánica, Ingeniería Aeronáutica y Arquitectura.

Una estructura es el conjunto de elementos resistentes, convenientemente vinculados entre sí, que accionan y reaccionan bajo los efectos de las cargas; su finalidad es resistir y transmitir cargas a otros elementos y a los apoyos, y de ese modo garantizar su correcto funcionamiento. Los requisitos o exigencias básicas que una estructura debe cumplir son: equilibrio y estabilidad.

Se entiende por análisis de una estructura al proceso sistemático que concluye con el conocimiento de las características de su comportamiento bajo un cierto estado de cargas; se incluye, habitualmente, bajo la denominación genérica de estudio del comportamiento tanto el estudio del análisis de los estados tensional y deformacional alcanzados por los elementos y componentes físicos de la estructura como la obtención de conclusiones sobre la influencia recíproca con el medio ambiente o sobre sus condiciones de seguridad. Es entonces el objetivo del análisis de una estructura, la predicción de su comportamiento bajo las diferentes acciones para las que se postule o establezca que debe tener capacidad de respuesta.

Novedades en esta edición

El autor, bajo la misma tendencia de elaborar literatura de Ingeniería altruista, consiente y combativa, en esta edición lanza un mensaje de solidaridad hacia el movimiento estudiantil gestado inicialmente en ESIA UZ y que a la postre se convirtió en global del IPN, Institución a la que pertenece. En la portada se aprecia una imagen que dice ESIA Zacatenco en pie de lucha, acompañada de la frase “prometimos vencer y vencimos”.

Se presenta un ejemplo resuelto de una viga con sección variable, empleando el método de las fuerzas. Se incluyen ejercicios resueltos de armaduras por el método de flexibilidades, para los casos en el que la estructura es indeterminada externamente y es indeterminada tanto externamente como internamente. Asimismo, se implementan ejercicios para marcos con un soporte girado y con una columna inclinada, por el método de las fuerzas. Se incorpora la resolución de marcos con el método de la rigidez directa, para los casos de: la existencia de un soporte de rodillos inclinado, alguna rótula intermedia, y con una columna de doble altura. Se ofrece una explicación mucho mejor de la solución de la ecuación

diferencial del movimiento para los sistemas de un grado de libertad con y sin amortiguamiento. En las páginas finales del libro, el autor hace una síntesis de lo que fue el movimiento estudiantil citado.

Enfoque

En cada capítulo del libro, se resuelve de manera minuciosa y clara una gran variedad de ejercicios sobre estructuras isostáticas e hiperestáticas, y sistemas de un grado de libertad con amortiguación y sin amortiguación, según sea el caso. Esto tiene como objetivo ofrecer al lector una idea muy acercada de cómo trabajan los software de estructuras disponibles hoy en día, por ejemplo, SAP2000, ETABS o ANSYS, debido a que estos emplean las teorías que en la presente obra se tratan.

Por otra parte, en automático se le brinda al lector un medio para comprobar los resultados obtenidos en los programas de cálculo mencionados, en vez de limitarse simplemente a confiar en los resultados generados. Desde un punto de vista académico, la resolución detallada de ejercicios muy variados, desde simples hasta muy complejos, permiten al estudiante tener más práctica y por ende desarrollar de forma más amplia sus habilidades, aterrizando los conceptos aprendidos en clase y de ese modo, enfrentar con más facilidad los ejercicios que se le dejan extra-clase o bien, llegar mejor preparado para algún examen.

Contenido

El libro se divide en tres capítulos. En el capítulo 1 se analizan estructuras isostáticas únicamente, específicamente, vigas, pórticos, armaduras y arcos. Esta parte vendría siendo una introducción al análisis estructural; se explica la forma de calcular el grado de indeterminación, las reacciones en los soportes, de determinar las funciones de las fuerzas cortante y normal, y de momento flexionante empleando el método de las secciones, de dibujar los diagramas de los elementos mecánicos, de inferir las fuerzas en las barras con el método de los nodos en las armaduras, etc.

En el capítulo 2 se estudian las estructuras estáticamente indeterminadas; los métodos que se emplean para ello son el de flexibilidades (también llamado de las fuerzas) y el matricial de la rigidez (también conocido como de la rigidez directa), y se aplican solo a armaduras, vigas y marcos, en el plano.

Finalmente, el capítulo 3 se enfoca a la resolución de sistemas de un grado de libertad con y sin amortiguamiento, tanto para casos en los que la carga es nula como para los casos en los que hay excitación armónica.

DAVID ORTIZ SOTO

CONTENIDO

1 ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS 1

Ejercicio 1.1 Funciones de Fuerzas cortante y normal, y de momento flector de una viga isostática con un soporte inclinado 1

Ejercicio 1.2 Diagramas de fuerza cortante y de momento para una viga con carga triangular 8

Ejercicio 1.3 Análisis de una viga con carga compleja 12

Ejercicio 1.4 Diagramas de fuerza cortante y normal, y de momento para un pórtico 25

Ejercicio 1.5 Fuerzas en las barras de una armadura simétrica 36

Ejercicio 1.6 Fuerzas en las barras de una armadura no simétrica 42

Ejercicio 1.7 Resolución de un arco triarticulado parabólico 47

Ejercicio 1.8 Resolución de un arco triarticulado circular 54

2 ANÁLISIS ESTRUCTURAL 63

Ejercicio 2.1 Método de flexibilidades aplicado a una viga 63

Ejercicio 2.2 Método de flexibilidades aplicado a una viga con un asentamiento en un soporte 74

Ejercicio 2.3 Método de flexibilidades aplicado a una viga con un asentamiento en un soporte modelado como resorte helicoidal 84

Ejercicio 2.4 Resolución de una viga de sección variable empleando el método de las fuerzas 93

Ejercicio 2.5 Método de flexibilidades aplicado a un marco con una redundante 102

Ejercicio 2.6 Método de flexibilidades aplicado a un pórtico con varias redundantes y un asentamiento en un apoyo 113

Ejercicio 2.7 Método de flexibilidades aplicado a un marco con una columna inclinada 126

Ejercicio 2.8 Resolución de una armadura externamente indeterminada con el método de flexibilidades 142

Ejercicio 2.9 Resolución de una armadura con indeterminación externa e interna con el método de flexibilidades 156

Ejercicio 2.10 Método de la rigidez matricial aplicado a una armadura en 2D 176

Ejercicio 2.11 Análisis de una armadura con un rodillo en un plano inclinado empleando el método de la rigidez matricial 197

Ejercicio 2.12 Resolución de una viga con el uso del método de la rigidez directa 206

Ejercicio 2.13 Solución de una viga con asentamiento en un apoyo por medio del método de la rigidez matricial 216

Ejercicio 2.14 Resolución de un pórtico plano con el método de la rigidez directa 222

Ejercicio 2.15 Análisis de un marco con un rodillo inclinado, en 2D, con el método matricial de la rigidez 231

Ejercicio 2.16 Resolución de un marco en el plano, con una rótula intermedia, aplicando el método matricial de la rigidez 238

Ejercicio 2.17 Resolución de un pórtico con una columna de doble altura, empleando el método de la rigidez directa 248

3 INTRODUCCIÓN A LA DINÁMICA ESTRUCTURAL.....261

Ejercicio 3.1 Análisis de un sistema de un grado de libertad, sin amortiguación 261

Ejercicio 3.2 Análisis de un sistema de un grado de libertad, con amortiguación 265

Ejercicio 3.3 Respuesta de un sistema de un grado de libertad sin amortiguación, a excitación armónica 276

Ejercicio 3.4 Respuesta de un sistema de un grado de libertad amortiguado, a excitación armónica 279

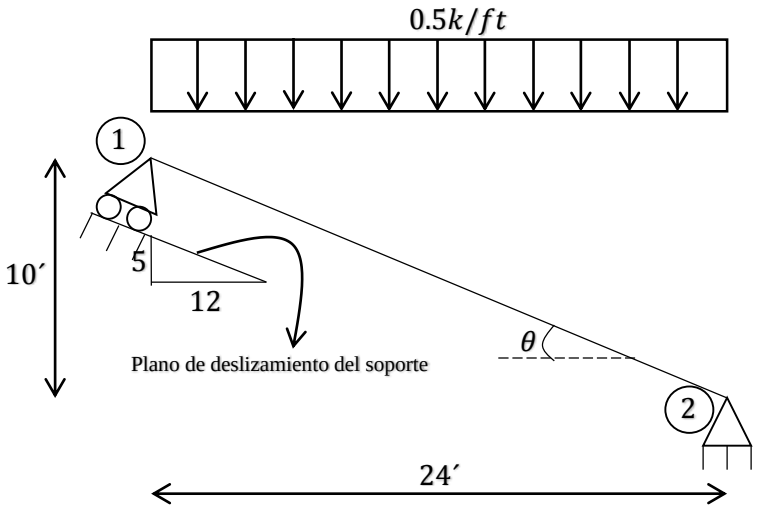
BIBLIOGRAFÍA.....283

LA REPRESIÓN DE LAS AUTORIDADES HACIA LOS ESTUDIANTES SE HIZO PRESENTE

CAPÍTULO 1
ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS

Ejercicio 1.1 Funciones de Fuerzas cortante y normal, y de momento flector de una viga isostática con un soporte inclinado.

Instrucciones Determine las reacciones en los apoyos de la estructura mostrada en la figura 1-1a producidas por las cargas indicadas. Use el método de las secciones para deducir las expresiones algebraicas que describen la variación de los elementos mecánicos.



(a)

Figura 1-1

SOLUCIÓN

Verificación del grado de indeterminación

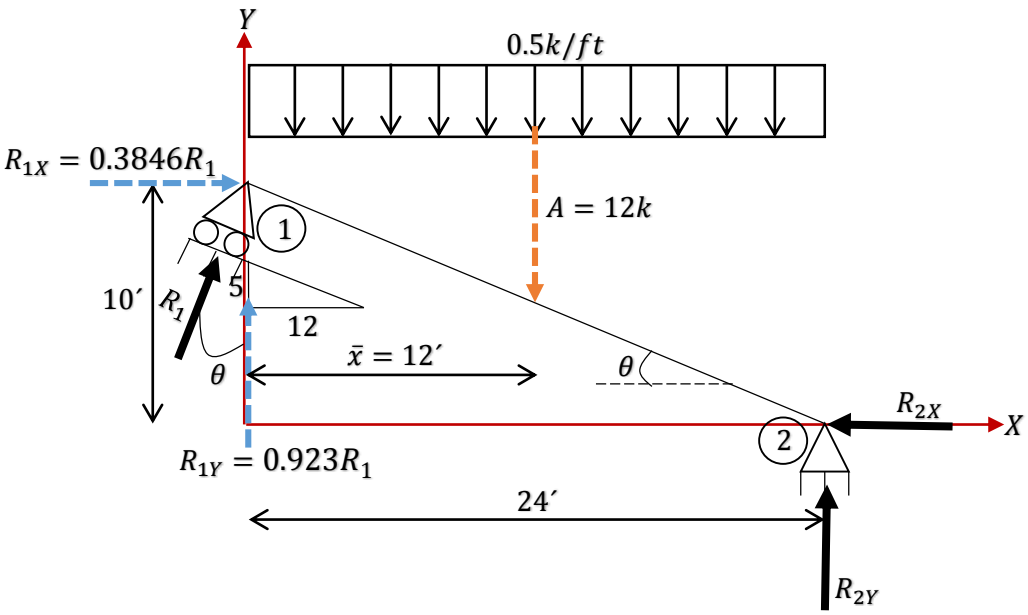
Se identifican las fuerzas reactivas en los apoyos (soportes); el soporte 1 es un rodillo, por lo que la reacción R_1 es perpendicular al plano de deslizamiento del apoyo, mientras que el soporte 2 es articulado y en él se generan dos reacciones, una horizontal (R_{2X}) y una vertical (R_{2Y}). Como hay tres incógnitas de reacción,

$r = 3$, tres ecuaciones de equilibrio ($\sum FX = 0, \sum FY = 0, \sum M = 0$), $n = 3$, y ninguna ecuación de condición (no existe articulación (rótula) ni conexión cortante intermedia), $c = 0$, se concluye que la viga es isostática o estáticamente determinada debido a que se cumple que $r = n + c$, puesto que $3 = 3 + 0$.

Si $r > (n + c)$, entonces la viga es estáticamente indeterminada, o bien, en caso de que $r < (n + c)$, se infiere que la viga es inestable.

Cálculo de las reacciones en los apoyos

Diagrama de cargas. Este diagrama se muestra en la figura 1-1b. El sentido de cada reacción ha sido supuesto arbitrariamente debido a que las fuerzas reactivas no son conocidas. Para la carga distribuida se tienen que determinar: a) la carga concentrada equivalente, es decir, la magnitud de la fuerza resultante de la carga, que es igual al área bajo la curva de carga (en este caso, por ser carga uniforme es el área del rectángulo) y b) el centroide de dicha área a través del cual pasa la línea de acción de la resultante,o sea, se halla el punto de aplicación de la resultante (para una carga rectangular, el centroide se localiza a la mitad de la longitud de la base).



(b)

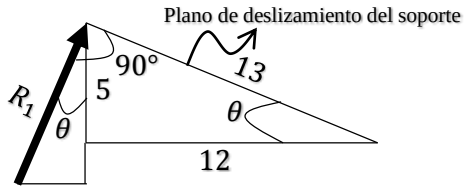
Por otra parte, se han establecido en sus cuadrantes positivos a los ejes coordenados X y Y más convenientes para aplicar las ecuaciones de equilibrio en

la estructura; esto último hace que sea necesario descomponer a R_1 en sus componentes rectangulares horizontal y vertical, las cuales han sido etiquetadas como R_{1X} y R_{1Y} respectivamente.

La fuerza resultante de la carga uniforme distribuida y su punto de aplicación son

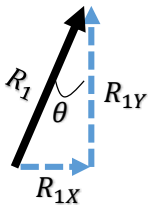
$$A = (0.5k/ft)(24ft) = 12k \qquad \overline{x} = \frac{1}{2}(24') = 12'$$

De acuerdo a las figuras 1-1c y 1-1d, las componentes rectangulares de la reacción R_1 en el plano $X - Y$ son



(c)

$$\theta = \tan^{-1}\frac{5}{12} = 22.6198°$$



(d)

$$R_{1X} = R_1 \sin\theta = R_1 \cdot sin22.6198° = 0.3846R_1$$

$$R_{1Y} = R_1 \cos\theta = R_1 \cdot cos22.6198° = 0.923R_1$$

Ecuaciones de equilibrio. Se aplican al diagrama de cargas para calcular las reacciones en los apoyos; la convención de signos que se adopta es arbitraria. En caso de que la solución de las ecuaciones de equilibrio proporcione una magnitud negativa para una fuerza reactiva, su sentido propuesto debe ser invertido.

Tomando momentos alrededor del punto 2 considerando los ejes que pasan por tal punto, se puede despejar directamente el valor de R_1.

$$\circlearrowleft + \sum M2 = 0 \Rightarrow R_{1X}(10) + R_{1Y}(24) - 12(12) = 0$$

$$(0.3846R_1)(10) + (0.923R_1)(24) - 144 = 0 \Rightarrow R_1 = \frac{144}{26} = 5.5385$$

$$\therefore\ R_1 = 5.5385k\uparrow$$

Los valores de las componentes rectangulares de $R_1 = 5.5385k$ son

$$R_{1X} = 0.3846R_1 = 0.3846(5.5385k\ ) = 2.13k \dashrightarrow$$

$$R_{1Y} = 0.923R_1 = 0.923(5.5385k) = 5.112k \dashuparrow$$

Finalmente, las reacciones R_{2X} y R_{2Y} se obtienen al plantear las dos ecuaciones de equilibrio restantes, es decir, las de fuerzas.

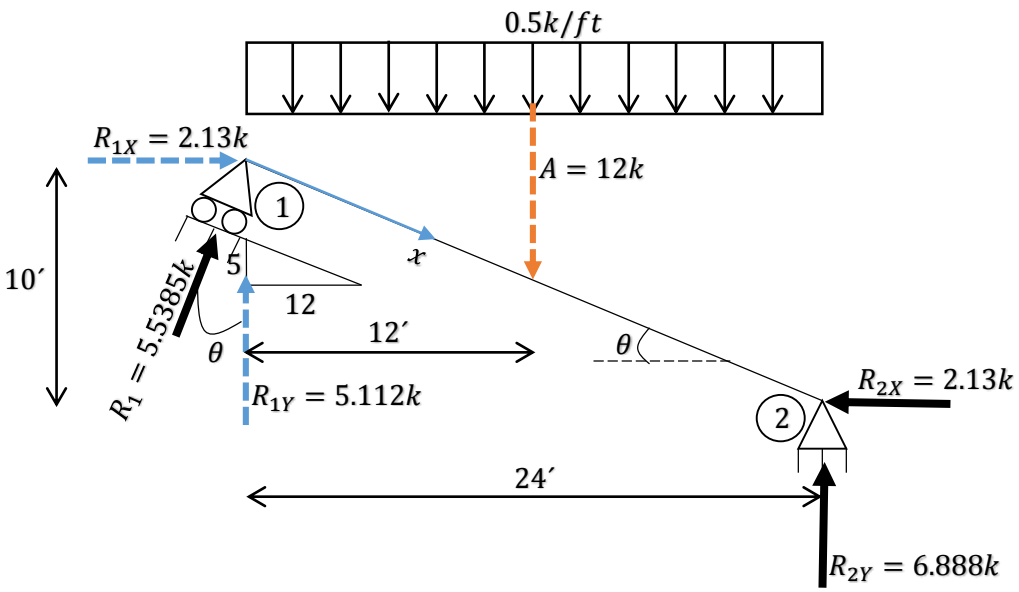
$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow R_{1X} - R_{2X} = 0 \Rightarrow 2.13 - R_{2X} = 0 \Rightarrow R_{2X} = 2.13$$

$$\therefore R_{2X} = 2.13k \leftarrow$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow R_{1Y} - U_R + R_{2Y} = 0 \Rightarrow 5.112 - 12 + R_{2Y} = 0 \Rightarrow R_{2Y} = 6.888$$

$$\therefore R_{2Y} = 6.888k \uparrow$$

Funciones de fuerza cortante, de fuerza normal y de momento



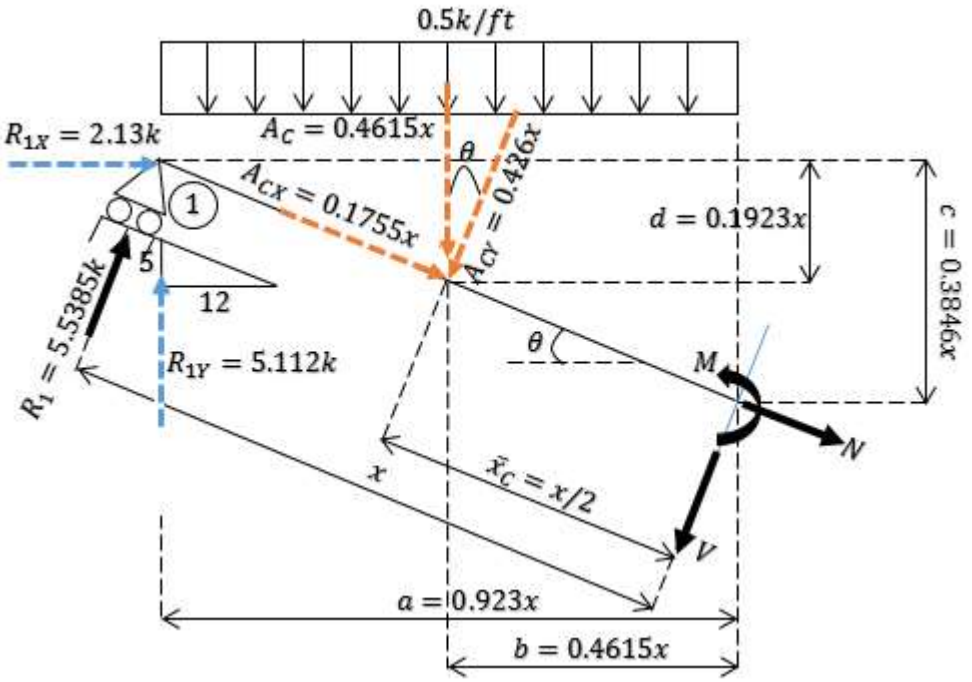
(e)

En la figura 1-1e se visualizan los valores de las reacciones en los soportes con sus correspondientes sentidos adecuados. A continuación se aplica el método de las

secciones (cortes). La distribución de la carga actuante no presenta discontinuidad, así que sólo será necesario efectuar un corte perpendicular al eje longitudinal de la viga para definir los elementos mecánicos, también llamados acciones internas, que corresponden a la fuerza axial o normal N, la cual actúa en la misma dirección que la del eje longitudinal de la viga, la fuerza cortante V que es perpendicular a N y el momento flexionante M; se considera como origen del sistema coordenado al punto 1, así que la coordenada x es positiva hacia la derecha y hacia abajo, y es válida para la región $1-2$ $(0 \leq x \leq 26')$, debido a que la longitud de la viga es $L = \sqrt{(24')^2 + (10')^2} = 26'$.Se secciona la viga en un punto arbitrario (intermedio en el segmento $1-2$) a una distancia x del punto 1.

En la figura 1-1f se proporciona un diagrama de cuerpo libre del segmento de viga con longitud x. El área A_C bajo el rectángulo y su centroide $\bar{x}_C$ deben determinarse. Las acciones internas aparecen actuando en sus direcciones positivas de acuerdo a la convención de signos más usual y sus funciones se deducen aplicando las ecuaciones de equilibrio cuya convención de signos si puede ser indistinta en el diagrama mencionado.

$$0 \leq x \leq 26'$$



(f)

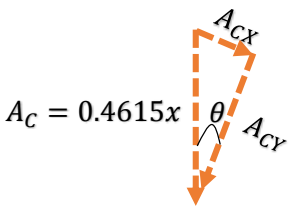
La carga concentrada equivalente de la carga distribuida uniforme del corte y su punto de aplicación son, respectivamente

$$A_C = (0.5)(0.923x) = 0.4615x \qquad \bar{x}_C = \frac{1}{2}(x) = \frac{x}{2}$$

Con base en la figura 1-1g se determinan las componentes rectangulares de la fuerza resultante A_C cuyas líneas de acción coinciden con las de N y V, es decir, las componentes que actúan en forma paralela y perpendicular al eje longitudinal de la viga.

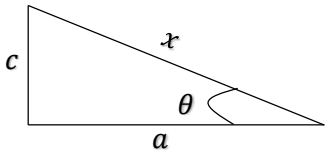
$$A_{CX} = A_C \sin\theta = 0.4615x(0.3846) = 0.1775x$$

$$A_{CY} = A_C \cos\theta = 0.4615x(0.923) = 0.426x$$



(g)

Las distancias auxiliares a, b, c y d se deducen a partir del triángulo rectángulo que se observa en la figura 1-1h.



(h)

$$c = x\sin\theta = 0.3846x$$

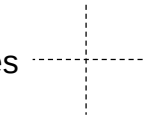
$$a = x\cos\theta = 0.923x$$

$$b = \frac{a}{2} \quad d = \frac{c}{2}$$

Si tomamos momentos alrededor del punto del corte, puede obtenerse directamente el momento M en función de x.

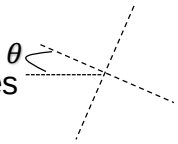
$$\circlearrowright + \sum Mcorte = 0$$

- Opción 1

Usando los momentos de las fuerzas con respecto a los ejes  que pasan por el punto del corte se tiene

$$R_{1Y}(a) + R_{1X}(c) - A_C(b) - M = 0$$
$$5.112(0.923x) + 2.13(0.3846x) - (0.4615x)(0.4615x) - M = 0$$
$$M = -0.213x^2 + 5.538x$$

- Opción 2

Considerando los momentos de las fuerzas con respecto a los ejes 

que pasan por el punto del corte obtenemos

$$R_1(x) - A_{CY}\left(\frac{x}{2}\right) - M = 0 \Rightarrow 5.5385(x) - (0.426x)\left(\frac{x}{2}\right) - M = 0$$
$$M = -0.213x^2 + 5.5385x$$

De la suma de fuerzas en la dirección perpendicular al eje longitudinal de la viga igual a cero, se puede obtener una solución directa para la fuerza cortante V.

$$\nearrow + \sum FY = 0 \Rightarrow R_1 - A_{CY} - V = 0 \Rightarrow 5.5385 - 0.426x - V = 0$$

$$V = 5.5385 - 0.426x$$

También, V es resultado de

$$V = \frac{dM}{dx} = \frac{d}{dx}(-0.213x^2 + 5.5385x) = 5.5385 - 0.426x$$

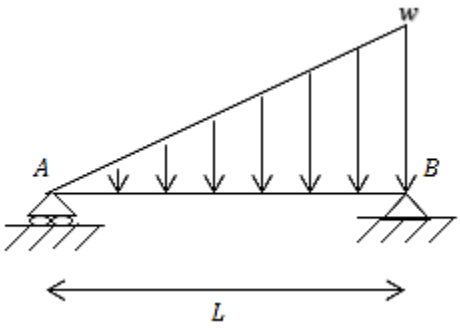
Lo anterior se debe a que como se observará en el siguiente ejercicio, la pendiente del diagrama de momento (dM/dx) es igual a la intensidad de la fuerza cortante en ese punto. Por otra parte, se establece que la pendiente del diagrama de fuerza cortante, en un punto (dV/dx) es igual a la intensidad de la carga distribuida $w(x)$ en ese punto.

Al plantear la ecuación que establece que la suma de fuerzas en la dirección del eje longitudinal de la viga es equivalente a cero, es posible despejar el valor de la fuerza normal N.

$$\searrow + \sum FX = 0 \Rightarrow A_{CX} + N = 0 \Rightarrow 0.1775x + N = 0 \Rightarrow N = -0.1775x$$

Ejercicio 1.2 Diagramas de fuerza cortante y de momento para una viga con carga triangular.

Instrucciones Para una viga simplemente apoyada de longitud L que soporta una carga cuya variación lineal va de 0 en el apoyo A hasta w en el apoyo B, figura 1-2a, dibuje los diagramas de momento y cortante.



(a)

Figura 1-2

SOLUCIÓN

Cálculo de las reacciones en los apoyos

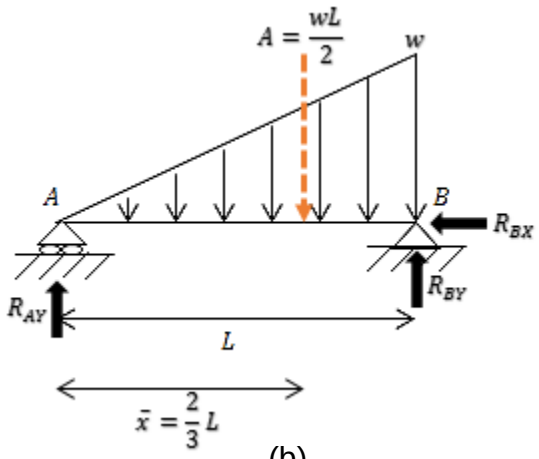
Diagrama de cargas. Las reacciones en los apoyos han sido identificadas y el sentido de cada una de ellas se ha supuesto arbitrariamente por desconocerse; por otra parte, se ha determinado la carga concentrada equivalente A para la carga distribuida de intensidad con variación lineal y su punto de aplicación $\bar{x}$. La figura 1-2b indica el diagrama de cargas de la estructura.

Ecuaciones de equilibrio. Se aplican al diagrama de cargas para obtener las fuerzas reactivas en los soportes; la convención de signos a utilizar es indistinta.

$$\circlearrowright+\sum MA = 0 \Rightarrow \left(\frac{wL}{2}\right)\left(\frac{2}{3}L\right) - (R_{BY})(L) = 0 \Rightarrow R_{BY} = \frac{wL^2}{3L} \Rightarrow \therefore R_{BY} = \frac{wL}{3}\uparrow$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow \therefore R_{BX} = 0$$

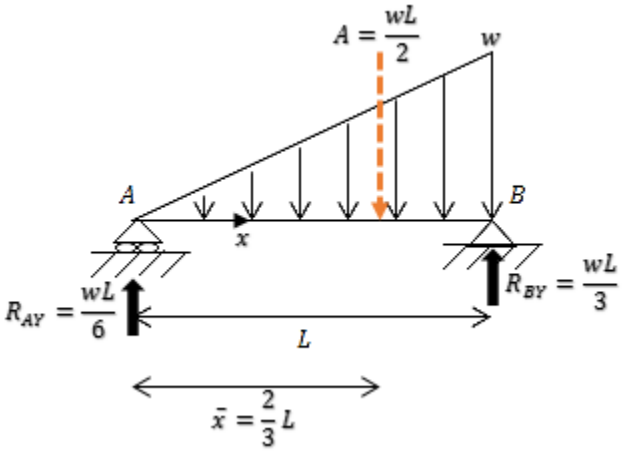
$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow R_{AY} - \frac{wL}{2} + \frac{wL}{3} = 0 \Rightarrow \therefore R_{AY} = \frac{wL}{6} \uparrow$$



(b)

Funciones de fuerza cortante y de momento

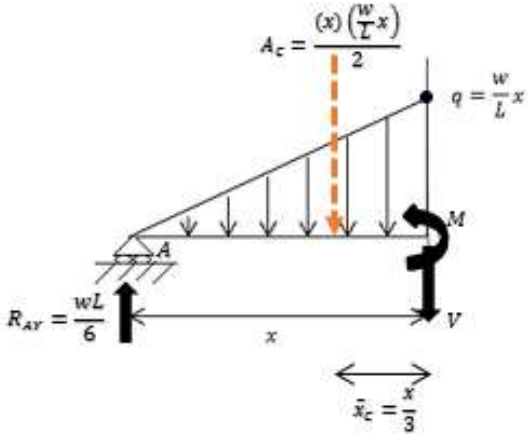
En la figura 1-2c se visualizan los valores de las reacciones en los soportes con sus correspondientes sentidos adecuados; se especifica la coordenada x a utilizar cuyo origen asociado está en A. El momento y el cortante deben estar en función de x y como no hay discontinuidad de carga a lo largo de la estructura, sólo se efectuará un corte perpendicular al eje de la viga.



(c)

Un diagrama de cuerpo libre del segmento de viga con longitud x es proporcionado en la figura 1-2d. Note que la intensidad de la carga triangular se encuentra en proporción, es decir, $\frac{w}{L} = \frac{q}{x} \Rightarrow q = \frac{w}{L}x$. Se indica la fuerza resultante de la carga triangular del corte y su punto de aplicación; V y M aparecen actuando en sus direcciones positivas de acuerdo a la convención de signos usualmente adoptada y sus funciones se deducen al hacer uso de las ecuaciones de equilibrio cuya convención de signos si puede ser cualquiera.

$$0 \leq x \leq L$$



(d)

$$\circlearrowright + \sum Mcorte = 0 \Rightarrow -M + \left(\frac{wL}{6}\right)x - \frac{(x)\left(\frac{w}{L}x\right)}{2}\left(\frac{x}{3}\right) = 0$$

$$M = \frac{wL}{6}x - \frac{w}{6L}x^3$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow \frac{wL}{6} - \frac{(x)\left(\frac{w}{L}x\right)}{2} - V = 0$$

$$V = \frac{wL}{6} - \frac{w}{2L}x^2 \qquad o\ también\ V = \frac{dM}{dx} = \frac{wL}{6} - \frac{w}{6L}(3x^2) = \frac{wL}{6} - \frac{w}{2L}x^2$$

Cálculo del momento máximo

El momento máximo está posicionado en un punto donde $V = dM/dx = 0$; realizando la sustitución correspondiente y resolviendo la ecuación se tiene

$$0 = \frac{wL}{6} - \frac{w}{2L}x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{-\frac{wL}{6}}{-\frac{w}{2L}} = \frac{2wL^2}{6w} = \frac{L^2}{3} \Rightarrow \therefore x_{max} = \frac{L}{\sqrt{3}}$$

Al hacer $x_{max} = x$ en la ecuación de M, el momento máximo resulta ser

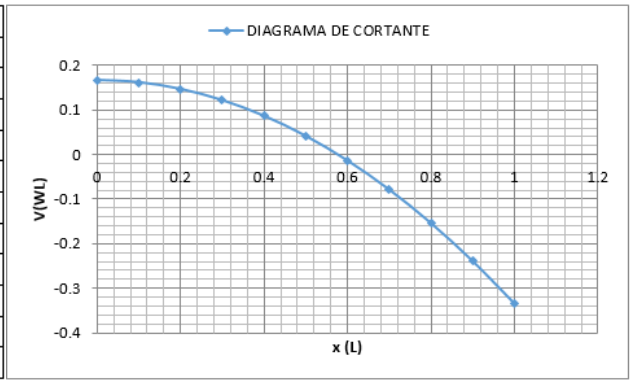
$$M_{max} = \frac{wL}{6}\left(\frac{L}{\sqrt{3}}\right) - \frac{w}{6L}\left(\frac{L}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{wL^2}{6\sqrt{3}} - \frac{wL^2}{6\left(\sqrt{3}\right)^3} = \frac{\sqrt{3}}{27}wL^2 \Rightarrow \therefore M_{max} = \frac{wL^2}{9\sqrt{3}}$$

Diagramas de fuerza cortante, momento flector

Una vez que se han determinado las funciones de fuerza cortante y de momento flector, estas se evaluan en el intervalo $0 \leq x \leq L$, tablas 1-1 y 1-2. Luego, los respectivos diagramas, figuras 1-2e y 1-2f, se obtienen de graficar los datos dispuestos en forma tabular.

x(L)	V(WL)
0	0.166666667
0.1	0.161666667
0.2	0.146666667
0.3	0.121666667
0.4	0.086666667
0.5	0.041666667
0.6	-0.013333333
0.7	-0.078333333
0.8	-0.153333333
0.9	-0.238333333
1	-0.333333333

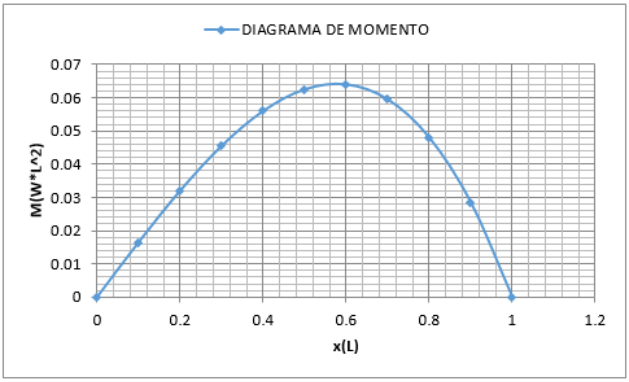
Tabla 1-1



(e)

x(L)	M(W*L^2)
0	0
0.1	0.0165
0.2	0.032
0.3	0.0455
0.4	0.056
0.5	0.0625
0.6	0.064
0.7	0.0595
0.8	0.048
0.9	0.0285
1	0

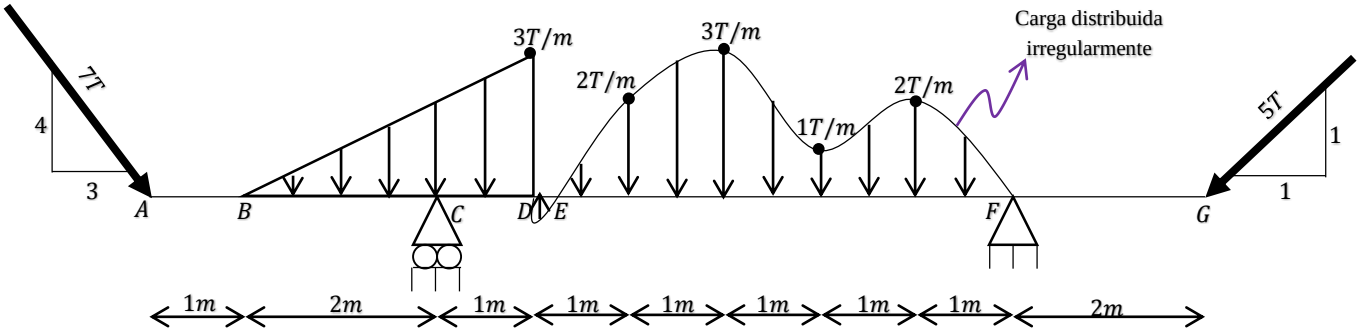
Tabla 1-2



(f)

Ejercicio 1.3 Análisis de una viga con carga compleja.

Instrucciones Calcule las fuerzas reactivas en los soportes y determine las funciones del momento flector y de las fuerzas cortante y normal de la viga isostática mostrada en la figura 1-3a. Obsérvese que en los extremos izquierdo y derecho están aplicadas cargas puntuales de $7T$ con una pendiente de $3:4$ y de $5T$ con una pendiente de $1:1$ respectivamente; sobre la región $B-D$ se extiende una carga cuya intensidad varía linealmente desde 0 en el punto B hasta $3T/m$ en el punto D y sobre la región $D-F$ la estructura soporta una carga distribuida irregularmente en la que se conocen seis puntos de intensidad de carga cuyos valores son indicados.



(a)

Figura 1-3

SOLUCIÓN

Cálculo de las reacciones en los apoyos

Diagrama de cargas. Primero se construye una función polinomial que ajuste a los puntos conocidos de la carga distribuida irregularmente; como se tienen seis datos, se propone una función polinómica de grado cinco (n_{datos} -1) de la siguiente forma:

$$y = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f \quad --- (I)$$

Tomando como origen al punto A se sabe que

$$en\ x = 4m, y = 0; en\ x = 5m, y = 2T/m; en\ x = 6m, y = 3T/m$$

$$en\ x = 7m, y = 1T/m; en\ x = 8m, y = 2T/m; en\ x = 9m, y = 0$$

Si sustituimos los valores anteriores en la ecuación (I), se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$0 = a(4)^5 + b(4)^4 + c(4)^3 + d(4)^2 + e(4) + f$$

$$0 = 1024a + 256b + 64c + 16d + 4e + f \quad --- (1)$$

$$2 = a(5)^5 + b(5)^4 + c(5)^3 + d(5)^2 + e(5) + f$$

$$2 = 3125a + 625b + 125c + 25d + 5e + f \quad --- (2)$$

$$3 = a(6)^5 + b(6)^4 + c(6)^3 + d(6)^2 + e(6) + f$$

$$3 = 7776a + 1296b + 216c + 36d + 6e + f \quad ---(3)$$

$$1 = a(7)^5 + b(7)^4 + c(7)^3 + d(7)^2 + e(7) + f$$

$$1 = 16807a + 2401b + 343c + 49d + 7e + f \quad ---(4)$$

$$2 = a(8)^5 + b(8)^4 + c(8)^3 + d(8)^2 + e(8) + f$$

$$2 = 32768a + 4096b + 512c + 64d + 8e + f \quad ---(5)$$

$$0 = a(9)^5 + b(9)^4 + c(9)^3 + d(9)^2 + e(9) + f$$

$$0 = 59049a + 6561b + 729c + 81d + 9e + f \quad ---(6)$$

Expresando el sistema simultáneo de ecuaciones en forma matricial tenemos

$$\begin{pmatrix} 1024 & 256 & 64 & 16 & 4 & 1 \\ 3125 & 625 & 125 & 25 & 5 & 1 \\ 7776 & 1296 & 216 & 36 & 6 & 1 \\ 16807 & 2401 & 343 & 49 & 7 & 1 \\ 32768 & 4096 & 512 & 64 & 8 & 1 \\ 59049 & 6561 & 729 & 81 & 9 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolviendo el sistema resulta

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1024 & 256 & 64 & 16 & 4 & 1 \\ 3125 & 625 & 125 & 25 & 5 & 1 \\ 7776 & 1296 & 216 & 36 & 6 & 1 \\ 16807 & 2401 & 343 & 49 & 7 & 1 \\ 32768 & 4096 & 512 & 64 & 8 & 1 \\ 59049 & 6561 & 729 & 81 & 9 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.166667 \\ 5.33333 \\ -66.8333 \\ 409.167 \\ -1221.5 \\ 1422 \end{pmatrix}$$

Si se reemplazan los resultados obtenidos en la ecuación (I), entonces la función polinomial que describe la intensidad de la carga distribuida irregularmente es

$$y = -\frac{1}{6}x^5 + \frac{16}{3}x^4 - \frac{401}{6}x^3 + 409.167x^2 - 1221.5x + 1422$$

Se calculan las cargas concentradas equivalentes A_i de las presiones, así como su punto de aplicación $\bar{x}_i$.

- Carga cuya intensidad varía en forma lineal.

$$A_1 = \frac{(3T/m)(3m)}{2} = 4.5T \qquad \bar{x}_1 = \frac{2}{3}(3m) = 2m$$

- Carga distribuida irregularmente.

Para esta carga se conocían seis puntos de intensidad inicialmente; realmente no se sabía el comportamiento exacto de la curva que describe la carga distribuida hasta que se calculó la ecuación y se graficó. Fue así como se pudo observar que

una pequeña porción de la carga distribuida, específicamente la que se extiende de $4m$ a $4.45m$, actúa hacia arriba; lógicamente en $x = 4.45m, y = 0$.
La fuerza resultante para esta porción de carga distribuida es

$$A_2 = \int dA = \int_{L_1}^{L_2} y dx$$

$$A_2 = \int_4^{4.45} \left(-\frac{1}{6}x^5 + \frac{16}{3}x^4 - \frac{401}{6}x^3 + 409.167x^2 - 1221.5x + 1422\right) dx$$

$$A_2 = \left[-\frac{1}{36}x^6 + \frac{16}{15}x^5 - \frac{401}{24}x^4 + \frac{136389}{1000}x^3 - \frac{2443}{4}x^2 + 1422x\right]_4^{4.45}$$

$$A_2 = -\frac{1}{36}(4.45^6 - 4.00^6) + \frac{16}{15}(4.45^5 - 4.00^5) - \frac{401}{24}(4.45^4 - 4.00^4)$$
$$+\frac{136389}{1000}(4.45^3 - 4.00^3) - \frac{2443}{4}(4.45^2 - 4.00^2) + 1422(4.45 - 4.00) \approx -0.12\,T$$

El signo negativo indica que la resultante A_2 actúa hacia arriba. Su punto de aplicación es

$$\bar{x}_2 = \frac{\int \tilde{x} dA}{\int dA} = \frac{\int_{L_1}^{L_2} xy dx}{\int_{L_1}^{L_2} y dx}$$

$$\bar{x}_2 = \frac{\int_4^{4.45} (x)\left(-\frac{1}{6}x^5 + \frac{16}{3}x^4 - \frac{401}{6}x^3 + 409.167x^2 - 1221.5x + 1422\right) dx}{\int_4^{4.45} \left(-\frac{1}{6}x^5 + \frac{16}{3}x^4 - \frac{401}{6}x^3 + 409.167x^2 - 1221.5x + 1422\right) dx}$$

Resolviendo el numerador se tiene

$$\int_4^{4.45} (x)\left(-\frac{1}{6}x^5 + \frac{16}{3}x^4 - \frac{401}{6}x^3 + 409.167x^2 - 1221.5x + 1422\right) dx$$
$$= \int_4^{4.45} \left(-\frac{1}{6}x^6 + \frac{16}{3}x^5 - \frac{401}{6}x^4 + 409.167x^3 - 1221.5x^2 + 1422x\right) dx$$
$$= \left[-\frac{1}{42}x^7 + \frac{8}{9}x^6 - \frac{401}{30}x^5 + \frac{409167}{4000}x^4 - \frac{2443}{6}x^3 + 711x^2\right]_4^{4.45}$$
$$= -\frac{1}{42}(4.45^7 - 4.00^7) + \frac{8}{9}(4.45^6 - 4.00^6) - \frac{401}{30}(4.45^5 - 4.00^5)$$
$$+\frac{409167}{4000}(4.45^4 - 4.00^4) - \frac{2443}{6}(4.45^3 - 4.00^3) + 711(4.45^2 - 4.00^2) \approx -0.49$$

El denominador ya fue resuelto. Por lo tanto,

$$\bar{x}_2 = \frac{-0.49}{-0.12} \approx 4.083m$$

Ahora se analiza la parte de la carga distribuida que actúa hacia abajo, es decir, la que se extiende de $4.45m$ a $9m$. La fuerza resultante es

$$A_3 = \int dA = \int_{L_1}^{L_2} ydx$$

$$A_3 = \int_{4.45}^{9} \left(-\frac{1}{6}x^5 + \frac{16}{3}x^4 - \frac{401}{6}x^3 + 409.167x^2 - 1221.5x + 1422\right)dx$$

$$= \left[-\frac{1}{36}x^6 + \frac{16}{15}x^5 - \frac{401}{24}x^4 + \frac{136389}{1000}x^3 - \frac{2443}{4}x^2 + 1422x\right]_{4.45}^{9}$$

$$= -\frac{1}{36}(9^6 - 4.45^6) + \frac{16}{15}(9^5 - 4.45^5) - \frac{401}{24}(9^4 - 4.45^4)$$

$$+\frac{136389}{1000}(9^3 - 4.45^3) - \frac{2443}{4}(9^2 - 4.45^2) + 1422(9 - 4.45) = 8.87\,T$$

y su punto de aplicación es

$$\bar{x}_3 = \frac{\int \tilde{x}dA}{\int dA} = \frac{\int_{L_1}^{L_2} xydx}{\int_{L_1}^{L_2} ydx}$$

$$\bar{x}_3 = \frac{\int_{4.45}^{9}(x)\left(-\frac{1}{6}x^5 + \frac{16}{3}x^4 - \frac{401}{6}x^3 + 409.167x^2 - 1221.5x + 1422\right)dx}{\int_{4.45}^{9}\left(-\frac{1}{6}x^5 + \frac{16}{3}x^4 - \frac{401}{6}x^3 + 409.167x^2 - 1221.5x + 1422\right)dx}$$

Resolviendo el numerador se tiene

$$\int_{4.45}^{9}(x)\left(-\frac{1}{6}x^5 + \frac{16}{3}x^4 - \frac{401}{6}x^3 + 409.167x^2 - 1221.5x + 1422\right)dx$$

$$= \int_{4.45}^{9}\left(-\frac{1}{6}x^6 + \frac{16}{3}x^5 - \frac{401}{6}x^4 + 409.167x^3 - 1221.5x^2 + 1422x\right)dx$$

$$= \left[-\frac{1}{42}x^7 + \frac{8}{9}x^6 - \frac{401}{30}x^5 + \frac{409167}{4000}x^4 - \frac{2443}{6}x^3 + 711x^2\right]_{4.45}^{9}$$

$$= -\frac{1}{42}(9^7 - 4.45^7) + \frac{8}{9}(9^6 - 4.45^6) - \frac{401}{30}(9^5 - 4.45^5) + \frac{409167}{4000}(9^4 - 4.45^4)$$

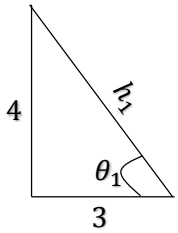
$$-\frac{2443}{6}(9^3 - 4.45^3) + 711(9^2 - 4.45^2) = 59.3$$

El denominador ya fue resuelto. Por lo tanto,

$$\bar{x}_3 = \frac{59.3}{8.87} \approx 6.685m$$

Luego, se resuelven las fuerzas puntuales $F_1 = 7T$ y $F_2 = 5T$ en sus componentes rectangulares $X - Y$, figuras 1-3b, 1-3c y 1-3d, 1-3e, respectivamente.

- Para $F_1 = 7T$

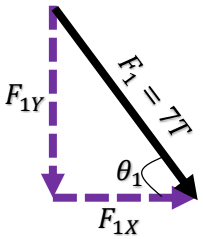


(b)

$$h_1 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$
$$\sin\theta_1 = \frac{4}{5}; \cos\theta_1 = \frac{3}{5}$$

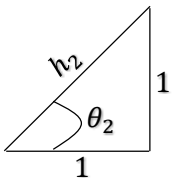
$$\cos\theta_1 = \frac{F_{1X}}{7T} \Rightarrow F_{1X} = 7T(\cos\theta_1) = 7T\left(\frac{3}{5}\right) = 4.2T$$

$$\sin\theta_1 = \frac{F_{1Y}}{7T} \Rightarrow F_{1Y} = 7T(\sin\theta_1) = 7T\left(\frac{4}{5}\right) = 5.6T$$



(c)

- Para $F_2 = 5T$

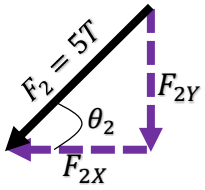


(d)

$$h_2 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$
$$\sin\theta_2 = \cos\theta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

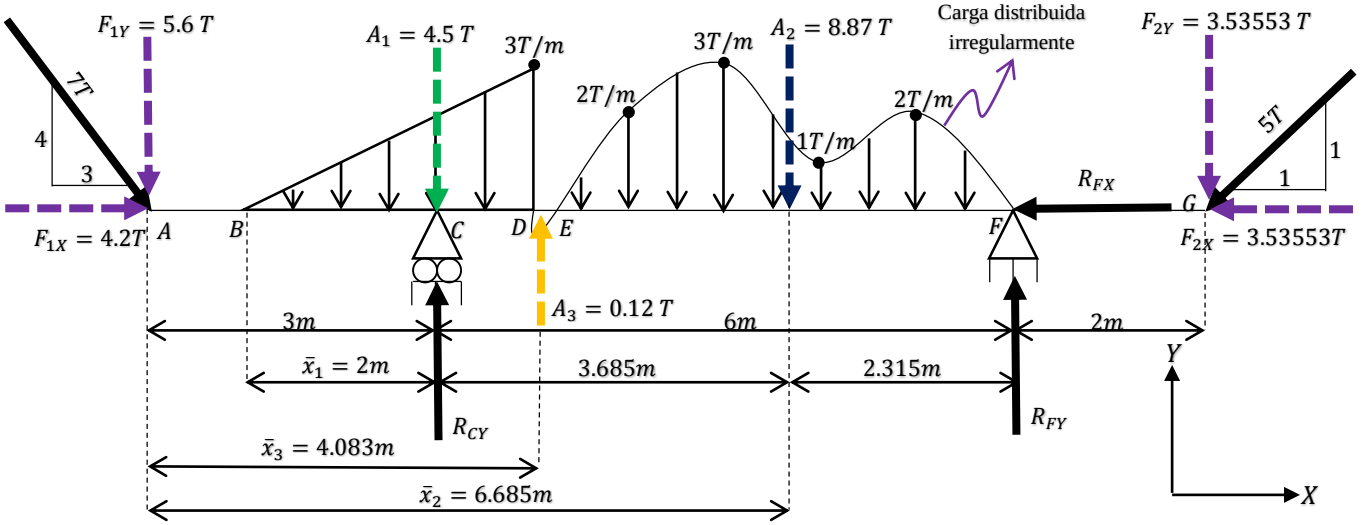
$$\sin\theta_2 = \frac{F_{2Y}}{5T} \Rightarrow F_{2Y} = 5T(\sin\theta_2) = 5T\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 3.53553T$$

$$\cos\theta_2 = \frac{F_{2X}}{5T} \Rightarrow F_{2X} = 5T(\cos\theta_2) = 5T\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 3.53553T$$



(e)

El soporte C es un rodillo, por lo que se genera una fuerza reactiva vertical R_{CY}, mientras que el soporte F es un pasador y tiene dos incógnitas de reacción, una horizontal (R_{FX}) y una vertical (R_{FY}). En consecuencia, el diagrama de cargas de la viga, figura 1-3f, es



(f)

Ecuaciones de equilibrio. Se aplican al diagrama de cargas para calcular las incógnitas R_{CY} y R_{EY} y R_{EX} usando una convención de signos arbitraria.

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow 4.2 - R_{EX} - 3.53553 = 0 \Rightarrow \therefore R_{FX} = 0.66447T \leftarrow$$

$$\circlearrowleft + \sum MC = 0 \Rightarrow -5.6(3) - 0.12(1.083) + 8.87(3.685) - R_{FY}(6) + 3.53553(8) = 0 \Rightarrow$$

$$\therefore R_{FY} = 7.34T \uparrow$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow -5.6 - 4.5 + R_{CY} + 0.12 - 8.87 + 7.34 - 3.53553 = 0 \Rightarrow \therefore R_{CY} = 15.0456T \uparrow$$

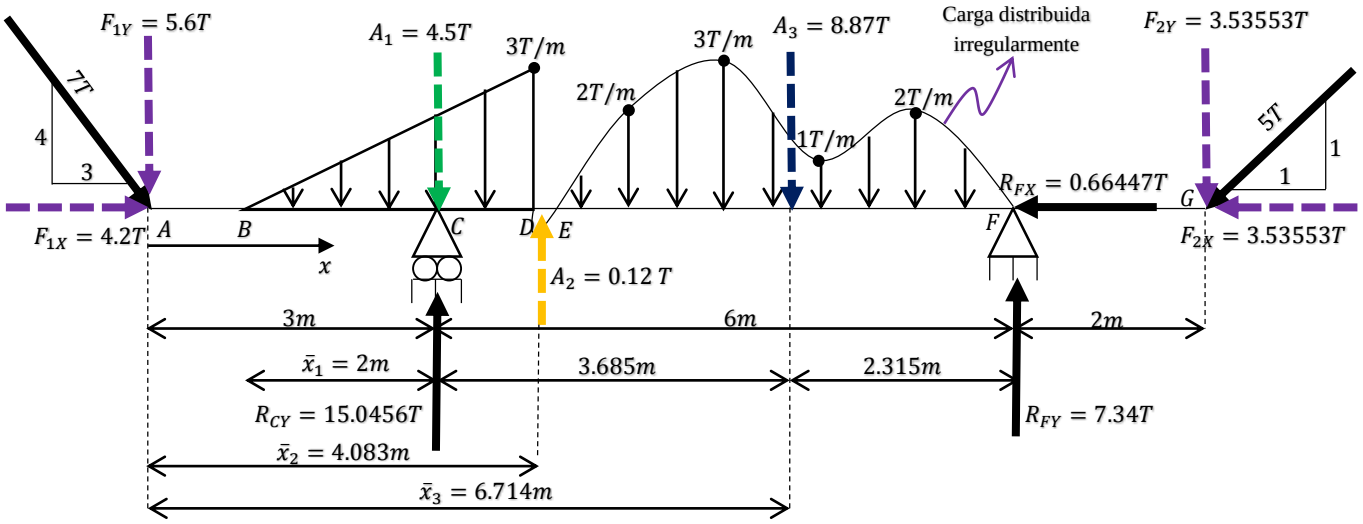
La fuerza reactiva vertical del soporte en C también se puede obtener tomando momentos alrededor de F.

$$\circlearrowleft + \sum ME = 0 \Rightarrow 3.53553(2) - 8.87(2.315) - 4.5(6) + 0.12(4.917) + R_{CY}(6) - 5.6(9) = 0$$

$$\therefore R_{CY} = 15.0455T \uparrow$$

Funciones de fuerza cortante, de fuerza normal y de momento

En la figura 1-3g se muestran los resultados obtenidos.

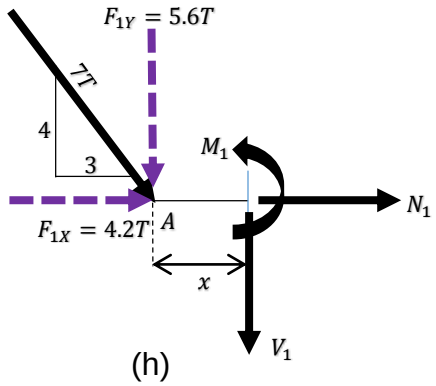


(g)

La distribución de la carga que actúa sobre la viga presenta discontinuidades en los puntos B, C, D, E y F; así que, para obtener expresiones algebraicas que definan la variación de los elementos mecánicos es necesario cortar a la estructura perpendicularmente a su eje a través de secciones arbitrarias en los tramos $A-B, B-C, C-D, D-E$ $E-F$ y $F-G$.

Se ha definido una sola coordenada x para toda la viga, por lo que es válida para toda la región $A-G$ $(0 \le x \le 11m)$, su origen ha sido asociado en A, y es positiva hacia la derecha.

Corte en el tramo ① $(A-B)$. Se secciona la viga en un punto arbitrario (intermedio en el segmento $(A-B)$ a una distancia x del punto A. En la figura 1-3h se proporciona un diagrama de cuerpo libre del segmento de viga con longitud x. Al aplicar las ecuaciones de equilibrio, se tiene



(h)

$$0 \le x \le 1m$$

$$\circlearrowright + \sum Mcorte = 0 \Rightarrow -5.6(x) - M_1 = 0 \Rightarrow M_1 = -5.6x$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow -5.6 - V_1 = 0 \Rightarrow V_1 = -5.6$$

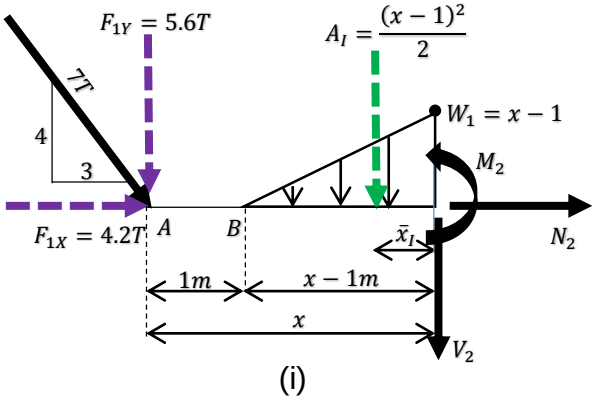
o también

$$V_1 = \frac{dM_1}{dx} = \frac{d(-5.6x)}{dx} = -5.6$$

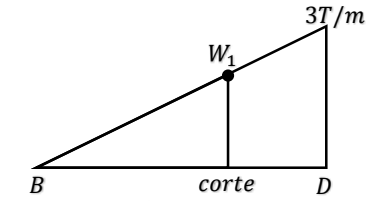
$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow 4.2 + N_1 = 0 \Rightarrow N_1 = -4.2$$

Corte en el tramo ②$(B-C)$. En la figura 1-3i se muestra un diagrama de cuerpo libre de la sección cortada. A la derecha, figura 1-3j, se proporciona un esquema para determinar el valor en función de x de la intensidad W_1.

$$1m \le x \le 3m$$



(i)



$$\frac{3T/m}{3m} = \frac{W_1}{x-1m} \Rightarrow W_1 = x - 1$$

(j)

La fuerza resultante de la carga triangular cortada es

$$A_I = \frac{(x-1)(x-1)}{2} = \frac{(x-1)^2}{2}$$

y su punto de aplicación es

$$\bar{x}_I = \frac{1}{3}(x-1)$$

Por lo tanto,

$$+\circlearrowright \sum Mcorte = 0 \Rightarrow -5.6x - \frac{(x-1)^2}{2}\left[\frac{1}{3}(x-1)\right] - M_2 = 0$$

$$M_2 = -5.6x - \frac{1}{6}(x-1)^3 = -5.6x - \frac{1}{6}\left[(x)^3 - 3(x)^2(1) + 3(1)^2(x) - (1)^3\right]$$

$$= -5.6x - \frac{1}{6}[x^3 - 3x^2 + 3x - 1] = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6.1x + \frac{1}{6}$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow -5.6 - \frac{(x-1)^2}{2} - V_2 = 0$$

$$V_2 = -5.6 - \frac{(x)^2 - 2(x)(1) + (1)^2}{2} = -5.6 - \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}x^2 + x - 6.1$$

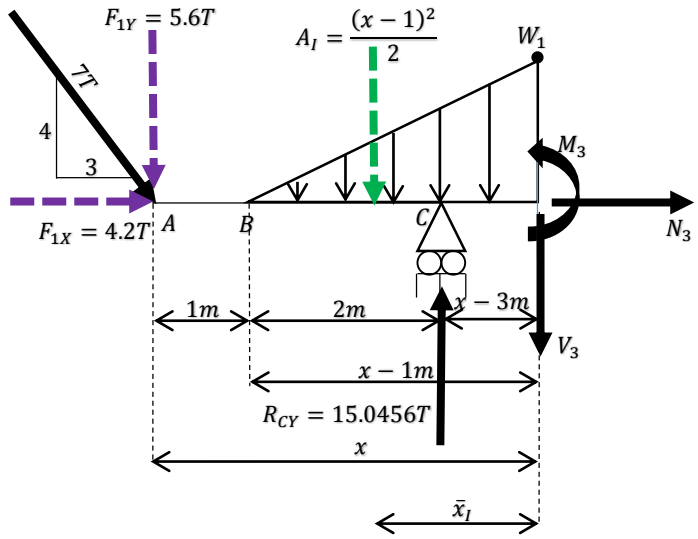
o también

$$V_2 = \frac{dM_2}{dx} = \frac{d\left(-\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6.1x + \frac{1}{6}\right)}{dx} = -\frac{1}{2}x^2 + x - 6.1$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow N_2 = -4.2$$

Corte en el tramo ③$(C-D)$. Se representa el diagrama de cuerpo libre correspondiente al segmento izquierdo de la estructura que se produce al cortarla en algún sitio intermedio del tramo $C-D$, figura 1-3k. El equilibrio estático del cuerpo libre implica que

$$3m \leq x \leq 4m$$



(k)

$$\circlearrowright+\sum Mcorte = 0 \Rightarrow -5.6x + 15.0456(x-3) - \frac{(x-1)^2}{2}\left[\frac{1}{3}(x-1)\right] - M_3 = 0$$

$$M_3 = -5.6x + 15.0514x - 45.1542 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{6}$$

$$M_3 = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 8.9456x - 44.9701$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow -5.6 - \frac{(x-1)^2}{2} + 15.0456 - V_3 = 0 \Rightarrow V_3 = -\frac{1}{2}x^2 + x + 8.9456$$

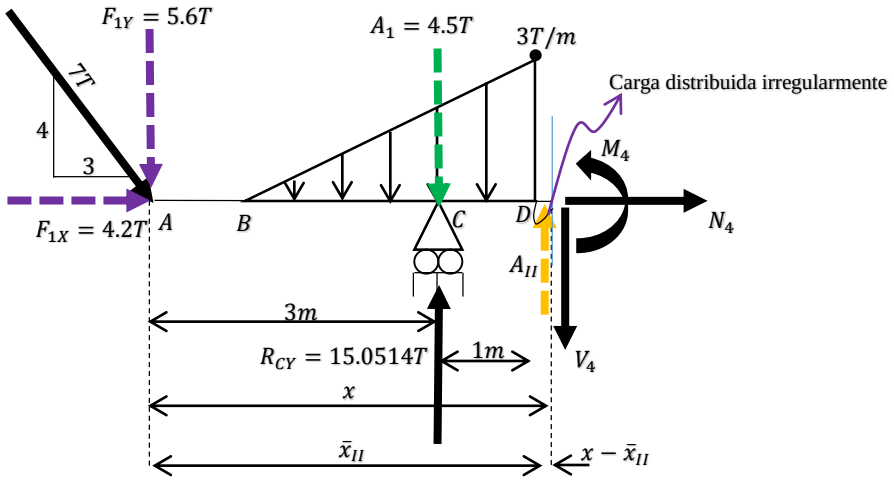
o también

$$V_3 = \frac{dM_3}{dx} = \frac{d\left(-\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 8.9456x - 44.9701\right)}{dx} = -\frac{1}{2}x^2 + x + 8.9456$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow N_3 = -4.2$$

Corte en el tramo ④ $(D-E)$. Se secciona la estructura en un punto arbitrario (intermedio en el segmento $(D-E)$ a una distancia x de A; a continuación se ofrece el diagrama de cuerpo libre que representa la porción de la estructura ubicada a la izquierda del corte, figura 1-3l.

$$4m \leq x \leq 4.45m$$



(l)

La carga concentrada equivalente de la carga distribuida irregularmente cortada es

$$A_{II} = \int_4^x \left(-\frac{1}{6}x^5 + \frac{16}{3}x^4 - \frac{401}{6}x^3 + 409.167x^2 - 1221.5x + 1422\right) dx$$

$$= -\frac{1}{36}x^6 + \frac{16}{15}x^5 - \frac{401}{24}x^4 + \frac{136389}{1000}x^3 - \frac{2443}{4}x^2 + 1422x - 1346.05$$

y su línea de acción está localizada a una distancia de

$$\bar{x}_{II} = \frac{\int_4^x (x)\left(-\frac{1}{6}x^5 + \frac{16}{3}x^4 - \frac{401}{6}x^3 + 409.167x^2 - 1221.5x + 1422\right) dx}{\int_4^x \left(-\frac{1}{6}x^5 + \frac{16}{3}x^4 - \frac{401}{6}x^3 + 409.167x^2 - 1221.5x + 1422\right) dx}$$

Resolviendo el numerador tenemos

$$\int_4^x (x)\left(-\frac{1}{6}x^5 + \frac{16}{3}x^4 - \frac{401}{6}x^3 + 409.167x^2 - 1221.5x + 1422\right) dx$$

$$\int_4^x \left(-\frac{1}{6}x^6 + \frac{16}{3}x^5 - \frac{401}{6}x^4 + 409.167x^3 - 1221.5x^2 + 1422x\right) dx$$

$$= -\frac{1}{42}x^7 + \frac{8}{9}x^6 - \frac{401}{30}x^5 + \frac{409167}{4000}x^4 - \frac{2443}{6}x^3 + 711x^2 - 1067.35$$

El denominador ya fue resuelto. Por lo tanto,

$$\bar{x}_I = \frac{-\frac{1}{42}x^7 + \frac{8}{9}x^6 - \frac{401}{30}x^5 + \frac{409167}{4000}x^4 - \frac{2443}{6}x^3 + 711x^2 - 1067.35}{-\frac{1}{36}x^6 + \frac{16}{15}x^5 - \frac{401}{24}x^4 + \frac{136389}{1000}x^3 - \frac{2443}{4}x^2 + 1422x - 1346.05}$$

Las acciones internas entre los puntos D y E quedan definidas como

$$\circlearrowright + \sum Mcorte = 0$$

$$-5.6x - 4.5(x-3) + 15.0456(x-3) + A_{1c}(x - \bar{x}_I) - M_4 = 0$$

$$M_4 = -\frac{1}{252}x^7 + \frac{8}{45}x^6 - \frac{401}{120}x^5 + \frac{136389}{4000}x^4 - \frac{2443}{12}x^3 + 711x^2 - 1341.1044x + 1035.7132$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow -5.6 - 4.5 + 15.0456 + A_{1C} - V_4 = 0$$

$$V_4 = -\frac{1}{36}x^6 + \frac{16}{15}x^5 - \frac{401}{24}x^4 + \frac{136389}{1000}x^3 - \frac{2443}{4}x^{\ 2} + 1422x - 1346.1044$$

o también

$$V_4 = \frac{dM_4}{dx}$$

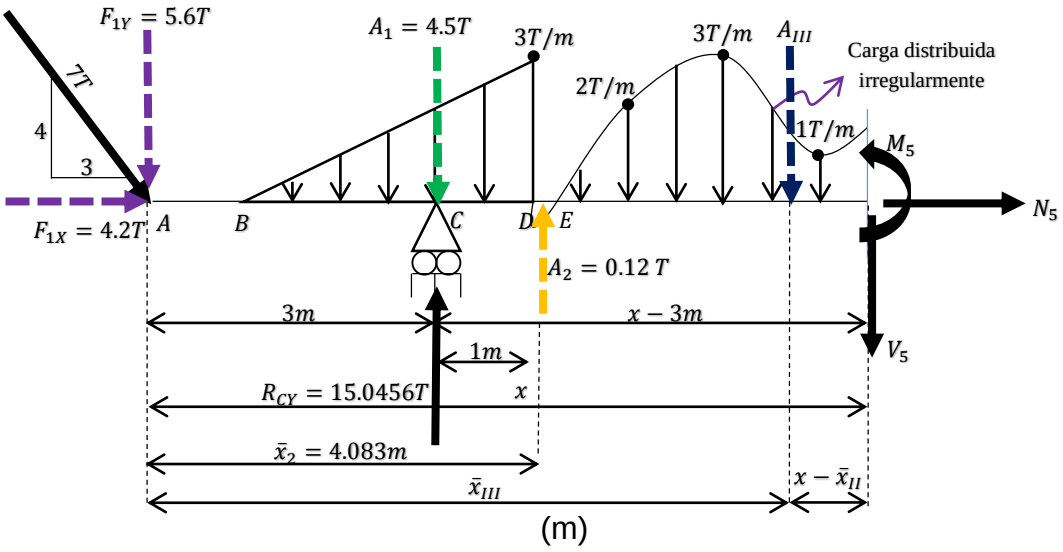
$$= \frac{d\left(-\frac{1}{252}x^7 + \frac{8}{45}x^6 - \frac{401}{120}x^5 + \frac{136389}{4000}x^4 - \frac{2443}{12}x^3 + 711x^2 - 1341.1044x + 1035.7132\right)}{dx}$$

$$V_4 = -\frac{1}{36}x^6 + \frac{16}{15}x^5 - \frac{401}{24}x^4 + \frac{136389}{1000}x^3 - \frac{2443}{4}x^{\ 2} + 1422x - 1346.1044$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow N_4 = -4.2$$

Corte en el tramo ⑤ $(E-F)$. Se secciona la estructura en un punto arbitrario (intermedio en el segmento $(E-F)$ a una distancia x de A; en la figura 1-3m se representa el diagrama de cuerpo libre del segmento izquierdo de la viga. En consecuencia,

$$4.45m \leq x \leq 9m$$



(m)

La carga concentrada equivalente de la carga distribuida irregularmente cortada es

$$A_{III} = \int_{4.45}^{x}\left(-\frac{1}{6}x^5 + \frac{16}{3}x^4 - \frac{401}{6}x^3 + 409.167x^2 - 1221.5x + 1422\right)dx$$

$$= -\frac{1}{36}x^6 + \frac{16}{15}x^5 - \frac{401}{24}x^4 + \frac{136389}{1000}x^3 - \frac{2443}{4}x^2 + 1422x - 1345.935$$

y su línea de acción está localizada a una distancia de

$$\bar{x}_{III} = \frac{\int_{4.45}^{x}(x)\left(-\frac{1}{6}x^5 + \frac{16}{3}x^4 - \frac{401}{6}x^3 + 409.167x^2 - 1221.5x + 1422\right)dx}{\int_{4.45}^{x}\left(-\frac{1}{6}x^5 + \frac{16}{3}x^4 - \frac{401}{6}x^3 + 409.167x^2 - 1221.5x + 1422\right)dx}$$

Resolviendo el numerador tenemos

$$\int_{4.45}^{x}(x)\left(-\frac{1}{6}x^5 + \frac{16}{3}x^4 - \frac{401}{6}x^3 + 409.167x^2 - 1221.5x + 1422\right)dx$$

$$\int_{4.45}^{x}\left(-\frac{1}{6}x^6 + \frac{16}{3}x^5 - \frac{401}{6}x^4 + 409.167x^3 - 1221.5x^2 + 1422x\right)dx$$

$$-\frac{1}{42}x^7 + \frac{8}{9}x^6 - \frac{401}{30}x^5 + \frac{409167}{4000}x^4 - \frac{2443}{6}x^3 + 711x^2 - 1066.85875$$

El denominador ya fue resuelto. Por lo tanto,

$$\bar{x}_{III} = \frac{-\frac{1}{42}x^7 + \frac{8}{9}x^6 - \frac{401}{30}x^5 + \frac{409167}{4000}x^4 - \frac{2443}{6}x^3 + 711x^2 - 1066.85875}{-\frac{1}{36}x^6 + \frac{16}{15}x^5 - \frac{401}{24}x^4 + \frac{136389}{1000}x^3 - \frac{2443}{4}x^2 + 1422x - 1345.935}$$

Las acciones internas entre los puntos D y E quedan definidas como

$$\circlearrowright + \sum Mcorte = 0$$

$$-5.6x - 4.5(x-3) + 15.0456(x-3) + 0.12(x-4.083) - A_{2C}(x - \bar{x}_{III}) - M_4 = 0$$

$$M_5 = \frac{1}{252}x^7 - \frac{8}{45}x^6 + \frac{401}{120}x^5 - \frac{136389}{4000}x^4 + \frac{2443}{12}x^3 - 711x^2 + 1351.0006x - 1098.9855$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow -5.6 - 4.5 + 15.0456 + 0.12 - A_{c2} - V_4 = 0$$

$$V_5 = \frac{1}{36}x^6 - \frac{16}{15}x^5 + \frac{401}{24}x^4 - \frac{136389}{1000}x^3 + \frac{2443}{4}x^2 - 1422x + 1351.0006$$

o también

$$V_5 = \frac{dM_5}{dx}$$

$$= \frac{d\left(\frac{1}{252}x^7 - \frac{8}{45}x^6 + \frac{401}{120}x^5 - \frac{136389}{4000}x^4 + \frac{2443}{12}x^3 - 711x^2 + 1351.0006x - 1098.9855\right)}{dx}$$

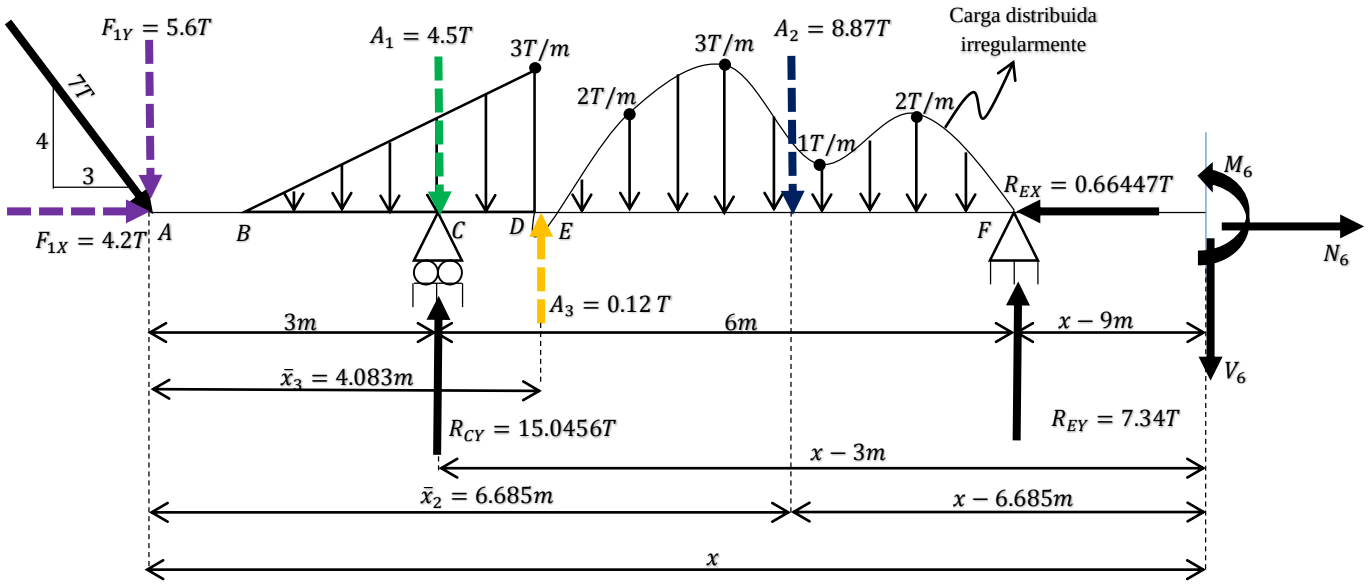
$$V_5 = \frac{1}{36}x^6 - \frac{16}{15}x^5 + \frac{401}{24}x^4 - \frac{136389}{1000}x^3 + \frac{2443}{4}x^{\ 2} - 1422x + 1351.0006$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow N_5 = -4.2$$

Corte en el tramo ⑤ $(F-G)$. Se secciona la estructura en un punto arbitrario (intermedio en el segmento $E-F$) a una distancia x de A; en la figura 1-3n se representa el diagrama de cuerpo libre del segmento izquierdo de la viga. Por consiguiente,

$$9m \leq x \leq 11m$$

(n)



$$+\circlearrowright \sum Mcorte = 0$$

$$-5.6x - 4.5(x-3) + 15.0456(x-3) + 0.12(x-4.083) - 8.87(x-6.685) + 7.34(x-9) - M_6 = 0$$

$$M_6 = 3.5356x - 38.89074$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow -5.6 - 4.5 + 15.0456 + 0.12 - 8.87 + 7.34 - V_6 = 0 \Rightarrow V_6 = 3.5356$$

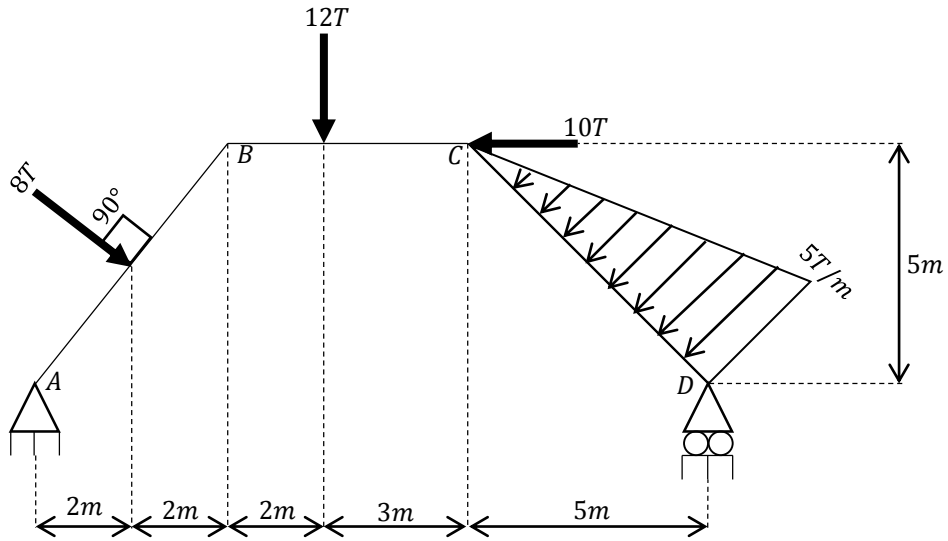
o también

$$V_6 = \frac{dM_6}{dx} = \frac{d(3.5356x - 38.89074)}{dx} = 3.5356$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow 4.2 - 0.66447 + N_6 = 0 \Rightarrow N_6 = -3.53553$$

Ejercicio 1.4 Diagramas de fuerza cortante y normal, y de momento para un pórtico.

Instrucciones Dibuje los diagramas de fuerza cortante, de fuerza normal y de momento flexionante del marco visualizado en la figura 1-4a.

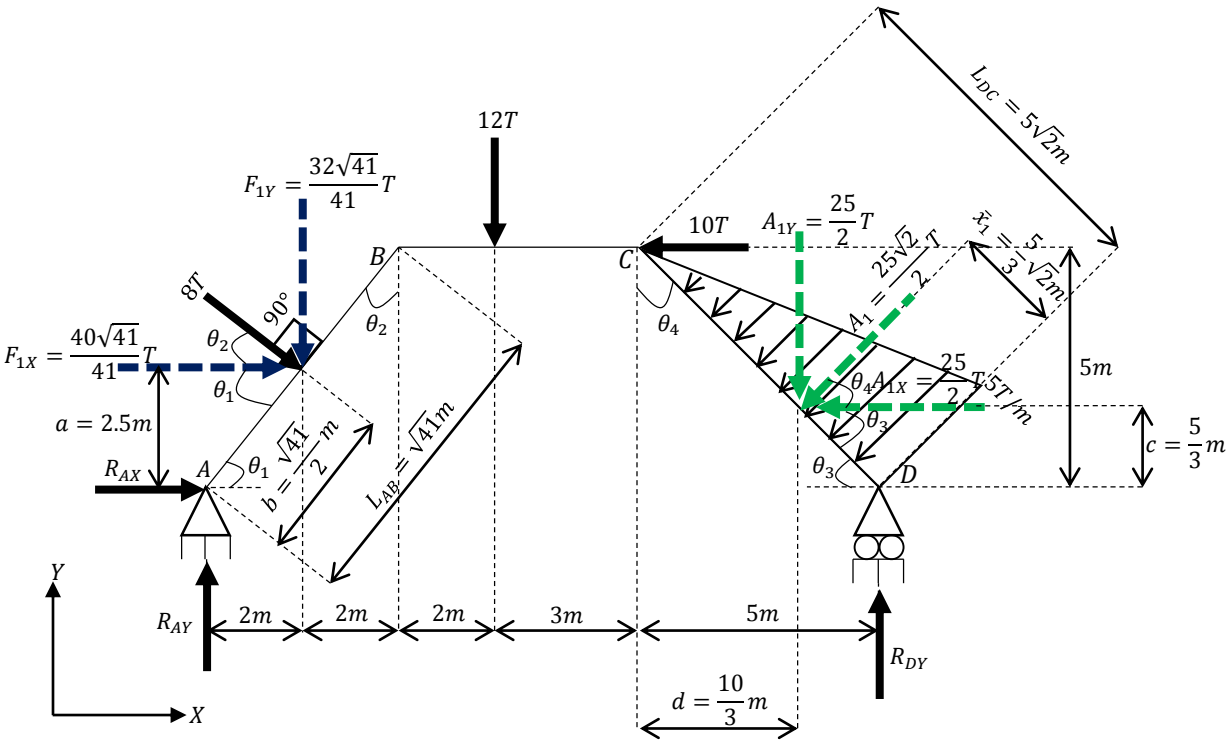


(a)

Figura 1-4

SOLUCIÓN

Cálculo de las reacciones en los soportes



(b)

Diagrama de cargas. Se muestra en la figura 1-4b.

La longitud de los miembros $A-B$ y $D-C$ son

$$L_{AB}=\sqrt{(4m)^2+(5m)^2}=\sqrt{41}m$$

En consecuencia,

$$sin\theta_2={}^{4}/_{\sqrt{41}} \qquad cos\theta_2={}^{5}/_{\sqrt{41}}$$

$$\frac{4m}{\sqrt{41}m}=\frac{2m}{b}\Longrightarrow b=\frac{(2m)\left(\sqrt{41}m\right)}{4m}=\frac{\sqrt{41}}{2}m \qquad \frac{4m}{5m}=\frac{2m}{a}\Longrightarrow a=\frac{(5m)(2m)}{4m}=2.5m$$

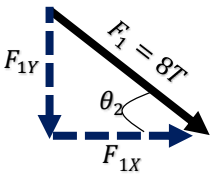
$$L_{DC}=\sqrt{(5m)^2+(5m)^2}=5\sqrt{2}m$$

Por lo tanto,

$$sin\theta_4={}^{5}/_{5\sqrt{2}}={}^{1}/_{\sqrt{2}} \qquad cos\theta_4={}^{5}/_{5\sqrt{2}}={}^{1}/_{\sqrt{2}} \qquad \theta_3=\theta_4$$

Con base en la figura 1-4c, las componentes rectangulares de la carga puntual de $8T$ para el plano $X-Y$ son

(c)



$$\sin\theta_2=\frac{F_{1Y}}{F_1}\Rightarrow F_{1Y}=F_1\sin\theta_2=8T\left(\frac{4}{\sqrt{41}}\right)=\frac{32\sqrt{41}}{41}T$$

$$\cos\theta_2=\frac{F_{1X}}{F_1}\Rightarrow F_{1X}=F_1\cos\theta_2=8T\left(\frac{5}{\sqrt{41}}\right)=\frac{40\sqrt{41}}{41}T$$

A continuación se efectúa un análisis de la carga con variación lineal.

La carga concentrada equivalente es

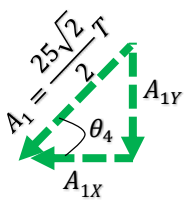
$$A_1=\frac{\left(5\sqrt{2}m\right)(5T/m)}{2}=\frac{25\sqrt{2}}{2}T$$

y su punto de aplicación se localiza a una distancia de

$$\bar{x}_1=\frac{1}{3}\left(5\sqrt{2}m\right)=\frac{5}{3}\sqrt{2}m$$

A partir de la figura 1-4d, las componentes rectangulares de la resultante A_1 son

(d)



$$\sin\theta_4=\frac{A_{1Y}}{A_1}\Rightarrow A_{1Y}=A_1\sin\theta_4=\frac{25\sqrt{2}}{2}T\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{25}{2}T$$

$$\cos\theta_4=\frac{A_{1X}}{A_1}\Rightarrow A_{1X}=A_1\cos\theta_4=\frac{25\sqrt{2}}{2}T\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{25}{2}T$$

Las distancias c y d pueden ser deducidas por trigonometría como sigue:

$$\frac{5m}{5\sqrt{2}m} = \frac{c}{\frac{5}{3}\sqrt{2}m} \Longrightarrow c = \frac{5m\left(\frac{5}{3}\sqrt{2}m\right)}{5\sqrt{2}m} = \frac{5}{3}m$$

$$d = \sqrt{\left[\left(5\sqrt{2}m\right) - \left(\frac{5}{3}\sqrt{2}m\right)\right]^2 - \left(5m - \frac{5}{3}m\right)^2} = \frac{10}{3}m$$

Ecuaciones de equilibrio.

$$\circlearrowright + \sum MA = 0 \Rightarrow \left(\frac{40\sqrt{41}}{41}\right)(2.5) + \left(\frac{32\sqrt{41}}{41}\right)(2) + (12)(6) - (10)(5) + \left(\frac{25}{2}\right)\left(9 + \frac{10}{3}\right)$$

$$-\left(\frac{25}{2}\right)\left(\frac{5}{3}\right) - (R_{DY})(14) = 0 \Rightarrow R_{DY} = 12.9247 \Rightarrow \therefore R_{DY} = 12.9247T \uparrow$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow R_{AX} + \frac{40\sqrt{41}}{41} - 10 - \frac{25}{2} = 0 \Rightarrow R_{AX} = 16.253 \Rightarrow \therefore R_{AX} = 16.253T \rightarrow$$

$$\uparrow + \sum FY = 0 \Rightarrow R_{AY} - \frac{32\sqrt{41}}{41} - 12 - \frac{25}{2} + 12.9247 = 0 \Rightarrow R_{AY} = 16.5729$$

$$\therefore R_{AY} = 16.5729T \uparrow$$

Como comprobación, se debe cumplir que la suma de momentos respecto de D es nula.

$$\circlearrowright + \sum MD = -\left(\frac{25}{2}\right)\left(\frac{5}{3}\right) - \left(\frac{25}{2}\right)\left(5 - \frac{10}{3}\right) - (10)(5) - (12)(8) - \left(\frac{32\sqrt{41}}{41}\right)(12)$$

$$+\left(\frac{40\sqrt{41}}{41}\right)(2.5) + (16.5729)(14) \approx 0 \quad ok$$

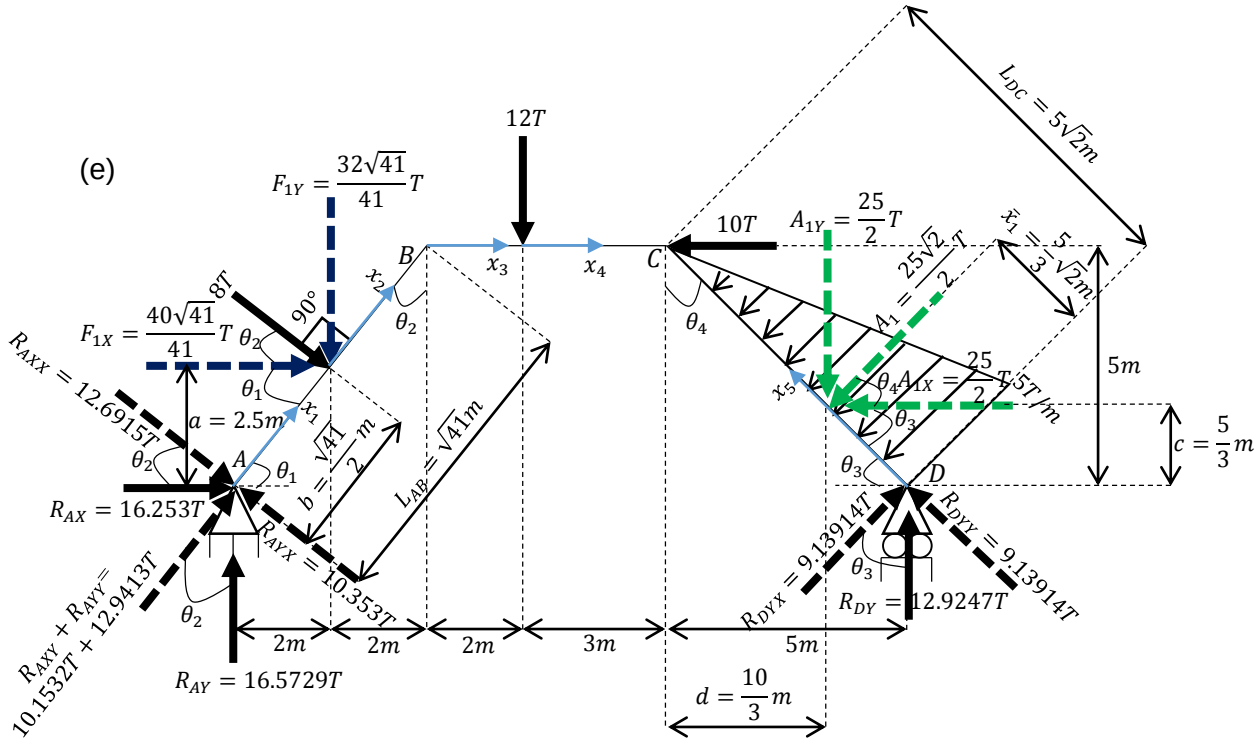
Funciones de la fuerza cortante, de la fuerza normal y del momento flector

Los resultados obtenidos se muestran en el diagrama de la figura 1-4e.

En el marco se pueden distinguir cinco regiones distintas. En el miembro $A - B$, un primer tramo va desde A hasta el punto de aplicación de la carga puntual de $8T$ y un segundo tramo sería la parte restante del miembro. Un tercer y cuarto tramo se observan por inspección en el miembro $B - C$ debido a la aplicación de la carga puntual de $12T$. En el miembro $C - D$ no hay variación en la distribución de la carga, por lo que toda su longitud comprendería el quinto tramo. Para obtener funciones que definan la variación de las acciones internas es necesario cortar la estructura a través de secciones arbitrarias en los tramos mencionados.

Aunque se puede establecer una sola coordenada x por miembro, en este caso se opta por definir una coordenada x para cada tramo distinto, lo cual también es válido. En la figura pueden notarse claramente la forma en las que han sido definidas las coordenadas x_1, x_2, x_3, x_4 y x_5, las cuales cubren perfectamente cada una de las regiones de la estructura.

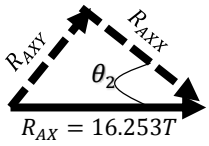
(e)



Con base en las figuras 1-4f, 1-4g y 1-4h, se calculan las componentes rectangulares de las reacciones en los apoyos que serán útiles al efectuar el equilibrio en algunos diagramas de cuerpo libre originados al cortar la estructura.

- Para $R_{AX} = 16.253T$

(f)

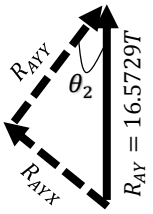


$$\sin\theta_2 = \frac{R_{AXY}}{R_{AX}} \Rightarrow R_{AXY} = R_{AX}\sin\theta_2 = 16.253T\left(\frac{4}{\sqrt{41}}\right) = 10.1532T$$

$$\cos\theta_2 = \frac{R_{AXX}}{R_{AX}} \Rightarrow R_{AXX} = R_{AX}\cos\theta_2 = 16.253T\left(\frac{5}{\sqrt{41}}\right) = 12.6915T$$

- Para $R_{AY} = 16.5729T$

(g)

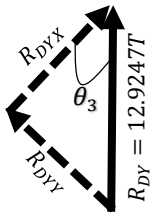


$$\sin\theta_2 = \frac{R_{AYX}}{R_{AY}} \Rightarrow R_{AYX} = R_{AY}\sin\theta_2 = 16.5729T\left(\frac{4}{\sqrt{41}}\right) = 10.353T$$

$$\cos\theta_2 = \frac{R_{AYY}}{R_{AY}} \Rightarrow R_{AYY} = R_{AY}\cos\theta_2 = 16.5729T\left(\frac{5}{\sqrt{41}}\right) = 12.9413T$$

- Para $R_{DY} = 12.9247T$

(h)



$$\sin\theta_3 = \frac{R_{DYY}}{R_{DY}} \Rightarrow R_{DYY} = R_{DY}\sin\theta_3 = 12.9247T\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 9.13914T$$

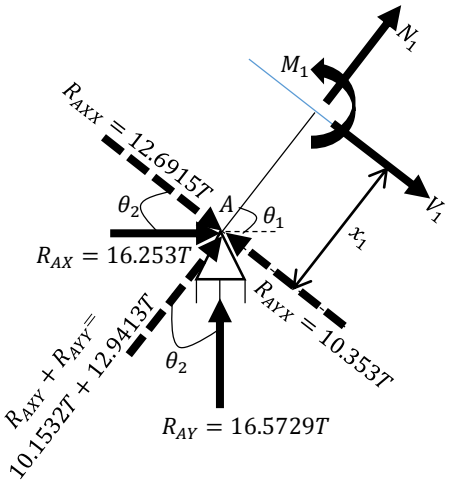
$$\cos\theta_3 = \frac{R_{DYX}}{R_{DY}} \Rightarrow R_{DYX} = R_{DY}\cos\theta_3 = 12.9247T\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 9.13914T$$

Miembro $A - B$.

Corte en el tramo ①. Se secciona la estructura perpendicularmente al eje del miembro a una distancia x_1 de A, antes del punto donde se encuentra aplicada la carga puntual de $8T$; el diagrama de cuerpo libre de la sección cortada, figura 1-4i, con su análisis son

$$0 \leq x_1 \leq \frac{\sqrt{41}}{2}m$$

(i)



$$\circlearrowright + \sum Mcorte = 0 \Rightarrow 10.353(x_1) - 12.6915(x_1) - M_1 = 0 \Rightarrow M_1 = -2.3385x_1$$

$$en\ x_1 = \frac{\sqrt{41}}{2}m, M_1 = -7.48685T.m$$

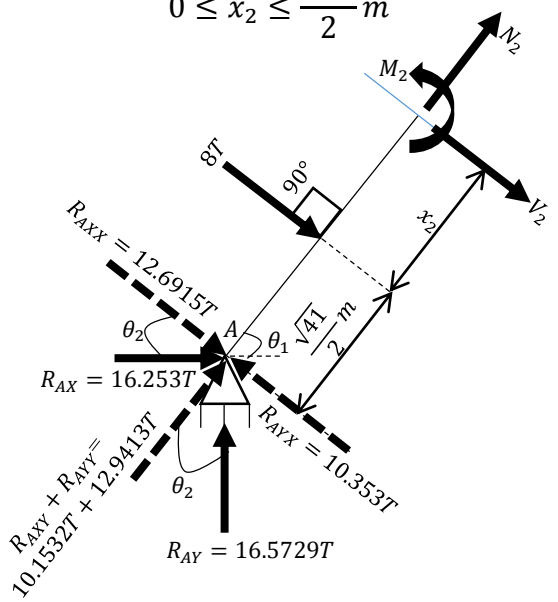
$$\searrow + \sum FX = 0 \Rightarrow 12.6915 - 10.353 + V_1 = 0 \Rightarrow V_1 = -2.3385$$

$$\nearrow + \sum FY = 0 \Rightarrow 10.1532 + 12.9413 + N_1 = 0 \Rightarrow N_1 = -23.0945$$

Corte en el tramo ②. Se secciona al marco perpendicularmente al eje del miembro a una distancia x_2 del punto de aplicación de la carga puntual de $8T$; en la figura 1-4j se muestra el diagrama de cuerpo libre de la porción inferior de la estructura para definir las acciones internas. Al aplicar las ecuaciones de equilibrio, se tiene

$$0 \leq x_2 \leq \frac{\sqrt{41}}{2} m$$

(j)



$$+\circlearrowright \sum Mcorte = 0 \Rightarrow (10.353 - 12.6915)\left(\frac{\sqrt{41}}{2} + x_2\right) - 8(x_2) - M_2 = 0$$

$$M_2 = -10.3385x_2 - 7.48685$$

$$en\ x_2 = 0, M_2 = -7.48685T.m; en\ x_2 = \frac{\sqrt{41}}{2} m, M_2 = -40.5862T.m$$

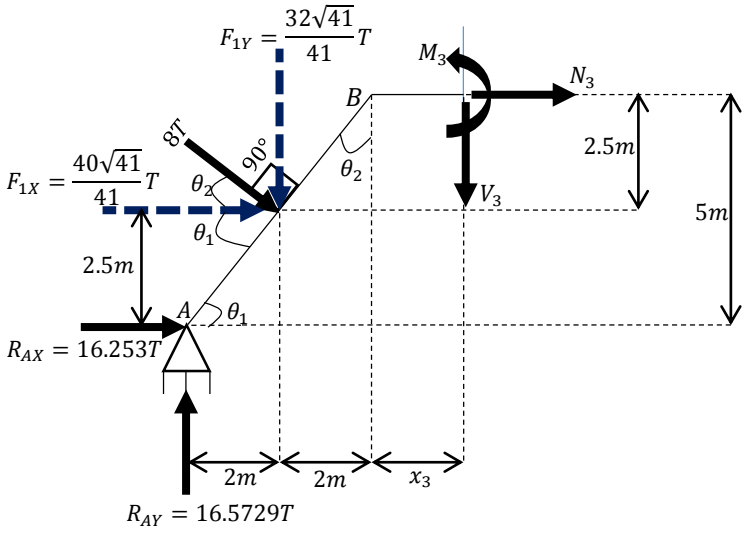
$$\searrow + \sum FX = 0 \Rightarrow 12.6915 - 10.353 + 8 + V_2 = 0 \Longrightarrow V_2 = -10.3385$$

$$\nearrow + \sum FY = 0 \Rightarrow N_2 = -23.0945$$

Miembro $B - C$.

Corte en el tramo ③. Se representa el diagrama de cuerpo libre correspondiente a

$$0 \leq x_3 \leq 2m$$



(k)

la porción izquierda de la estructura que se produce al cortarla (perpendicularmente al eje del miembro) en algún sitio intermedio del tramo comprendido desde B hasta el punto de ubicación de la fuerza de $12T$, figura 1-4k. Por lo tanto,

$$+\circlearrowright \sum Mcorte = 0$$

$$(16.5729)(4+x_3) - 16.253(5) - \left(\frac{40\sqrt{41}}{41}\right)(2.5) - \left(\frac{32\sqrt{41}}{41}\right)(2+x_3) - M_3 = 0$$

$$M_3 = 11.5753x_3 - 40.5859$$

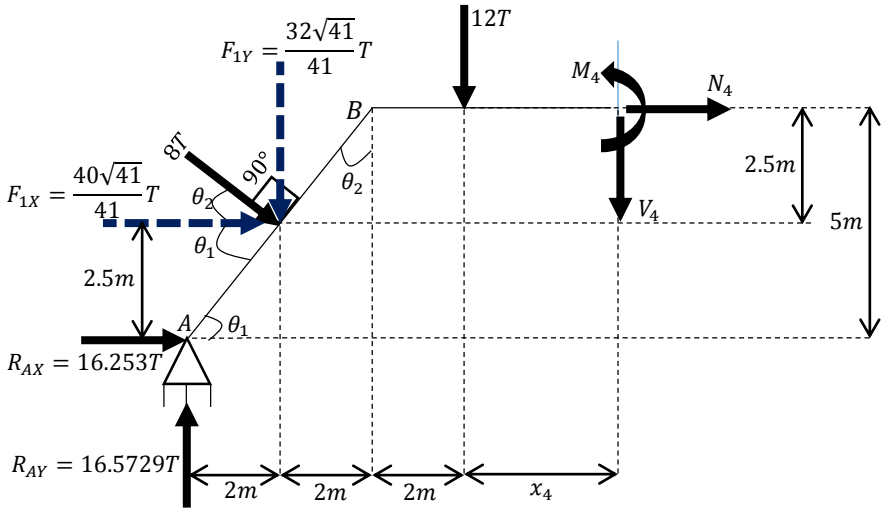
$$x_3 = 0, M_3 = -40.5859T.m; x_3 = 2m, M_3 = -17.4352T.m$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Longrightarrow 16.5729 - \frac{32\sqrt{41}}{41} - V_3 = 0 \Longrightarrow V_3 = 11.5753$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Longrightarrow 16.253 + \frac{40\sqrt{41}}{41} + N_3 = 0 \Longrightarrow N_3 = -22.5$$

Corte en el tramo ④. Se secciona al marco perpendicularmente al eje del miembro a una distancia x_4 del punto donde está aplicada la fuerza de $12T$; en la figura 1-4l se muestra el diagrama de cuerpo libre de la porción izquierda de la estructura. El equilibrio estático del cuerpo libre implica que

$$0 \leq x_4 \leq 3m$$



(l)

$$+\circlearrowright \sum Mcorte = 0$$

$$16.5729(6+x_4) - 16.253(5) - \frac{40\sqrt{41}}{41}(2.5) - \frac{32\sqrt{41}}{41}(4+x_4) - 12(x_4) - M_4 = 0$$

$$M_4 = -0.42466x_4 - 17.4352$$

$$en\ x_4 = 0, M_4 = -17.4352T.m; en\ x_4 = 3m, M_4 = -18.7092T.m$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow 16.5729 - \frac{32\sqrt{41}}{41} - 12 - V_4 = 0 \Longrightarrow V_4 = -0.42466$$

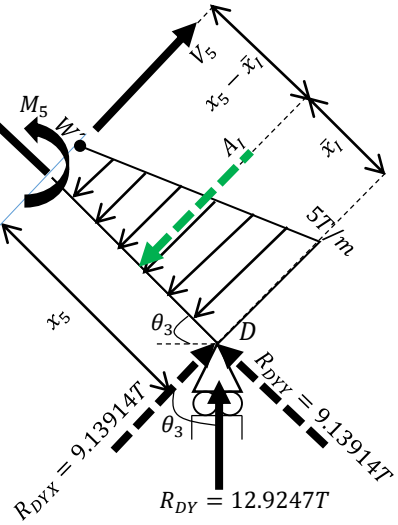
$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow N_4 = -22.5$$

Miembro $D - C$.

Corte en el tramo⑤. Se secciona la estructura perpendicularmente al eje del miembro en un punto arbitrario (intermedio en el segmento $D - C$) a una distancia x_5 de D; en la figura 1-4m se muestra un diagrama de cuerpo libre del segmento de estructura con longitud x_5.

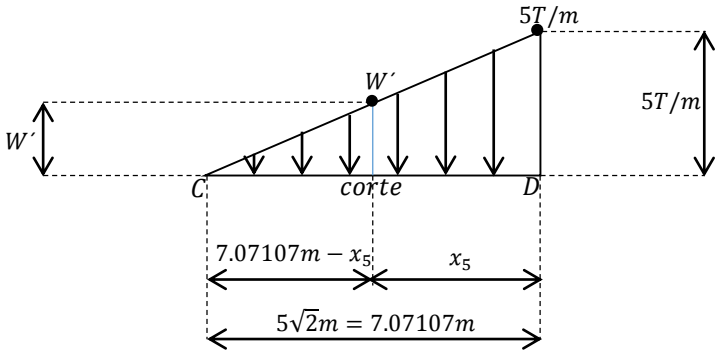
$$0 \leq x_5 \leq 5\sqrt{2}m$$

(m)



Se procede a realizar un análisis de la carga trapezoidal. El siguiente esquema, figura 1-4n, en el que se ha rotado el miembro $D - C$, es útil para determinar el valor en función de x_5 de la intensidad W'. Aplicando triángulos semejantes se tiene

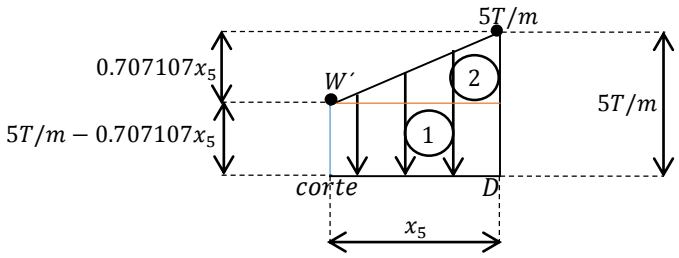
(n)



$$\frac{5}{7.07107} = \frac{W'}{7.07107 - x_5} \Longrightarrow W' = \frac{5(7.07107 - x_5)}{7.07107} = 5 - 0.707107x_5$$

A partir de la figura 1-4ñ se determina el área A_I bajo la recta que representa la fuerza resultante. Esta fuerza actúa a través del centroide de su área $\bar{x}_I$.

(ñ)



$$A_I = A_1 + A_2 = (x_5)(5 - 0.707107x_5) + \frac{(x_5)(0.707107x_5)}{2}$$

$$= (5x_5 - 0.707107{x_5}^2) + (0.353554{x_5}^2) = 5x_5 - 0.353554{x_5}^2$$

$$\bar{x}_I = \frac{\sum \bar{x}A}{\sum A} = \frac{(5x_5 - 0.707107{x_5}^2)\left(\frac{1}{2}x_5\right) + (0.353554{x_5}^2)\left(\frac{1}{3}x_5\right)}{5x_5 - 0.353554{x_5}^2} = \frac{2.5{x_5}^2 - 0.235702{x_5}^3}{5x_5 - 0.353554{x_5}^2}$$

Si se aplican las ecuaciones de equilibrio en el diagrama de cuerpo libre, resulta

$$\circlearrowright + \sum Mcorte = 0$$

$$-9.13914x_5 + \left(5x_5 - 0.353554{x_5}^2\right)\left(x_5 - \frac{2.5{x_5}^2 - 0.235702{x_5}^3}{5x_5 - 0.353554{x_5}^2}\right) - M_5 = 0$$

$$M_5 = -0.117851{x_5}^3 + 2.5{x_5}^2 - 9.13914x_5$$

$$en\ x_5 = 5\sqrt{2}m, M_5 = 18.7098T.m$$

$$\nearrow + \sum FX = 0 \Rightarrow 9.13914 - (5x_5 - 0.353554{x_5}^2) + V_5 = 0$$

$$V_5 = -0.353554{x_5}^2 + 5x_5 - 9.13914$$

$$\nwarrow + \sum FY = 0 \Rightarrow N_5 + 9.13914 = 0 \Rightarrow N_5 = -9.13914$$

Diagramas de fuerza cortante, de momento flector y de fuerza normal

Diagrama de fuerza cortante, figura 1-4o.

Para encontrar la posición del cortante igual a cero en el miembro $D - C$, es decir, donde el momento es máximo, hacemos

$$0 = -0.353554{x_5}^2 + 5x_5 - 9.13914$$

Al resolver la ecuación de segundo grado resulta

$$x_5 = \frac{-5 \pm \sqrt{(5)^2 - 4(-0.353554)(-9.13914)}}{2(-0.353554)} \Longrightarrow x_{5,1} = 2.15674; x_{5,2} = 11.9854$$

Como la solución debe de estar dentro del intervalo real del miembro $[0{,}5\sqrt{2}m]$, se infiere que $x_{5max} = 2.15674m$.

(o)

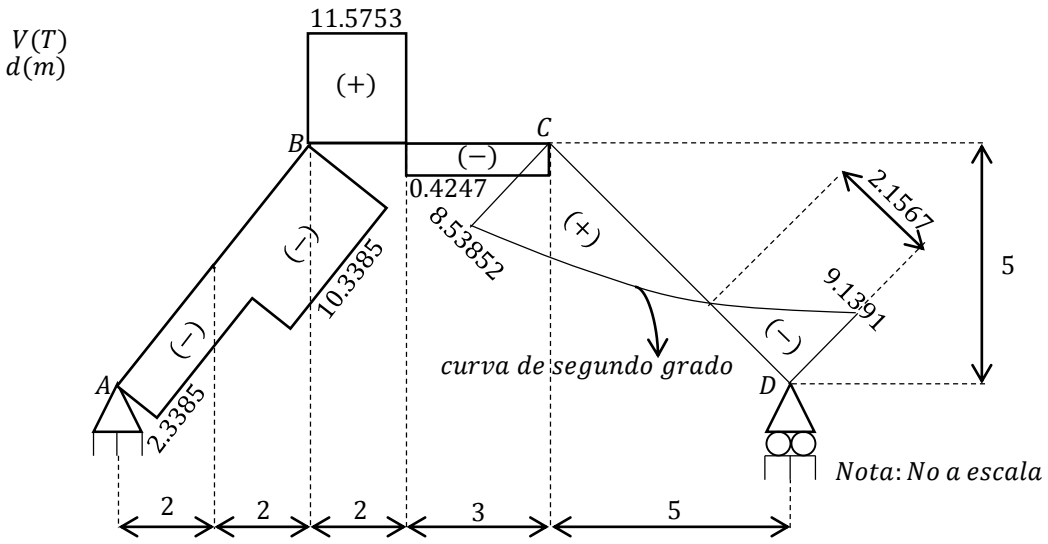
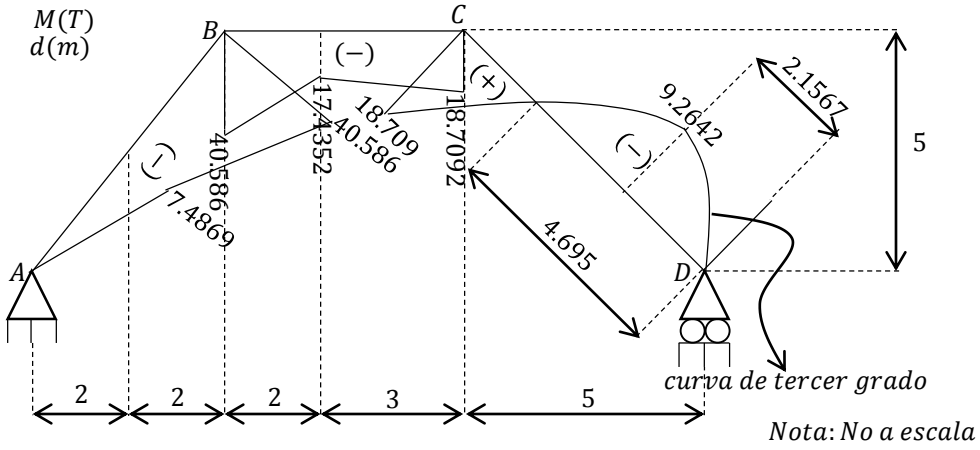


Diagrama de momento flexionante, figura 1-4p.

(p)



Un valor máximo del momento en el miembro $D - C$ puede ser hallado sustituyendo $x_5 = x_{5max}$ en la ecuación de M_5.

$$M_{5max1} = -0.117851(2.15674)^3 + 2.5(2.15674)^2 - 9.13914(2.15674) = -9.26423T.m$$

El otro momento máximo se determina evaluando M_5 en el extremo $x_5 = 5\sqrt{2}m$.

$$M_{5max2} = -0.117851\left(5\sqrt{2}\right)^3 + 2.5\left(5\sqrt{2}\right)^2 - 9.13914\left(5\sqrt{2}\right) = 18.7099T.m$$

La posición del momento igual a cero en este mismo miembro puede hallarse al hacer

$$0 = -0.117851{x_5}^3 + 2.5{x_5}^2 - 9.13914x_5$$

Como el momento nulo debe estar posicionado en el intervalo real del miembro $[0{,}5\sqrt{2}m]$, se cumple que una de las tres raíces esté dentro del rango de valores citado; tal raíz puede ser calculada aplicando el método de tanteos. Para ello, evaluamos el polinomio $f(x) = -0.117851{x_5}^3 + 2.5{x_5}^2 - 9.13914x_5$ en el intervalo mencionado y en donde haya un cambio de signo tenemos una solución; iteramos "n" veces hasta que nuestra solución sea exacta o lo más exacta posible (cuando $f(x) = 0$ o $f(x) \sim 0$). Los resultados obtenidos se visualizan en la tabla 1-3.

x_5	$f(x_5)$	4	-4.099	x_5	$f(x_5)$	4.68	-0.095
0	0	4.1	-3.567	4.6	-0.611	4.69	-0.03
1	-6.756	4.3	-3.015	4.61	-0.547	4.7	0.0354
2	-9.221	4.3	-2.443	4.62	-0.483	4.69	-0.03
3	-8.099	4.4	-1.851	4.63	-0.419	4.691	-0.023
4	-4.099	4.5	-1.24	4.64	-0.354	4.692	-0.016
5	2.0729	4.6	-0.611	4.65	-0.29	4.693	-0.01
6	9.7093	4.7	0.0353	4.66	-0.255	4.694	-0.0039
7.0711	18.7099	4.8	0.69875	4.67	-0.16	4.695	0.0027

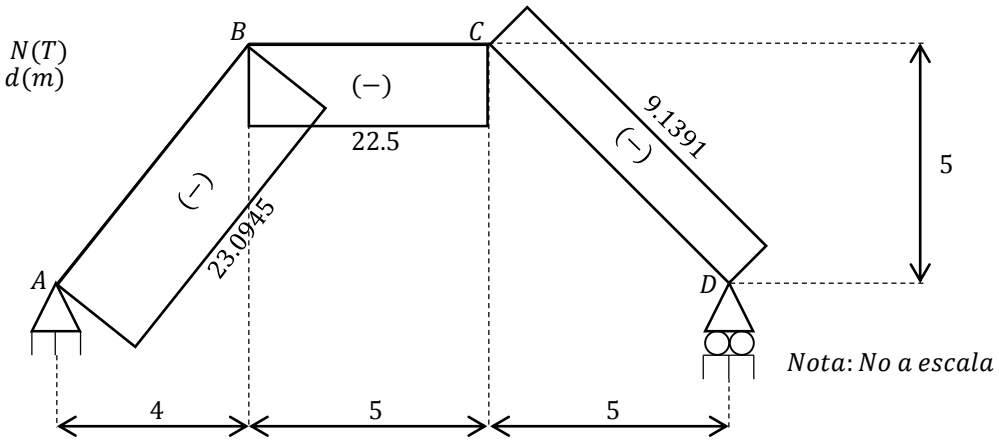
Tabla 1-3

$$\therefore x_{5,1} = 4.695m$$

Evidentemente el momento también es cero en $x_{5,2} = 0$, es decir, en el punto D.

Diagrama de fuerza normal, figura 1-4q.

(q)



Ejercicio 1.5 Fuerzas en las barras de una armadura simétrica.

Instrucciones Calcule las reacciones en los soportes y use el método de los nodos para determinar las fuerzas internas de la armadura que se observa en la figura 1-5a. Indique si los elementos están en tensión o compresión.

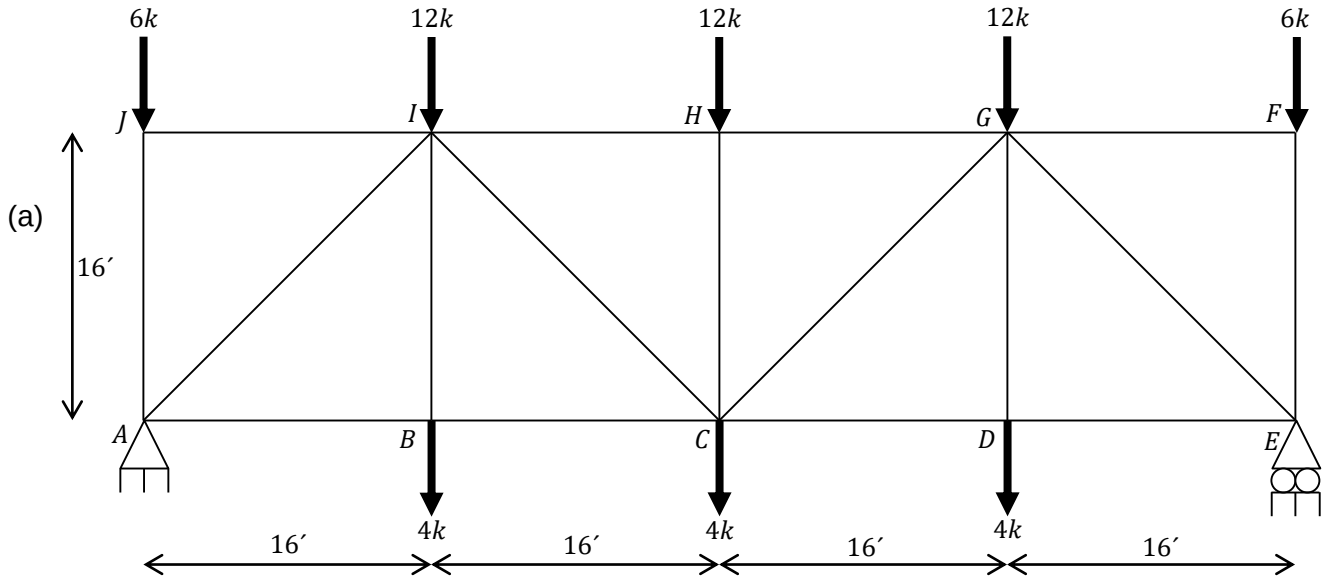


Figura 1-5

SOLUCIÓN

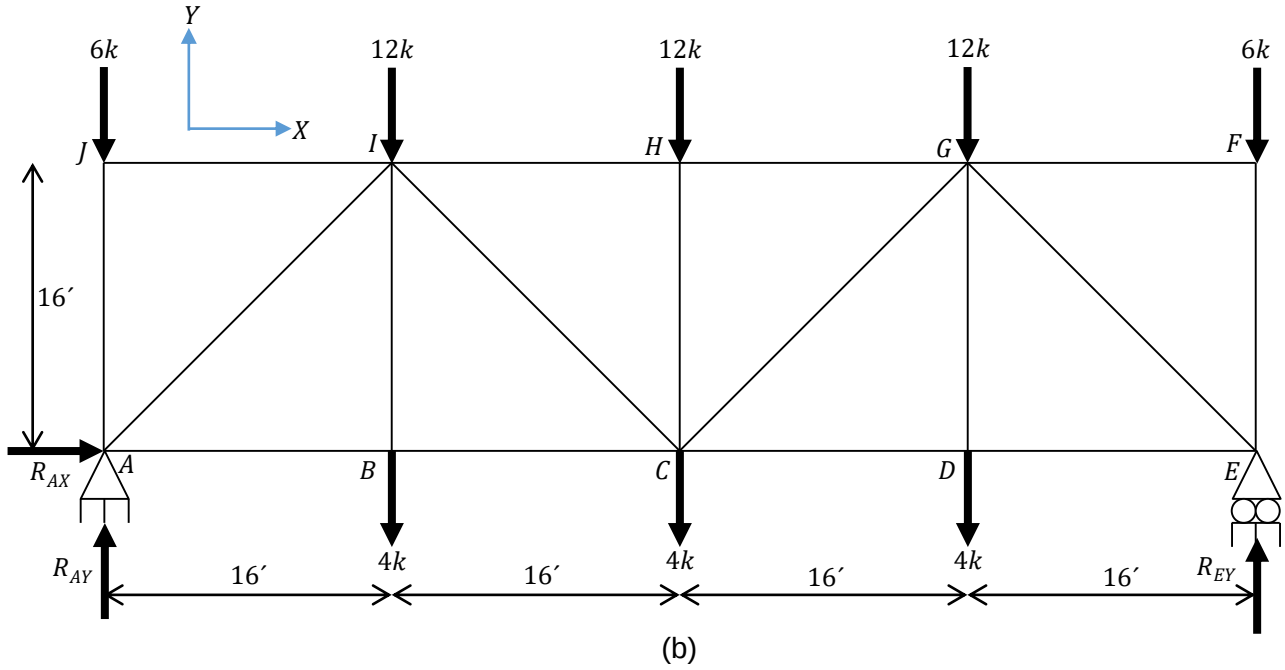
Verificación del grado de indeterminación

La armadura de este ejemplo es isostática externamente debido a que se tienen $r = 3$ reacciones de apoyo (una horizontal y una vertical en el soporte articulado A, y una vertical en el soporte simple E), tres ecuaciones de equilibrio $(\sum FX = 0, \sum FY = 0, \sum M = 0)$ y ninguna ecuación de condición, es decir, $c = 0$. Por otra parte, hay $b = 17$ barras y $j = 10$ nodos (etiquetados desde A hasta J). Si $b + r = 17 + 3 = 20$ y $2j = 2(10) = 20$, entonces $b + r = 2j$. Por lo tanto, la armadura es isostática internamente.

Cálculo de las reacciones en los apoyos

Las reacciones en los soportes se determinan de la misma forma que en las vigas y los marcos. Se realiza un diagrama de cargas en el que aparezcan las fuerzas externas que se aplican a la armadura y las fuerzas reactivas cuyos sentidos deben suponerse arbitrariamente por ser incógnitas. Se orientan los ejes X y Y a lo largo de las líneas que ofrecen la reducción de fuerzas más simple en sus componentes X y Y. Se plantean las ecuaciones de equilibrio y en su caso, las ecuaciones de

condición, y se resuelven; se invierte el sentido de cada fuerza que se propuso en el diagrama cuya magnitud resulte negativa en la solución de las ecuaciones de equilibrio. En la figura 1-5b se representa el diagrama de cargas de la estructura.



(b)

Al aplicar las ecuaciones de equilibrio en una secuencia y al emplear los resultados calculados previamente, se obtiene

$$\circlearrowright + \sum MA = 0$$

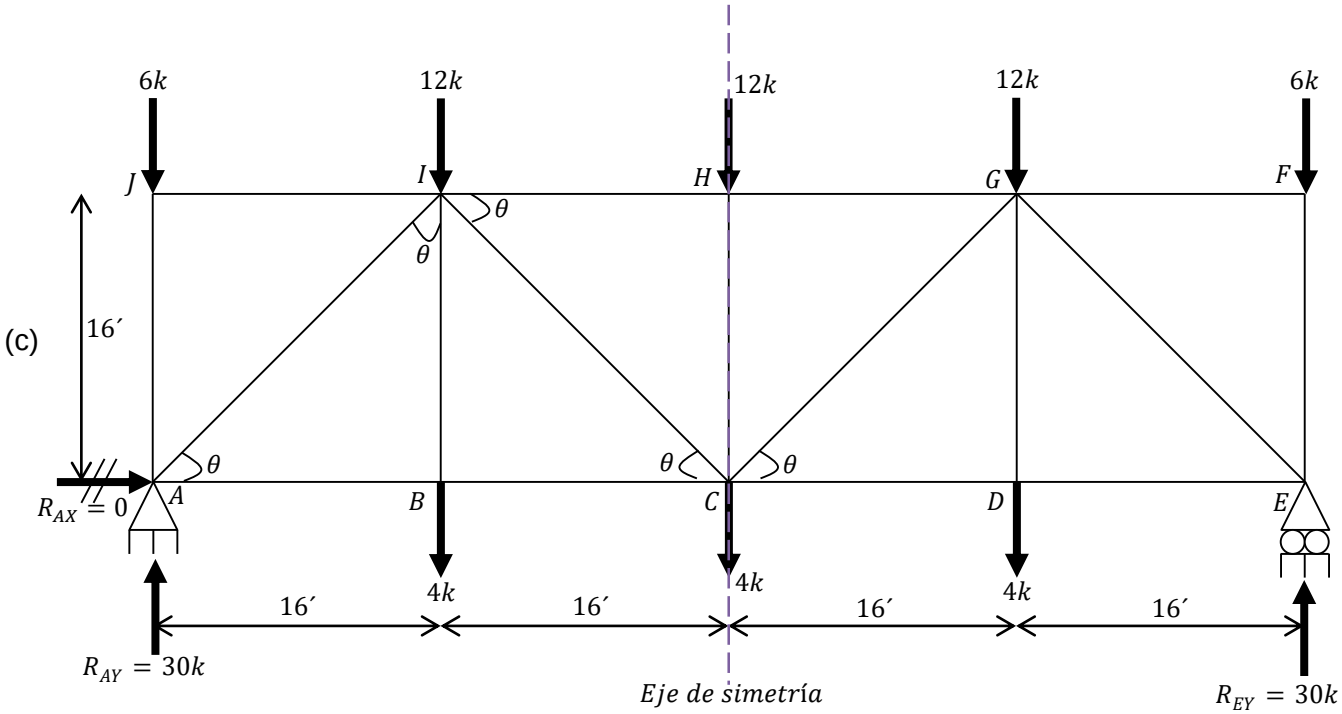
$$12(16) + 4(16) + 12(32) + 4(32) + 12(48) + 4(48) + 6(64) - R_{EY}(64) = 0$$

$$R_{EY} = -\frac{1920}{-64} \Rightarrow \therefore R_{EY} = 30k\uparrow$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow -6 - 12 - 4 - 12 - 4 - 12 - 4 - 6 + 30 + R_{AY} = 0 \Rightarrow \therefore R_{AY} = 30k\uparrow$$

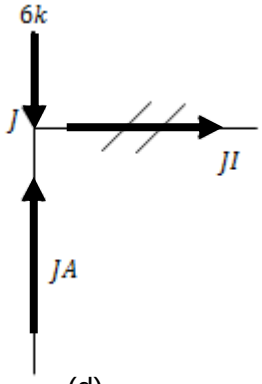
$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow \therefore R_{AX} = 0$$

Como era de esperarse, al ser todas las cargas verticales, la reacción horizontal es nula. Los resultados obtenidos se visualizan en la figura 1-5c; obsérvese que sólo es necesario determinar las fuerzas en la mitad de los elementos debido a la simetría en la estructura tanto con respecto a la carga como a la geometría.



Método de los nodos

Nodo J. Para calcular las fuerzas internas, se empieza con el nodo (junta) J, ya que en él sólo hay dos fuerzas desconocidas, que es el número máximo de fuerzas desconocidas que puede haber en un nodo a analizar, así que también se pudo haber iniciado con el nodo F. Se representa el diagrama de cuerpo libre del nodo, figura 1-5d; el sentido de las incógnitas JA y JI se propone arbitrariamente. Los ejes $X-Y$ han sido orientados de manera horizontal y vertical para mayor facilidad. Se plantearon entonces, para este nodo, las dos ecuaciones de equilibrio que corresponden a fuerzas concurrentes en un plano, y a partir de estas ecuaciones se determinaron ambas fuerzas desconocidas. Una respuesta positiva indica que el sentido propuesto es correcto, mientras que una respuesta negativa indica que el sentido que se supuso debe ser invertido. Así mismo, recuerde que un elemento en



(d)

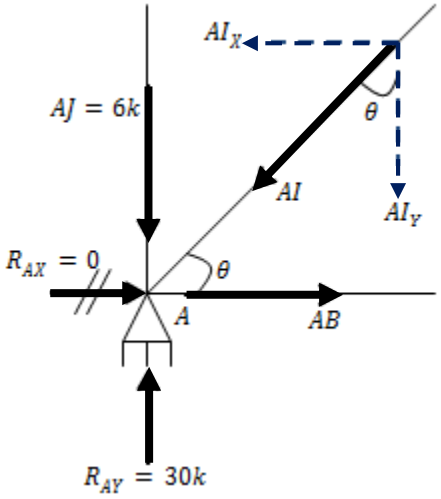
$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow \therefore JI = 0$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow -6 + JA = 0 \Rightarrow \therefore JA = 6k \quad (Compresión)$$

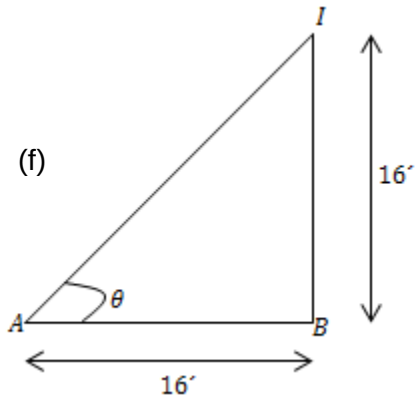
compresión “empuja” a la junta y un elemento en tensión “jala” a la junta. Una vez calculada una fuerza de barra desconocida, deben usarse su magnitud y sentido correctos (tensión o compresión) en los diagramas de cargas de los nodos subsecuentes. Lo explicado corresponde al algoritmo que debe seguirse para analizar un nodo.

Nodo A, figura 1-5e. A continuación se analiza este nodo, ya que al haber calculado anteriormente la fuerza del elemento $J-A$, sólo quedaban dos incógnitas, las fuerzas AB y AI.

(e)



(f)



$$\overline{AI} = \sqrt{16^2 + 16^2} = 16\sqrt{2}m$$

$$\sin\theta = \frac{\overline{BI}}{\overline{AI}} = \frac{16}{16\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \cos\theta = \frac{\overline{AB}}{\overline{AI}} = \frac{16}{16\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Con base en la figura 1-5f, se han determinado $\sin\theta$ y $\cos\theta$ debido a que las componentes rectangulares horizontal y vertical de la fuerza AI involucran esos términos, en forma respectiva. Como el carácter (tensión o compresión) debe ser el mismo en los dos nodos que definen el elemento, se observa que la fuerza interna de la barra $A-J$ empuja a la junta A tal y como lo hace con J. El análisis se hace también con las dos ecuaciones de equilibrio correspondientes a fuerzas concurrentes en un plano.

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow R_{AY} - AJ - AI_Y = 0 \Rightarrow 30 - 6 - AI(\cos\theta) = 0$$

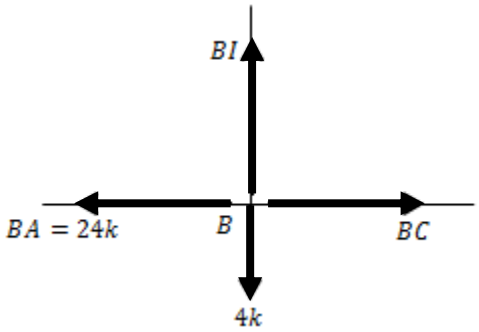
$$24 - AI\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0 \Rightarrow AI = -\frac{24}{-\frac{1}{\sqrt{2}}} \Rightarrow\therefore AI = 33.9411k \quad (Compresión)$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow AB - AI_X = 0 \Rightarrow AB - AI(\sin\theta) = 0$$

$$AB = (33.9411)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow\therefore AB = 24k \quad (Tensión)$$

De forma análoga, se efectúa el análisis de cada uno de los nodos restantes.

Nodo B, figura 1-5g.



(g)

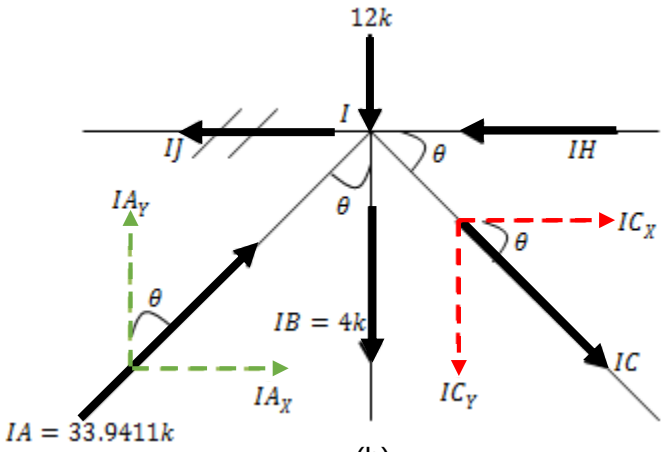
$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow -BA + BC = 0 \Rightarrow BC = BA$$

$$\therefore BC = 24k \quad (Tensión)$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow BI - 4 = 0$$

$$\therefore BI = 4k \quad (Tensión)$$

Nodo I, figura 1-5h.



(h)

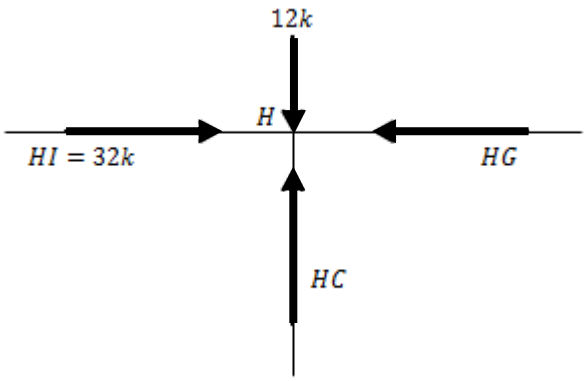
$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow -12 - IB + AI_Y - IC_Y = 0 \Rightarrow IC(\sin\theta) = -12 - 4 + IA(\cos\theta)$$

$$IC\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -16 + (33.9411)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow IC = \frac{8}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \Rightarrow\therefore IC = 11.3137k \quad (Tensión)$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow IA_X + IC_X - IH - IJ = 0 \Rightarrow IA(\sin\theta) + IC(\cos\theta) - IH - 0 = 0$$

$$IH = (33.9411)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + (11.3137)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow\therefore IH = 32k \quad (Compresión)$$

Nodo H, figura 1-5i.



(i)

$$+\rightarrow \sum FX = 0$$

$$HI - HG = 0 \Rightarrow HI = HG$$

$$\therefore HG = 32k \quad (Compresión)$$

$$+\uparrow \sum FY = 0$$

$$HC - 12 = 0 \Rightarrow \therefore HC = 12k \quad (Compresión)$$

Por lo tanto,

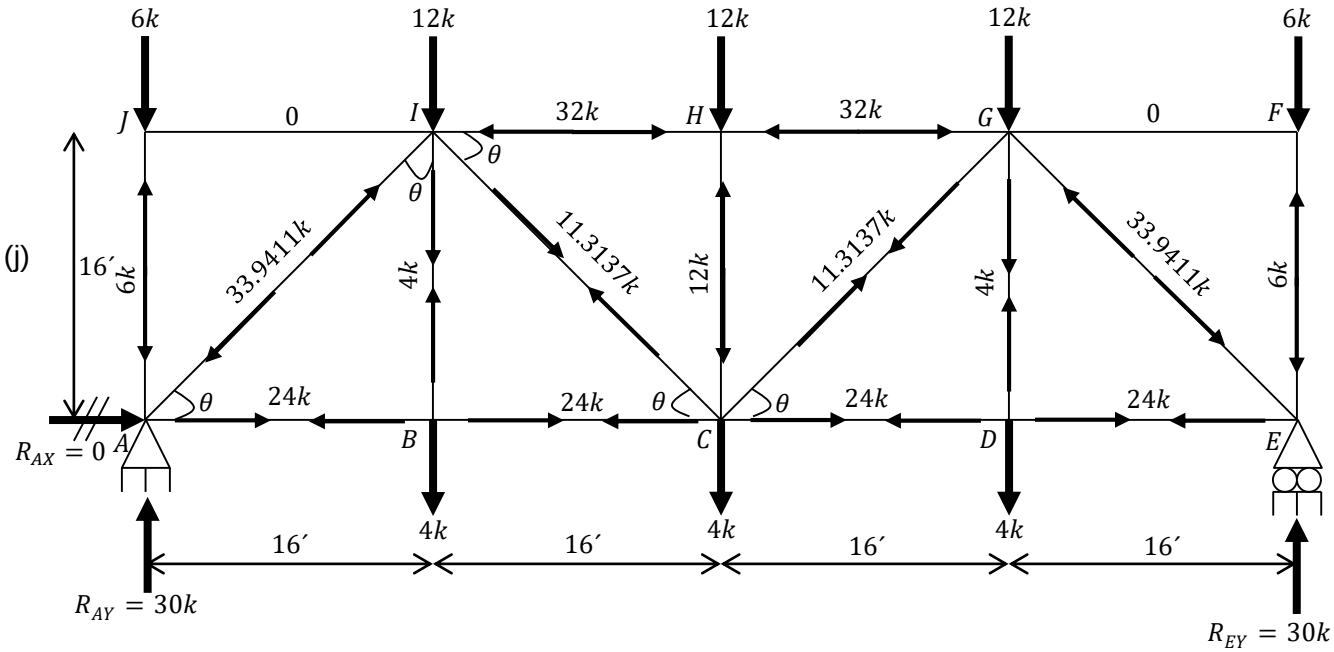
$$FG = JI = 0$$

$$EF = JA = 6k \quad (Compresión) \qquad EG = AI = 33.9411k \quad (Compresión)$$

$$ED = AB = 24k \quad (Tensión) \qquad CD = BC = 24k \quad (Tensión)$$

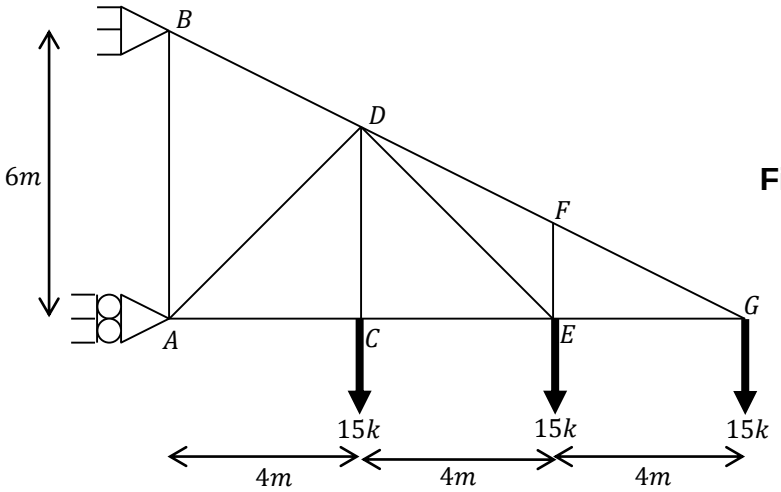
$$DG = BI = 4k \quad (Tensión) \qquad CG = IC = 11.3137k \quad (Tensión)$$

Los resultados obtenidos se visualizan en la figura 1-5j.



Ejercicio 1.6 Fuerzas en las barras de una armadura no simétrica.

Instrucciones Determine la fuerza en cada elemento de la armadura que se muestra en la figura 1-6a.



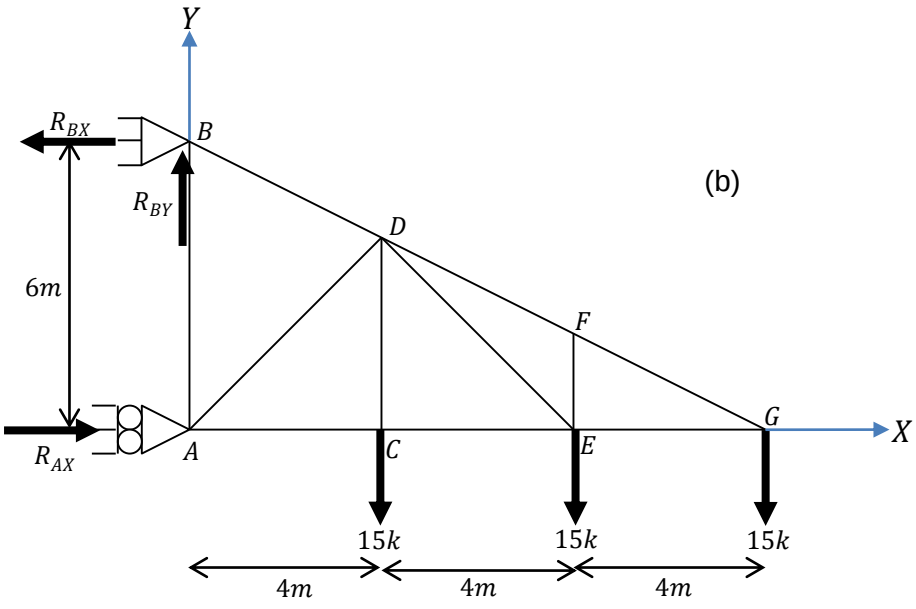
(a)

Figura 1-6

SOLUCIÓN

Verificación del grado de indeterminación

Obsérvese que $b = 11, r = 3, j = 7$ y $c = 0$. Debido a que $r - c = 3$ se cumple, la armadura se describe como determinada externamente desde el punto de vista estático. Además, $b + r = 11 + 3 = 14$ y $2j = 2(7) = 14$ conducen a $b + r = 2j$, así que la armadura es estáticamente determinada de forma interna.



(b)

Cálculo de las reacciones en los apoyos

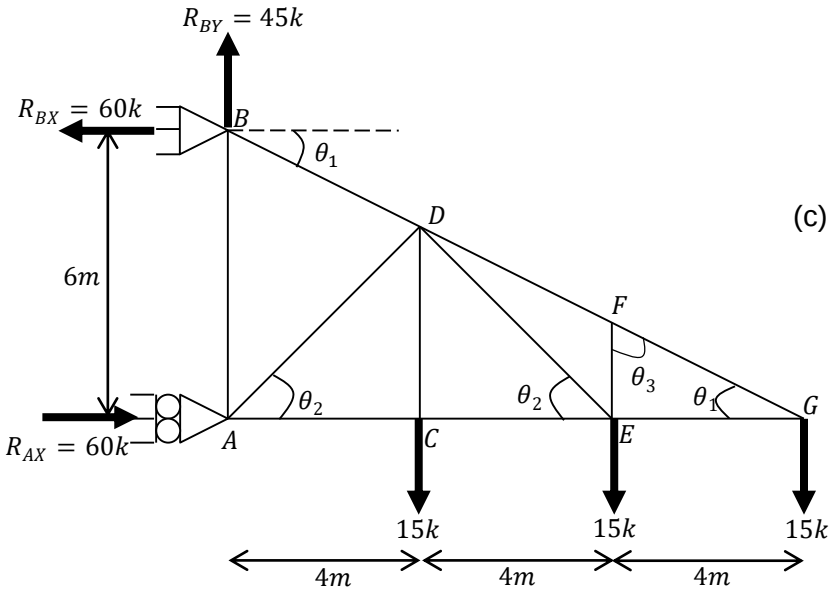
Al aplicar las ecuaciones de equilibrio en el diagrama de cargas, figura 1-6b, resulta

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow -15 - 15 - 15 + R_{BY} = 0 \Rightarrow \therefore R_{BY} = 45k\uparrow$$

$$+\circlearrowleft \sum MA = 0 \Rightarrow 15(4) + 15(8) + 15(12) - R_{BX}(6) = 0 \Rightarrow R_{BX} = -\frac{360}{-6} \Rightarrow \therefore R_{BX} = 60k\leftarrow$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow R_{AX} - 60 = 0 \Rightarrow \therefore R_{AX} = 60k\rightarrow$$

Los resultados obtenidos se visualizan esquemáticamente en la figura 1-6c.



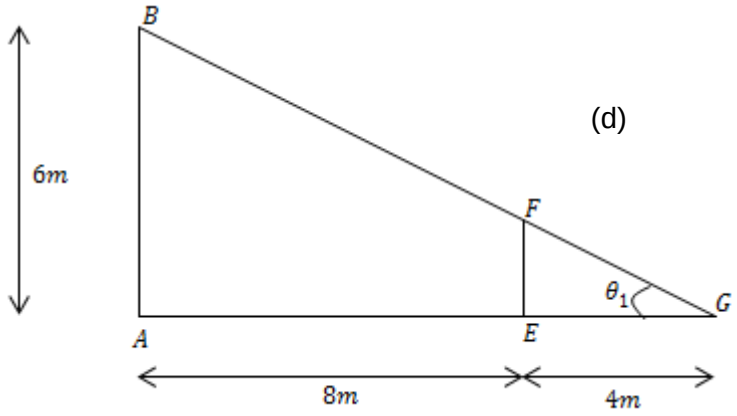
Método de los nodos

Para calcular las fuerzas en los elementos, no hubo otra opción más que iniciar con el nodo G por ser el único en poseer dos incógnitas, las fuerzas GE y GF. A continuación se analizó el nodo F, debido a que al haber calculado anteriormente la fuerza en el elemento $F - E$, sólo quedaban dos incógnitas en este nodo. Después se pasó al nodo E, se siguió con los nodos C y A, y se concluyó con la junta B, ya que conforme se obtenían resultados, se iban utilizando en los diagramas de cuerpo libre de las juntas subsecuentes.

Un cambio en la orientación de los ejes X y Y en el nodo F, lo cual puede ser observado en el correspondiente diagrama, evitó una solución simultánea de ecuaciones.

Las fuerzas internas de la armadura son

Nodo G, figura 1-6e. Con base en la figura 1-6d, se tiene



(d)

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AG}} = \frac{\overline{FE}}{\overline{EG}} \Rightarrow \frac{6}{12} = \frac{\overline{FE}}{4}$$

$$\overline{FE} = \frac{6(4)}{12} = 2m$$

$$\tan\theta_1 = \frac{\overline{FE}}{\overline{EG}} = \frac{2}{4}$$

$$\theta_1 = \tan^{-1}\frac{2}{4} = 26.5651°$$

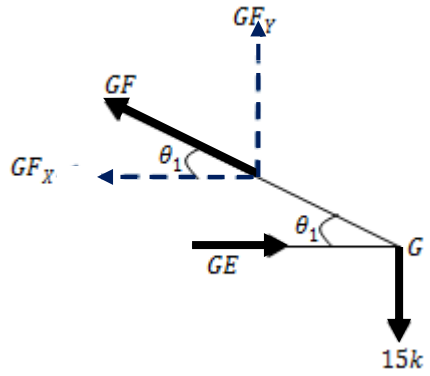
$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow GF_Y - 15 = 0 \Rightarrow GF(\sin\theta_1) - 15 = 0$$

$$GF(\sin 26.5651°) = 15 \Rightarrow GF = \frac{15}{\sin 26.5651°}$$

$$\therefore GF = 33.5410k \quad (Tensión)$$

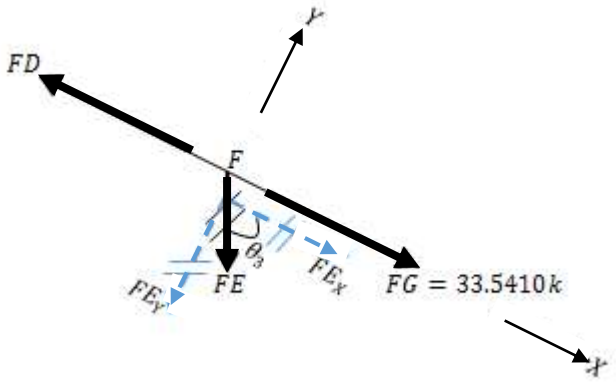
$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow GE - GF_X = 0 \Rightarrow GE - GF(\cos\theta_1) = 0$$

$$GE = (33.5410)(\cos 26.5651°) \Rightarrow \therefore GE = 30k \quad (Compresión)$$



(e)

Nodo F, figura 1-6f.



(f)

$$\nearrow + \sum FY = 0 \Rightarrow -FE_Y = 0$$

$$FE(\sin\theta_3) = 0 \Rightarrow FE = \frac{0}{\cos\theta_3} \Rightarrow \therefore FE = 0$$

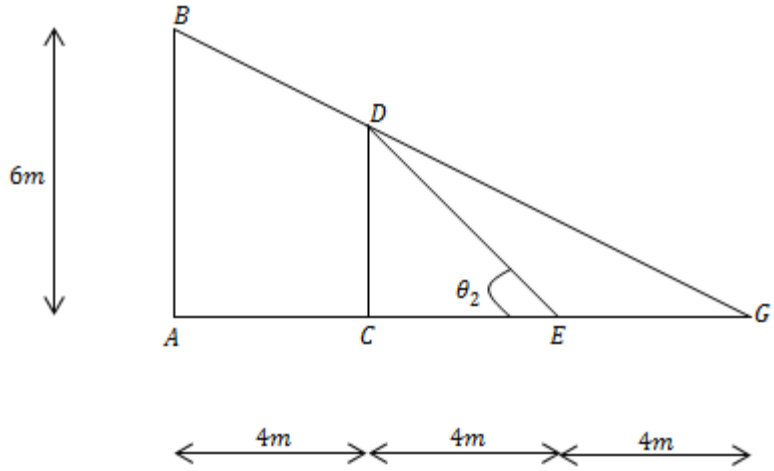
$$\searrow + \sum FX = 0$$

$$-FD + FG + FE_X = 0 \Rightarrow FD = FG + FE(\cos\theta_3)$$

$$FD = 33.5410 + 0(\cos\theta_3)$$

$$\therefore FD = 33.5410k \quad (Tensión)$$

Nodo E, figura 1-6h. A partir de la figura 1-6g, se obtiene



(g)

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AG}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{CG}} \Rightarrow \frac{6}{12} = \frac{\overline{DC}}{8}$$

$$\overline{DC} = \frac{6(8)}{12} = 4m$$

$$\tan\theta_2 = \frac{\overline{FE}}{\overline{EG}} = \frac{4}{4}$$

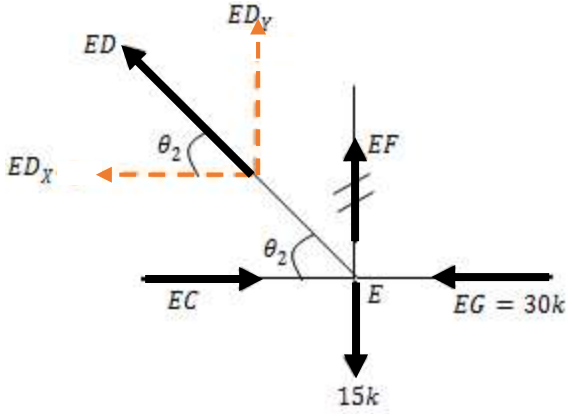
$$\theta_2 = \tan^{-1}\frac{4}{4} = 45°$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow -15 + EF + ED_Y = 0 \Rightarrow ED(\cos\theta_2) = 15 + 0$$

$$ED(\cos 45°) = 15 \Rightarrow ED = \frac{15}{\cos 45°} \Rightarrow \therefore ED = 21.2132k \quad (Tensión)$$

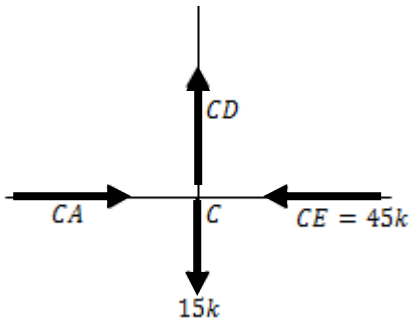
$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow -ED_X + EC - EG = 0 \Rightarrow EC = ED(\sin\theta_2) + EG$$

$$EC = (21.2132)(\sin 45°) + 30 \Rightarrow \therefore EC = 45k \quad (Compresión)$$



(h)

Nodo C, figura 1-6i.



(i)

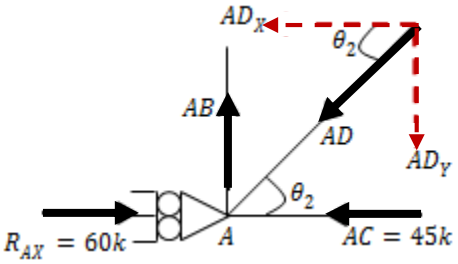
$$+\uparrow \sum FY = 0$$

$$CD - 15 = 0 \Rightarrow \therefore CD = 15k \quad (Tensión)$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0$$

$$CA - CE = 0 \Rightarrow CA = CE \Rightarrow \therefore CA = 45k \quad (Compresión)$$

Nodo A, figura 1-6j.



(j)

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow R_{AX} - AC - AD_X = 0 \Rightarrow AD(\cos\theta_2) = 60 - 45$$

$$AD = \frac{15}{\cos 45°} \Rightarrow\therefore AD = 21.2132k \quad (Compresión)$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow AB - AD_Y = 0 \Rightarrow AB = AD(\sin\theta_2)$$

$$AB = 21.2132(\sin 45°) \Rightarrow\therefore AB = 15k \quad (Tensión)$$

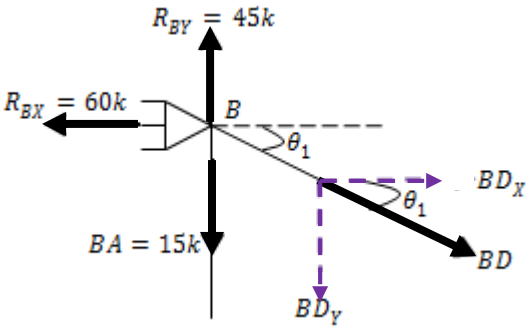
Nodo B, figura 1-6k.

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow R_{BX} + BD_X = 0 \Rightarrow BD(\cos\theta_1) = 60$$

$$BD = \frac{60}{\cos 26.5651°} \Rightarrow\therefore BD = 67.0821k \quad (Compresión)$$

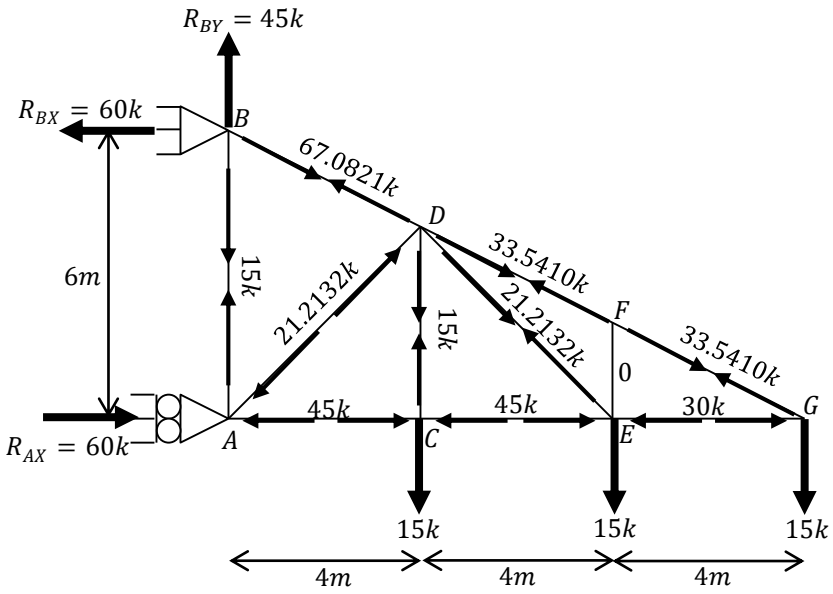
$$+\uparrow \sum FY = R_{BY} - BA - BD_Y = 45 - 15 - BD(\sin\theta_1)$$

$$= 45 - 15 - 67.0821(\sin 26.5651°) = 0 \quad ok$$



(k)

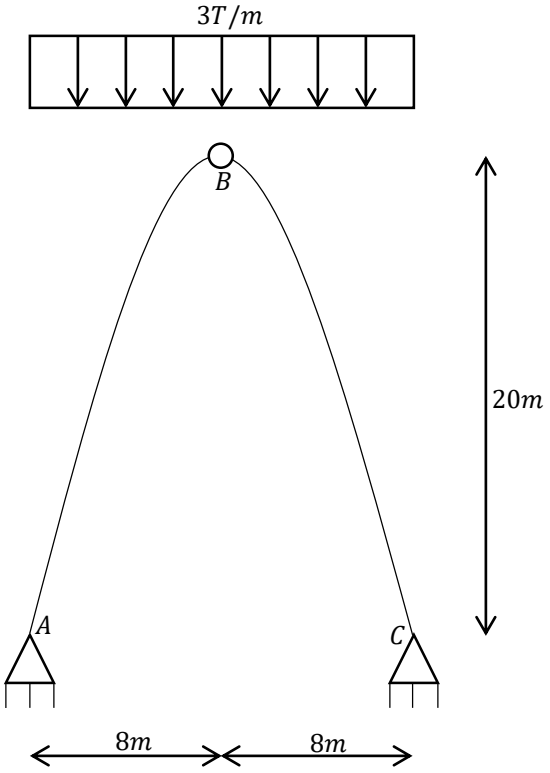
En la figura 1-6l se muestran los resultados obtenidos.



(l)

Ejercicio 1.7 Resolución de un arco triarticulado parabólico

Instrucciones El arco de tres articulaciones que se muestra en la figura 1-7a tiene una forma parabólica. El arco soporta una carga uniforme distribuida de $3T/m$ y tiene las dimensiones indicadas, lo cual hace que sea simétrico. Demuestre que toda la estructura está sometida únicamente a compresión axial.



(a)

Figura 1-7

SOLUCIÓN

Cálculo de las reacciones en los soportes

Como todo arco triarticulado, el de este ejemplo es isostático. Para calcular las reacciones en los soportes, el arco se desmonta y luego se realiza un diagrama de cuerpo libre de cada segmento, figura 1-7b. La articulación se ubica en la clave, es decir, en el punto B. Entonces, se aíslan los segmentos $A-B$ y $B-C$. Obsérvese que se tienen seis incógnitas de reacción (el sentido de cada una se supone arbitrariamente), pero como se pueden aplicar las tres ecuaciones de la estática a cada segmento, hay seis ecuaciones de equilibrio disponibles. En los diagramas se indican las resultantes de las cargas distribuidas y su punto de aplicación de cada una.

Para determinar las reacciones B_X y B_Y en la articulación, tomamos momentos alrededor de A en el segmento $A-B$ y alrededor de C en el segmento $B-C$. Las dos ecuaciones resultantes se resuelven simultáneamente.

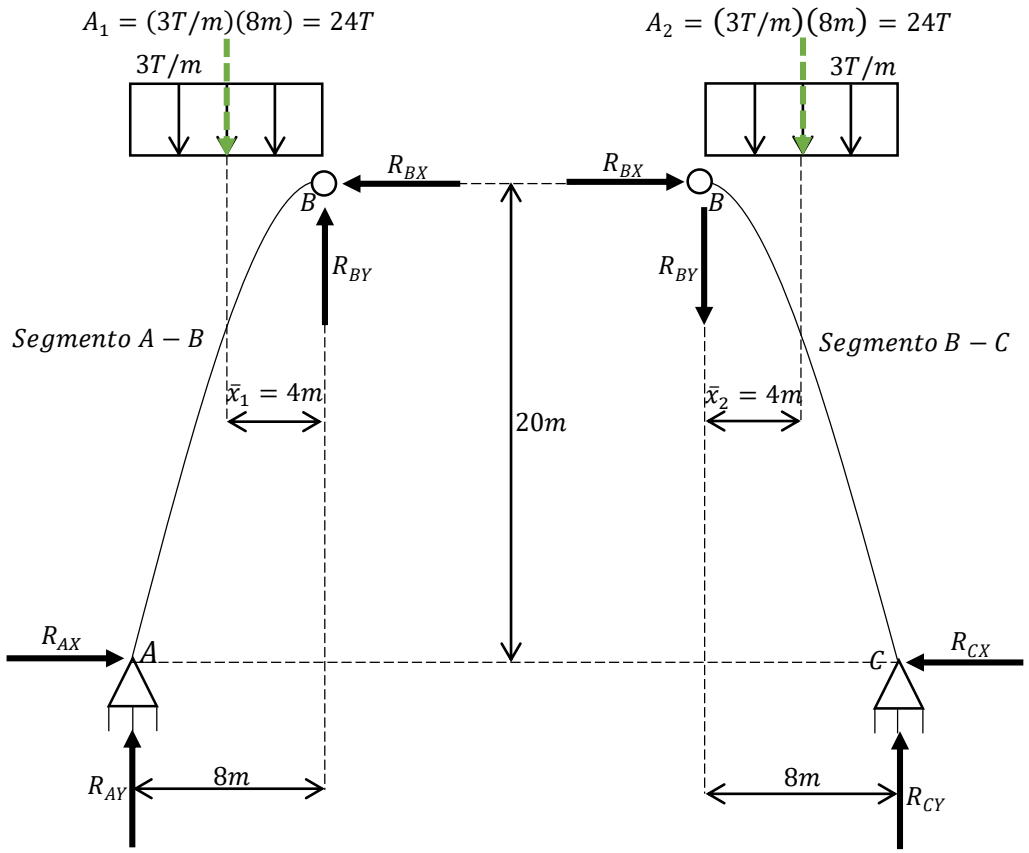
Segmento $A-B$ del arco:

$$\circlearrowright+\sum MA=0 \Rightarrow -R_{BX}(20)-R_{BY}(8)+24(4)=0 \Rightarrow -20R_{BX}-8R_{BY}=-96---(1)$$

Segmento $B-C$ del arco:

$$\circlearrowright+\sum MC=0 \Rightarrow R_{BX}(20)-R_{BY}(8)-24(4)=0 \Rightarrow 20R_{BX}-8R_{BY}=96---(2)$$

(b)



Si se despeja R_{BY} de la ecuación (1) se tiene

$$R_{BY}=\frac{-96+20R_{BX}}{-8}=12-\frac{5}{2}R_{BX}---(3)$$

Combinando las ecuaciones (3) y (2) resulta

$$20R_{BX}-8\left(12-\frac{5}{2}R_{BX}\right)=96 \Rightarrow R_{BX}=\frac{96+8(12)}{20+8\left(\frac{5}{2}\right)} \Rightarrow R_{BX}=\frac{24}{5}$$

Reemplazando el valor calculado de R_{BX} en la expresión (3) da

$$R_{BY} = 12 - \frac{5}{2}\left(\frac{24}{5}\right) = 0$$

Dado que se obtuvo una magnitud positiva para R_{BX}, el sentido de esta reacción es el mismo que se muestra en ambas porciones del arco; luego, note como en realidad R_{BY} no existe. A continuación se determinan las reacciones en los soportes con base en las ecuaciones de equilibrio de fuerzas.

Segmento $A - B$ del arco:

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow R_{AX} - \frac{24}{5} = 0 \Rightarrow\therefore R_{AX} = \frac{24}{5}T \rightarrow$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow R_{AY} - 24 = 0 \Rightarrow\therefore R_{AY} = 24T \uparrow$$

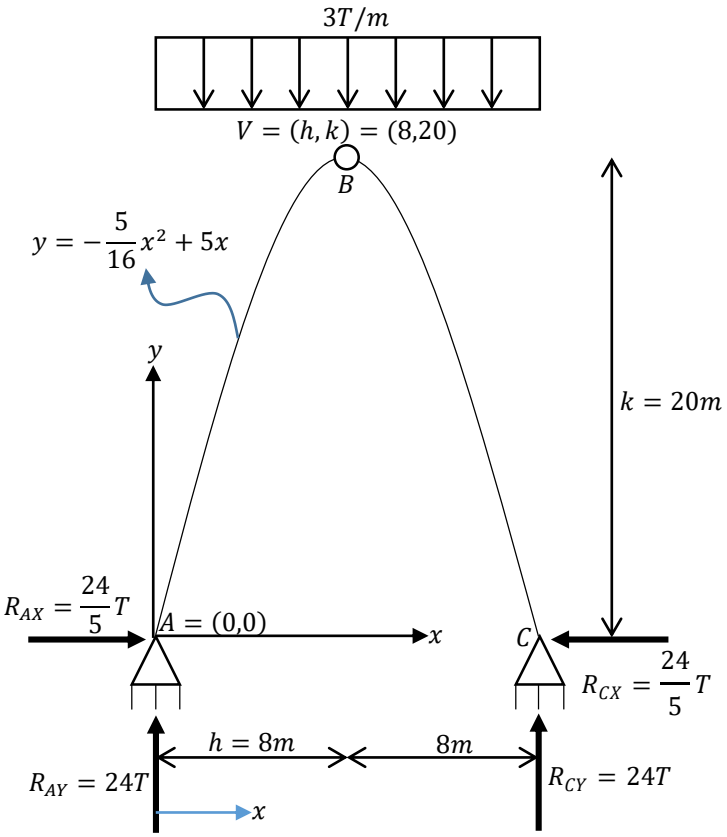
Segmento $B - C$ del arco:

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow \frac{24}{5} - R_{CX} = 0 \Rightarrow\therefore R_{CX} = \frac{24}{5}T \leftarrow$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow R_{CY} - 24 = 0 \Rightarrow\therefore R_{CY} = 24T \uparrow$$

Se dibuja un diagrama del arco completo mostrando los resultados, figura 1-7c; las reacciones de la articulación se omiten por anularse entre sí.

(c)



Ecuación que define al arco parabólico

Se ha elegido al punto A como el origen del sistema de coordenadas, sin embargo, el lector debe estar consciente de que el origen bien pudo haberse seleccionado en cualquier otro punto. Por consiguiente, el vértice V, ubicado en B, no está en el origen. La ecuación de una parábola es

$$(x-h)^2 = -4p(y-k) - - - (a)$$

Al sustituir $h = 8$ y $k = 20$ en la ecuación (a) se tiene

$$(x-8)^2 = -4p(y-20) - - - (b)$$

Si se despeja p de la ecuación (b) se llega a

$$p = -\frac{(x-8)^2}{4(y-20)} - - - (c)$$

Reemplazando las coordenadas del origen en la ecuación (c) obtenemos

$$p = -\frac{(x-8)^2}{4(y-20)} = -\frac{(0-8)^2}{4(0-20)} = \frac{64}{80} = \frac{4}{5}$$

Al expandir la ecuación (b), sustituir el valor calculado de p y despejar y da

$$x^2 - 16x + 64 = -4py + 80p \Rightarrow x^2 - 16x + 64 = -4\left(\frac{4}{5}\right)y + 80\left(\frac{4}{5}\right)$$

$$x^2 - 16x + 64 = -\frac{16}{5}y + 64 \Rightarrow -\frac{16}{5}y = x^2 - 16x$$

$$y = -\frac{5}{16}(x^2 - 16x) = -\frac{5}{16}x^2 + 5x - - - (d)$$

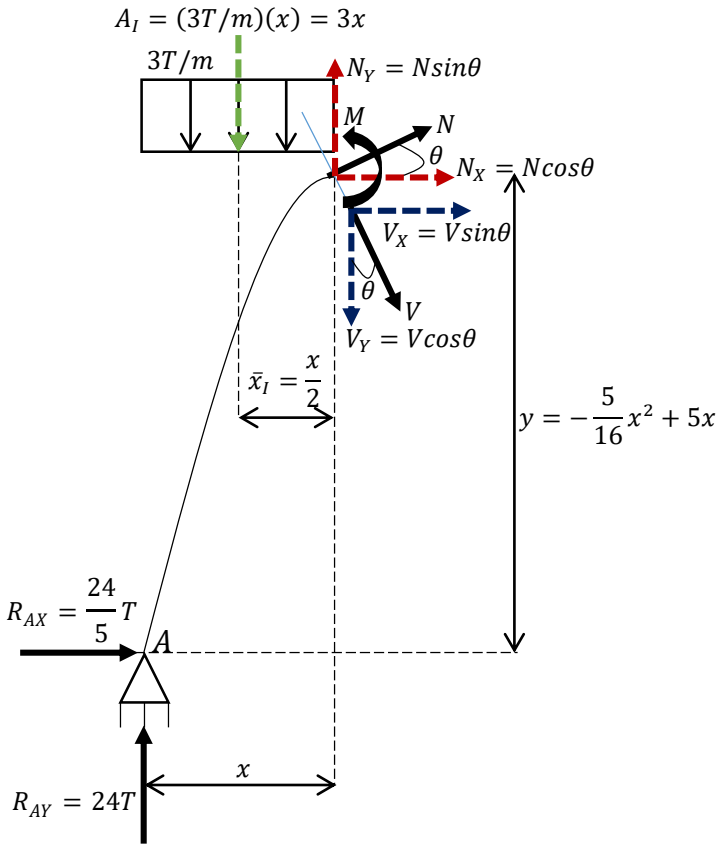
La expresión (d) es la ecuación que define al arco parabólico de este ejemplo.

Funciones de la fuerza cortante, de la fuerza normal y del momento flector

Ya que se han calculado las reacciones en los soportes y se ha deducido la ecuación parabólica del arco, es posible determinar las variaciones de las fuerzas normal N y cortante V internas, y del momento flector M, en función de la posición x empleando el método de las secciones. La distribución de la carga y la geometría de la estructura no varían, así que sólo se distingue un único segmento, el $A - C$, por lo que se efectúa nada más un corte perpendicular al eje del arco para definir las acciones internas a lo largo de él. La coordenada x con origen en A, es positiva hacia la derecha y puede usarse para analizar en su totalidad a la región mencionada. En la figura 1-7d se proporciona un diagrama de cargas de la sección cortada. Los elementos mecánicos actúan en su dirección positiva. La fuerza

resultante A_I de la carga distribuida uniforme del corte y su punto de aplicación $\bar{x}_I$ se determinan como de costumbre. Lógicamente, la fuerza normal, que es tangente a la curva parabólica en el punto de corte, es perpendicular a la fuerza cortante, y esta última a su vez, es perpendicular al eje del arco en tal punto considerado. Estas dos últimas fuerzas deben descomponerse de manera individual en sus componentes rectangulares horizontal y vertical.

$$0 \leq x \leq 16m$$

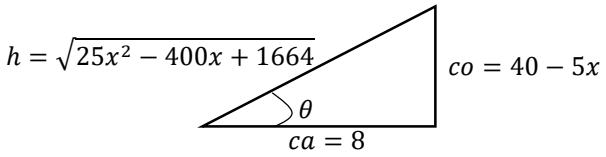


(d)

La pendiente del segmento cortado en el punto del corte es igual a la derivada. Por consiguiente,

$$tan\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{d\left(-\frac{5}{16}x^2 + 5x\right)}{dx} = 5 - \frac{5}{8}x = \frac{40 - 5x}{8} = \frac{co}{ca}$$

Siendo el cociente del cateto opuesto co entre el cateto adyacente ca la definición para la tangente de un determinado ángulo θ, la expresión matemática anterior puede ser acomodado en un triángulo rectángulo como el de la figura 1-7e.



(e)

Se calcula la hipotenusa h a través del Teorema de Pitágoras.

$$h = \sqrt{(8)^2 + (40 - 5x)^2} = \sqrt{25x^2 - 400x + 1664}$$

Ahora, ya es posible determinar los valores en función de x de $sin\theta$ y $cos\theta$, los cuales son útiles cuando se resuelven las fuerzas N y V en sus componentes.

$$sin\theta = \frac{co}{h} = \frac{40 - 5x}{\sqrt{25x^2 - 400x + 1664}}$$

$$cos\theta = \frac{ca}{h} = \frac{8}{\sqrt{25x^2 - 400x + 1664}}$$

Se aplican las ecuaciones de equilibrio en el cuerpo libre de la figura 1-7d. Tomando momentos respecto del punto del corte, se calcula el momento interno M.

$$\circlearrowright + \sum Mcorte = 0 \Rightarrow 24(x) - \frac{24}{5}\left(-\frac{5}{16}x^2 + 5x\right) - 3x\left(\frac{x}{2}\right) - M = 0 \Rightarrow M = 0$$

A partir del planteamiento de las ecuaciones de equilibrio para fuerzas en las direcciones horizontal y vertical, se origina un sistema simultáneo de ecuaciones que al resolverse proporciona los valores de las fuerzas normal N y cortante V internas.

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow \frac{24}{5} + N_X + V_X = 0 \Rightarrow \frac{24}{5} + Ncos\theta + Vsin\theta = 0$$

$$\frac{24}{5} + N\left(\frac{8}{\sqrt{25x^2 - 400x + 1664}}\right) + V\left(\frac{40 - 5x}{\sqrt{25x^2 - 400x + 1664}}\right) = 0 - - - (I)$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow 24 - 3x + N_Y - V_Y = 0 \Rightarrow 24 - 3x + Nsin\theta - Vcos\theta = 0$$

$$24-3x+N\left(\frac{40-5x}{\sqrt{25x^2-400x+1664}}\right)-V\left(\frac{8}{\sqrt{25x^2-400x+1664}}\right)=0---(II)$$

Al despejar N de la ecuación (I) obtenemos

$$N=-\frac{V\left(\frac{40-5x}{\sqrt{25x^2-400x+1664}}\right)+\frac{24}{5}}{\left(\frac{8}{\sqrt{25x^2-400x+1664}}\right)}---(III)$$

Al combinar las ecuaciones (II) y (III) resulta

$$24-3x+\left(-\frac{V\left(\frac{40-5x}{\sqrt{25x^2-400x+1664}}\right)+\frac{24}{5}}{\left(\frac{8}{\sqrt{25x^2-400x+1664}}\right)}\right)\left(\frac{40-5x}{\sqrt{25x^2-400x+1664}}\right)$$

$$-V\left(\frac{8}{\sqrt{25x^2-400x+1664}}\right)=0$$

Si efectuamos un cambio de variable, tenemos

$$24-3x+\left(-\frac{V\left(\frac{co}{h}\right)+\frac{24}{5}}{\frac{ca}{h}}\right)\left(\frac{co}{h}\right)-V\left(\frac{ca}{h}\right)=0---(IV)$$

Multiplicando la ecuación (IV) por $\frac{ca}{h}$ da

$$(24-3x)\left(\frac{ca}{h}\right)-\left(V\left(\frac{co}{h}\right)+\frac{24}{5}\right)\left(\frac{co}{h}\right)-V\left(\frac{ca}{h}\right)^2=0---(V)$$

Multiplicamos la ecuación (V) por h. Por consiguiente,

$$(24-3x)(ca)-\left(V\left(\frac{co}{h}\right)+\frac{24}{5}\right)(co)-V\left(\frac{(ca)^2}{h}\right)=0---(VI)$$

Se expande y se factoriza la ecuación (VI), por lo que

$$(24-3x)(ca)-V\left(\frac{(co)^2}{h}\right)-\frac{24}{5}co-V\left(\frac{(ca)^2}{h}\right)=0$$

$$-V\left(\frac{(co)^2}{h}+\frac{(ca)^2}{h}\right)=\frac{24}{5}co-(24-3x)(ca)$$

No obstante,

$$\frac{24}{5}co-(24-3x)(ca)=\frac{24}{5}(40-5x)-(24-3x)(8)=192-24x-192+24x=0$$

En consecuencia,

$$-V\left(\frac{(co)^2}{h}+\frac{(ca)^2}{h}\right)=0\Rightarrow V=-\frac{0}{\left(\frac{(co)^2}{h}+\frac{(ca)^2}{h}\right)}=0$$

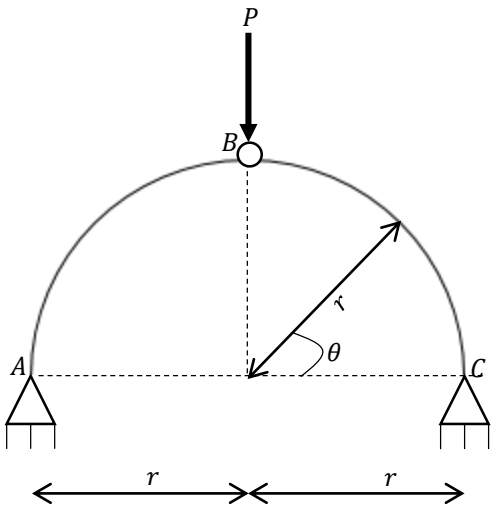
Si se reemplaza $V=0$ en la ecuación (III) da

$$N=-\frac{(0)\left(\frac{40-5x}{\sqrt{25x^2-400x+1664}}\right)+\frac{24}{5}}{\left(\frac{8}{\sqrt{25x^2-400x+1664}}\right)}=-\frac{3\sqrt{25x^2-400x+1664}}{5}$$

De acuerdo con los resultados obtenidos, se concluye que un arco de forma parabólica, con una rótula en la clave y dos apoyos articulados posicionados a la misma altura, que se somete una carga vertical uniformemente distribuida de manera horizontal que abarca una longitud igual a la distancia que hay entre apoyo y apoyo, sólo resistirá fuerzas a compresión axial. Bajo estas condiciones, el arco recibe el nombre de arco funicular, porque dentro de él no se generan fuerzas de flexión ni fuerzas cortantes, ya que como se dedujo, tanto V como M son nulos a lo largo de la estructura. Un arco de tres articulaciones, tal y como se mencionó al inicio, es estáticamente determinado, en consecuencia, no se ve afectado por cambios de temperatura o en el asentamiento. Puede ser construido de concreto, madera o metal. El lector puede dibujar fácilmente el diagrama de carga axial (cortante) de este ejemplo al evaluar la función de N en el intervalo $0\leq x\leq 16m$ y después graficar los datos.

Ejercicio 1.8 Resolución de un arco triarticulado circular

Instrucciones Calcule las reacciones en los soportes y las funciones de las acciones internas en el arco de forma circular mostrado en la figura 1-8a que soporta una carga puntual P en B.



(a)

Figura 1-8

SOLUCIÓN

Cálculo de las reacciones en los soportes

El arco circular triarticulado es isostático y además simétrico tanto con respecto a la carga como a la geometría. Para evitar la solución de un sistema simultáneo de ecuaciones, se aplican las ecuaciones de equilibrio en la siguiente secuencia y se van usando los resultados calculados previamente.

Arco completo:

$$\circlearrowleft+\sum MA = 0 \Rightarrow P(r) - R_{CY}(2r) = 0 \Rightarrow\therefore R_{CY} = \frac{P}{2}\uparrow$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow R_{AY} - P + \frac{P}{2} = 0 \Rightarrow\therefore R_{AY} = \frac{P}{2}\uparrow$$

Recuerde que el momento en la rótula B es nulo.

Segmento $A - B$ del arco:

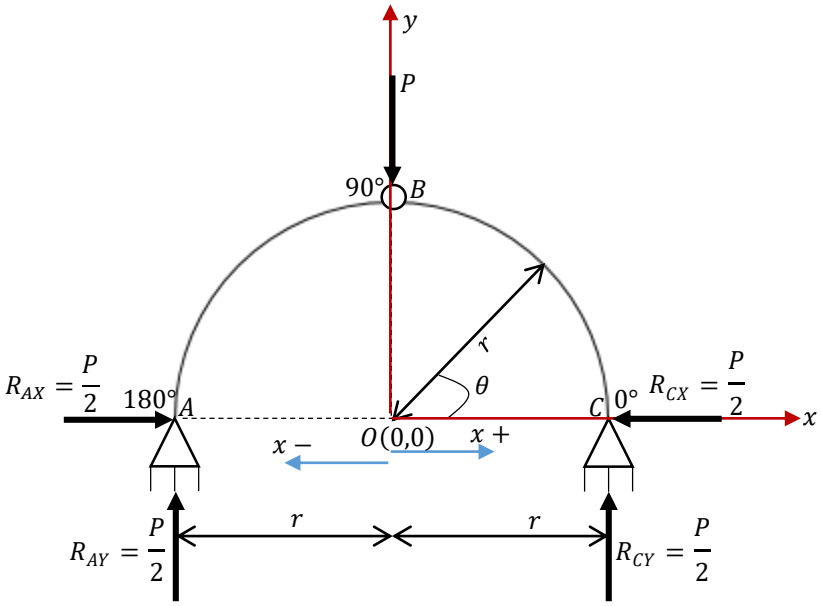
$$\circlearrowleft+\sum MB = 0 \Rightarrow \frac{P}{2}(r) - R_{AX}(r) = 0 \Rightarrow\therefore R_{AX} = \frac{P}{2}\rightarrow$$

Arco completo:

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow \frac{P}{2} - R_{CX} = 0 \Rightarrow \therefore R_{CX} = \frac{P}{2} \leftarrow$$

Funciones de la fuerza cortante, de la fuerza normal y del momento flector

En la figura 1-8b se presentan esquemáticamente los resultados obtenidos.



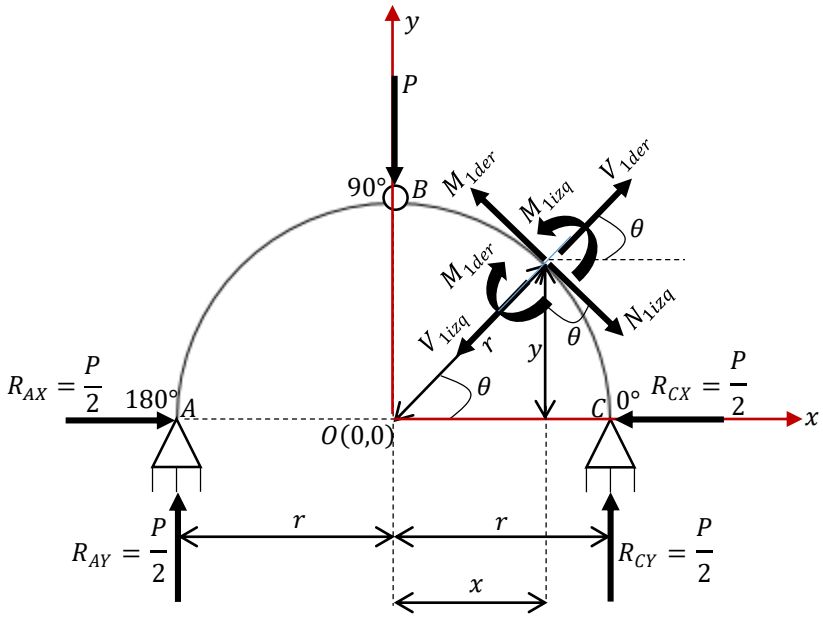
(b)

El centro de la circunferencia se elige en el origen O de los ejes globales x, y, los cuales se muestran en la figura en su dirección positiva. Obsérvese como a los puntos A, B y C les corresponden, de forma respectiva, los ángulos de $180°, 90°$ y $0°$. Las funciones de las acciones internas son discontinuas en el punto B debido a que justo ahí se encuentra aplicada una carga P. Entonces, la estructura debe seccionarse en dos ocasiones, una en el tramo $A - B$ y otra en el tramo $B - C$. Se utilizará una sola coordenada x cuyo origen está en O y que es positiva hacia adelante y negativa hacia atrás. Al emplear el método de las secciones se tiene

Parte $B - C$. Se secciona el arco en un punto arbitrario (intermedio en el segmento $B - C$) a una distancia horizontal x del origen O, figura 1-8c.

$$0° \leq \theta \leq 90°$$

(c)

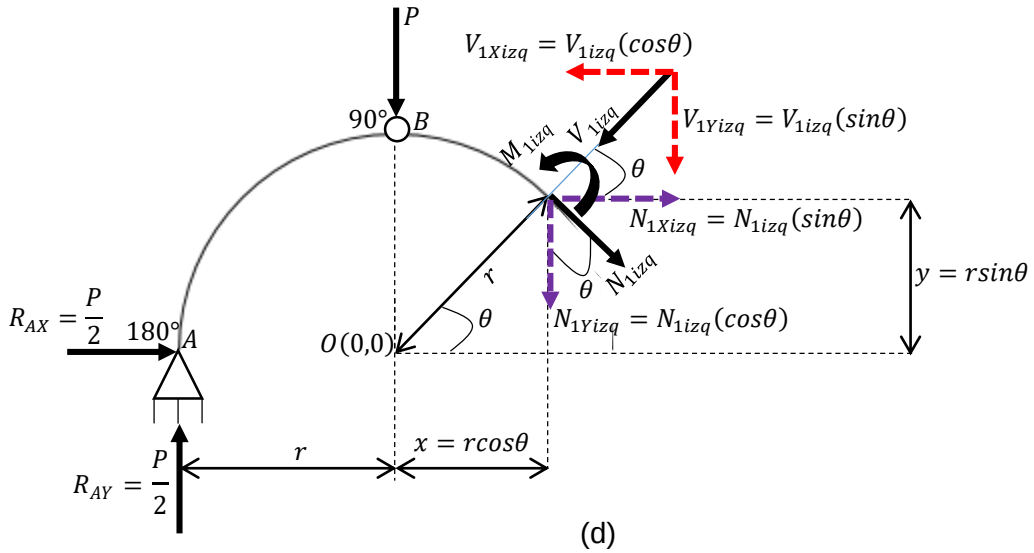


Con base en la figura anterior, del triángulo rectángulo inscrito en el cuarto de circunferencia derecho se deduce

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r\sin\theta \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r\cos\theta$$

Note como en el diagrama anterior aparacen las fuerzas normal y cortante internas, y el momento flector, tanto de la cara izquierda como de la cara derecha del elemento cortado.

.



(d)

En la figura 1-8d se representa el diagrama de cuerpo libre correspondiente a la porción izquierda.

Ahora veamos las implicaciones del equilibrio estático del cuerpo libre. Tomando momentos alrededor del punto del corte, se determina el momento interno M.

$$\circlearrowright + \sum Mcorte = 0 \Rightarrow -\frac{P}{2}(y) + \frac{P}{2}(r+x) - P(x) - M_{1izq} = 0$$

$$-\frac{P}{2}(rsin\theta) + \frac{P}{2}(r + rcos\theta) - P(rcos\theta) - M_{1izq} = 0 \Rightarrow M_{1izq} = \frac{P}{2}r(1 - sin\theta - cos\theta)$$

Las fuerzas normal N_{1izq} y cortante V_{1izq} internas se obtienen de resolver el sistema simultáneo de ecuaciones que se origina al establecer el equilibrio para fuerzas en las direcciones horizontal y vertical.

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow \frac{P}{2} - P - V_{1Yizq} - N_{1Yizq} = 0$$

$$\frac{P}{2} - P - V_{1izq}(sin\theta) - N_{1izq}(cos\theta) = 0 \Rightarrow V_{1izq}(sin\theta) + N_{1izq}(cos\theta) = -\frac{P}{2} - - - (1)$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow \frac{P}{2} - V_{1Xizq} + N_{1Xizq} = 0$$

$$\frac{P}{2} - V_{1izq}(cos\theta) + N_{1izq}(sin\theta) = 0 \Rightarrow -V_{1izq}(cos\theta) + N_{1izq}(sin\theta) = -\frac{P}{2} - - - (2)$$

Al despejar V_{1izq} de forma individual en las ecuaciones (1) y (2) se tiene

$$V_{1izq} = \frac{-\frac{P}{2} - N_{1izq}(cos\theta)}{sin\theta} - - - (3) \qquad V_{1izq} = \frac{\frac{P}{2} + N_{1izq}(sin\theta)}{cos\theta} - - - (4)$$

Al Igualar las ecuaciones (3) y (4) y simplificar resulta

$$\frac{-\frac{P}{2} - N_{1izq}(cos\theta)}{sin\theta} = \frac{\frac{P}{2} + N_{1izq}(sin\theta)}{cos\theta} \Rightarrow -\frac{\frac{P}{2}}{sin\theta} - \frac{N_{1izq}(cos\theta)}{sin\theta} = \frac{\frac{P}{2}}{cos\theta} + \frac{N_{1izq}(sin\theta)}{cos\theta}$$

$$N_{1izq}\left(\frac{cos\theta}{sin\theta} + \frac{sin\theta}{cos\theta}\right) = -\frac{P}{2}\left(\frac{1}{sin\theta} + \frac{1}{cos\theta}\right)$$

$$N_{1izq}\left(\frac{sin^2\theta + cos^2\theta}{sin\theta cos\theta}\right) = -\frac{P}{2}\left(\frac{cos\theta + sin\theta}{sin\theta cos\theta}\right) \Rightarrow N_{1izq}(1) = -\frac{P}{2}\left(\frac{cos\theta + sin\theta}{sin\theta cos\theta}\right)(sin\theta cos\theta)$$

$$N_{1izq} = \frac{P}{2}(-sin\theta - cos\theta)$$

Al reemplazar el valor obtenido de N_{1izq} en la ecuación (4) se obtiene

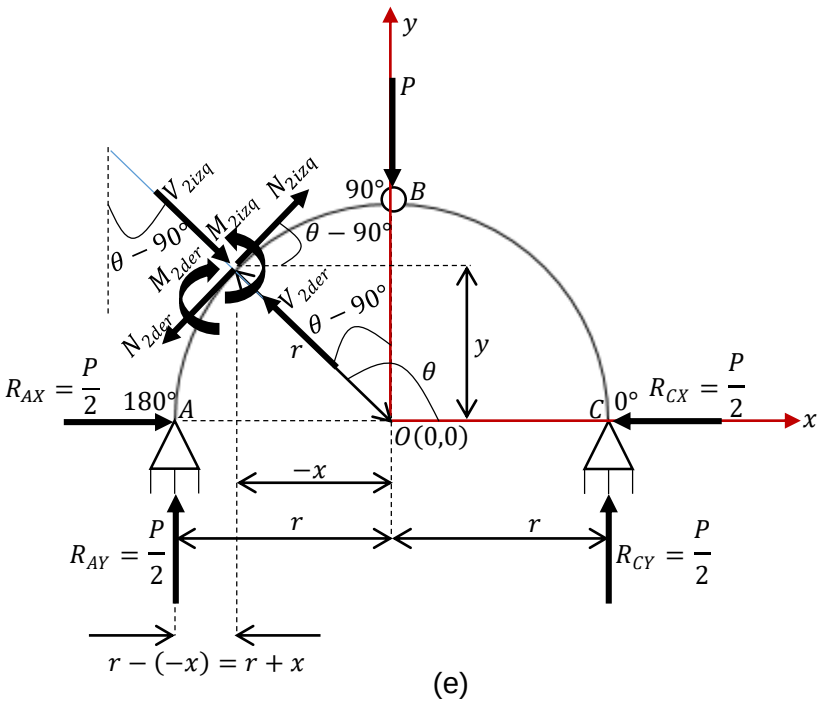
$$V_{1izq} = \frac{\frac{P}{2} + \frac{P}{2}(-sin\theta - cos\theta)(sin\theta)}{cos\theta} = \frac{P}{2}\left(\frac{1}{cos\theta} - \frac{sin^2\theta}{cos\theta} - \frac{cos\theta sin\theta}{cos\theta}\right)$$

$$= \frac{P}{2}\left(\frac{1}{cos\theta}\left(1 - sin^2\theta - cos\theta sin\theta\right)\right) = \frac{P}{2}\left(\frac{1}{cos\theta}(cos^2\theta - cos\theta sin\theta)\right) = \frac{P}{2}(cos\theta - sin\theta)$$

Si se quiere evitar la solución simultánea de ecuaciones, el equilibrio de fuerzas puede ser efectuado en las direcciones que coinciden con las líneas de acción de las fuerzas V_{1izq} y N_{1izq}. De ser así, reacciones R_{AX} y R_{AY} y la carga P tendrían que resolverse en sus componentes rectangulares para tales direcciones. Por otra parte, cabe mencionar que las acciones internas se pudieron haber calculado analizando la porción derecha del seccionamiento.

Parte $A - B$. Se secciona el arco en un punto arbitrario (intermedio en el segmento $A - B$) a una distancia horizontal $-x$ del origen O, figura 1-8e.

$$90° \leq \theta \leq 180°$$

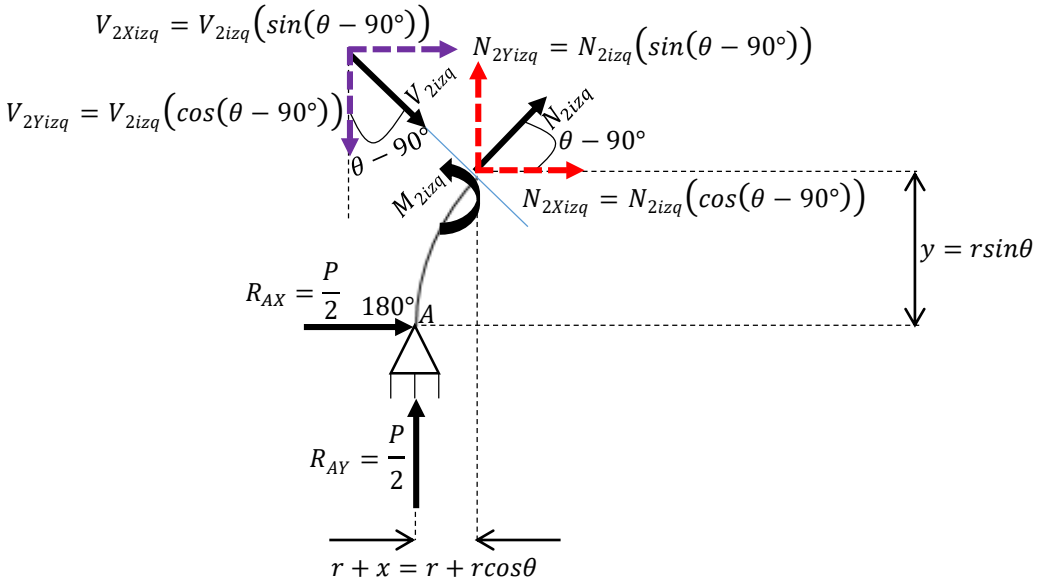


(e)

En la figura 1-8f se representa el diagrama de cuerpo libre correspondiente a la porción izquierda y se aplican las ecuaciones de equilibrio en él.

$$\circlearrowright + \sum Mcorte = 0 \Rightarrow \frac{P}{2}(r+x) - \frac{P}{2}(y) - M_{2izq} = 0$$

$$\frac{P}{2}(r + rcos\theta) - \frac{P}{2}(rsin\theta) - M_{2izq} = 0 \Rightarrow M_{2izq} = \frac{P}{2}r(cos\theta + 1 - sin\theta)$$



(f)

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow \frac{P}{2} + V_{2Xizq} + N_{2Xizq} = 0$$

$$\frac{P}{2} + V_{2izq}[\sin(\theta - 90°)] + N_{2izq}[\cos(\theta - 90°)] = 0$$

Si se tienen las siguientes identidades trigonométricas

$$\sin(a-b) = sinacosb - cosasinb$$

$$\cos(a-b) = cosacosb + sinasinb$$

Entonces,

$$\sin(\theta - 90°) = \sin\theta\, cos90° - cos\theta sin90°$$

$$\cos(\theta - 90°) = \cos\theta\, cos90° + sin\theta sin90°$$

Puesto que

$$sin90° = 1 \qquad cos90° = 0$$

Se llega a

$$\sin(\theta - 90°) = (\sin\theta)(0) - (cos\theta)(1) = -cos\theta$$

$$\cos(\theta - 90°) = (\cos\theta)(0) + (sin\theta)(1) = sin\theta$$

En consecuencia,

$$\frac{P}{2} - V_{2izq}(cos\theta) + N_{2izq}(sin\theta) = 0 - - - (1')$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow \frac{P}{2} - V_{2Yizq} + N_{2Yizq} = 0$$

$$\frac{P}{2} - V_{2izq}[\cos(\theta - 90°)] + N_{2izq}[\sin(\theta - 90°)] = 0$$

$$\frac{P}{2} - V_{2izq}(sin\theta) - N_{2izq}(cos\theta) = 0 - - - (2')$$

Se resuelve el sistema simultáneo de ecuaciones $(1')$ y $(2')$. El despeje de V_{2izq} en las ecuaciones mencionadas conlleva a

$$V_{2izq} = \frac{-\frac{P}{2} - N_{2izq}(sin\theta)}{-cos\theta} - - - (3') \qquad V_{2izq} = \frac{\frac{P}{2} - N_{2izq}(cos\theta)}{sin\theta} - - - (4')$$

Al Igualar las ecuaciones $(3')$ y $(4')$ y simplificar resulta

$$\frac{-\frac{P}{2} - N_{2izq}(sin\theta)}{-cos\theta} = \frac{\frac{P}{2} - N_{2izq}(cos\theta)}{sin\theta} \Rightarrow \frac{\frac{P}{2}}{cos\theta} + \frac{N_{2izq}(sin\theta)}{cos\theta} = \frac{\frac{P}{2}}{sin\theta} - \frac{N_{2izq}(cos\theta)}{sin\theta}$$

$$N_{2izq}\left(\frac{cos\theta}{sin\theta} + \frac{sin\theta}{cos\theta}\right) = \frac{P}{2}\left(\frac{1}{sin\theta} - \frac{1}{cos\theta}\right)$$

$$N_{2izq}\left(\frac{sin^2\theta + cos^2\theta}{sin\theta cos\theta}\right) = \frac{P}{2}\left(\frac{cos\theta - sin\theta}{sin\theta cos\theta}\right) \Rightarrow N_{2izq}(1) = -\frac{P}{2}\left(\frac{cos\theta - sin\theta}{sin\theta cos\theta}\right)(sin\theta cos\theta)$$

$$N_{2izq} = \frac{P}{2}(-sin\theta + cos\theta)$$

Al reemplazar el valor obtenido de N_{2izq} en la ecuación $(4')$ se obtiene

$$V_{2izq} = \frac{\frac{P}{2} - \frac{P}{2}(-sin\theta + cos\theta)(cos\theta)}{sin\theta} = \frac{P}{2}\left(\frac{1}{sin\theta} - \frac{cos^2\theta}{sin\theta} + \frac{cos\theta sin\theta}{sin\theta}\right)$$

$$= \frac{P}{2}\left(\frac{1}{sin\theta}(1 - cos^2\theta + cos\theta sin\theta)\right) = \frac{P}{2}\left(\frac{1}{sin\theta}\left(sin^2\theta + cos\theta sin\theta\right)\right) = \frac{P}{2}(cos\theta + sin\theta)$$

A continuación, en la tabla 1-4 se muestran los resultados que se obtienen al evaluar en ciertos ángulos las funciones de las acciones internas. Luego, el lector puede graficar los resultados obtenidos y así obtener fácilmente los diagramas de fuerza cortante, fuerza normal y momento flector del arco.

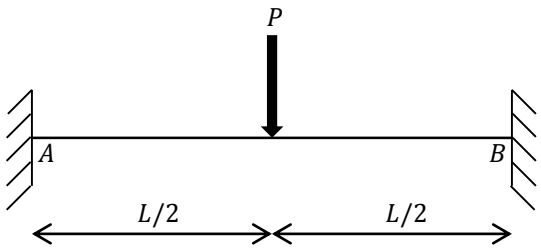
θ	M	V	N
$grados$	$ton.m$	ton	ton
0	0	$0.5P$	$-0.5P$
30	$-0.18Pr$	$0.18P$	$-0.69P$
45	$-0.20Pr$	0	$-0.70P$
60	$-0.18Pr$	$-0.18P$	$-0.69P$
90	0	$\mp 0.5P$	$-0.5P$
120	$-0.18Pr$	$0.18P$	$-0.69P$
135	$-0.20Pr$	0	$-0.70P$
150	$-0.18Pr$	$-0.18P$	$-0.69P$
180	0	$-0.5P$	$-0.5P$

Tabla 1-4

CAPÍTULO 2
ANÁLISIS ESTRUCTURAL

Ejercicio 2.1 Método de flexibilidades aplicado a una viga.

Instrucciones Calcule las reacciones en los soportes de la viga doblemente empotrada que se observa en la figura 2-1a empleando el método de flexibilidades.



ER: Estructura real

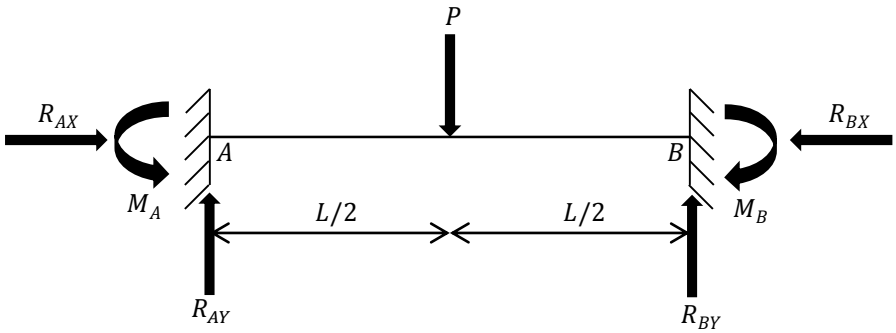
(a)

Figura 2-1

SOLUCIÓN

Verificación del grado de indeterminación

En primer lugar debe determinarse el grado de indeterminación de la estructura real (ER), figura 2-1a, para saber cuántas restricciones hiperestáticas eliminar; ese mismo número nos indicará la cantidad de ecuaciones simultáneas a plantear más adelante para la resolución del problema.



(b)

Con base en el diagrama de cargas, figura 2-1b, hay $r = 6$ incógnitas de reacción, las cuales son R_{AX}, R_{AY}, M_A, R_{BX} ,R_{BY} y M_B (cabe mencionar que cuando se identifican las reacciones en los soportes, el sentido de cada una de ellas debe ser supuesto arbitrariamente al desconocerse la magnitud correspondiente), así mismo, no se tiene alguna condición impuesta por la construcción (articulación o rótula, conector cortante, etc.), es decir, $c = 0$. Por otra parte, existen $n = 3$ ecuaciones de equilibrio en el plano, que son $\sum M = 0$, $\sum FX = 0$, $\sum FY = 0$.

A partir de la ecuación $+\rightarrow \sum FX = 0$, dado que la viga no está sometida a cargas horizontales, se obtiene directamente que R_{AX} y R_{BX} son nulas. Por consiguiente, ahora únicamente se tienen $r = 4$ fuerzas reactivas y $n = 2$ ecuaciones de la Estática. En consecuencia, la viga es estáticamente indeterminada o hiperestática de segundo grado ya que $r > (n + c)$, puesto que $4 > (2 + 0)$ con una diferencia de $4 - 2 = 2$.

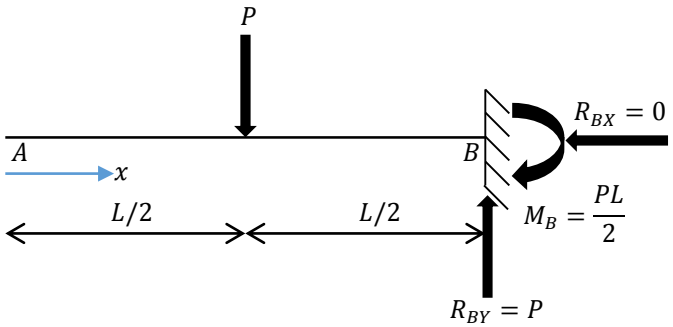
Elección de las reacciones redundantes o fuerzas correctivas

Como la viga es estáticamente indeterminada en grado dos, hay dos redundantes, lo cual significa que existe tal cantidad de fuerzas en exceso de las fuerzas primarias o son sobrantes o superabundantes de las necesarias para mantener el equilibrio estático. Las redundantes deben seleccionarse de tal modo que al suprimirlas de la viga, esta sea isostática y estable. Por lo tanto, para el tipo de vigas doblemente empotradas se cuenta con dos alternativas: 1) eliminar los momentos reactivos o 2) retirar un momento y una reacción vertical con un punto de aplicación coincidente.

Basándose en la opción 2, se opta porque R_{AY} y M_A sean las redundantes, pero tome en cuenta que de la misma opción, las fuerzas correctivas pueden ser R_{BY} y M_B, o bien, de la opción 1, se pudo haber considerado como fuerzas sobrantes a M_A y M_B. Cuando ya se tiene un buen dominio del método de secciones, es más fácil visualizar la alternativa mayormente conveniente para hacer menos tedioso el análisis.

Planteamiento de la estructura primaria

Con lo anterior, es posible idealizar una nueva estructura denominada estructura primaria o isostática fundamental (EP); como se dejó entrever previamente, se trata de convertir la viga hiperestática en una isostática y estable desapareciendo precisamente las redundantes seleccionadas. Siendo así, la capacidad de la viga para resistir R_{AY} y M_A se elimina si se quita el empotramiento en A. Esta estructura liberada forzosamente debe soportar las carga reales, figura 2-1c.



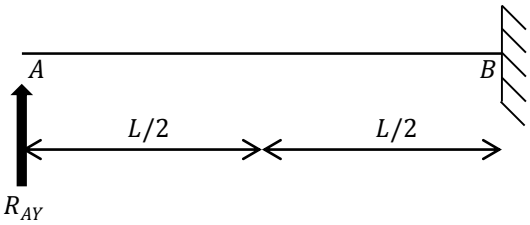
EP: Estructura primaria $\Longrightarrow M$

(c)

Principio de superposición

Aquí se esquematiza claramente que la estructura estáticamente indeterminada puede ser igual a la suma de una serie de estructuras estáticamente determinadas compuesta por la estructura primaria y otro número de estructuras igual a la cantidad de redundantes (ERd_i). Por lo tanto, la estructura real es igual a la adición de la estructura liberada sometida a: A) las cargas reales, figura 1-c, y B) la acción individual de cada una de las reacciones redundantes (con un sentido propuesto de forma indistinta), figuras 2-1d y 2-1e. Para este ejercicio

$$ER = EP + ERd_1 + ERd_2$$



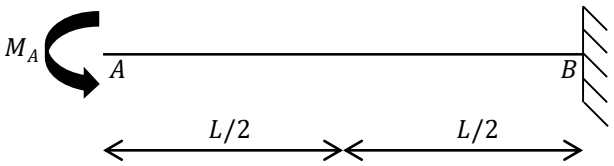
ERd_1: Estructura liberada con fuerza redundante R_{AY} aplicada

(d)

Contrariamente a la viga de la figura 2-1a, las vigas representadas en las figuras 2-1c, 2-1d y 2-1e experimentan de forma respectiva un desplazamiento vertical o deflexión en A (δ_{VA}) y una pendiente o rotación en A (θ_A) dado que no hay soporte alguno en ese nodo que los impida.

Suponga que tales deflexiones y pendientes son iguales a una cierta cantidad. Entonces, para la viga EP se tiene que $\delta_{VA_{EP}} = d_1$ y $\theta_{A_{EP}} = d_2$. A su vez, para la viga ERd_1 tenemos que $\delta_{VA_{ERd_1}} = R_{AY}(f_{11})$ y $\theta_{A_{ERd_1}} = R_{AY}(f_{21})$. De forma análoga, en la

viga ERd_2, $\delta_{VA_{ERd_2}} = M_A(f_{12})$ y $\theta_{A_{ERd_2}} = M_A(f_{22})$. Posteriormente se ofrecerá una explicación de la razón por la cual se empleó la nomenclatura citada.



ERd_2: Estructura liberada con momento redundante M_A aplicado

(e)

Planteamiento de las ecuaciones de compatibilidad geométrica

Para obtener ecuaciones adicionales que coadyuven a la solución del problema hacemos uso del principio de superposición formulado en el apartado precedente y tomamos en cuenta la compatibilidad del desplazamiento vertical y la pendiente en el empotramiento A; por lo tanto, las ecuaciones de compatibilidad para la deflexión en A y la rotación en A son, respectivamente

$$\delta_{VA_{ER}} = \delta_{VA_{EP}} + \delta_{VA_{ERd_1}} + \delta_{VA_{ERd_2}} - - - (1)$$

$$\theta_{A_{ER}} = \theta_{A_{EP}} + \theta_{A_{ERd_1}} + \theta_{A_{ERd_2}} - - - (2)$$

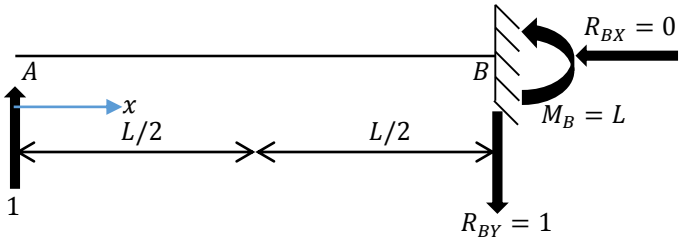
Si en la viga ER tanto el desplazamiento vertical como la rotación en A no existen debido a que la reacción vertical y el momento reactivo del soporte en A los impiden, entonces $\delta_{VA_{ER}} = \theta_{A_{ER}} = 0$. Efectuando las sustituciones correspondientes en las ecuaciones (1) y (2), el sistema de ecuaciones de compatibilidad geométrica pasa a ser el siguiente:

$$0 = d_1 + f_{11}R_{AY} + f_{12}M_A - - - (3)$$

$$0 = d_2 + f_{21}R_{AY} + f_{22}M_A - - - (4)$$

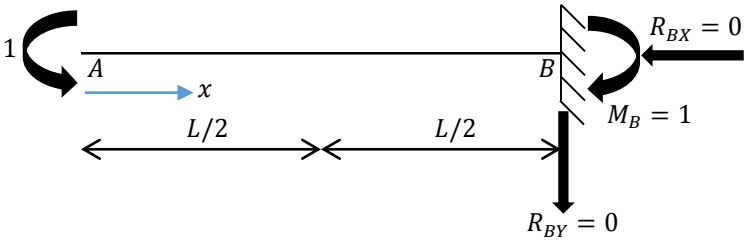
Cada desplazamiento del punto de aplicación de la acción redundante R_i o M_i en la dirección de esta, producido al actuar la carga original sobre la estructura liberada es expresado por d_i. Estos en conjunto se denominan incompatibilidades geométricas porque en la estructura real no ocurren.

Los coeficientes de flexibilidad f_{ij} anteriores conforman la matriz de flexibilidad de la estructura y pueden calcularse sencillamente si en la estructura liberada aplicamos una carga unitaria correspondiente a cada fuerza redundante (ECu_i), figuras 2-1f y 2-1g.



ECu_1: Estructura liberada con fuerza vertical unitaria aplicada en $A \Longrightarrow m_1$

(f)



ECu_2: Estructura liberada con momento unitario aplicado en $A \Longrightarrow m_2$

(g)

Entonces, directamente de la viga ECu_1 tenemos que la deflexión y la rotación en A son equivalentes de forma respectiva a un determinado valor de $\delta_{VA_{ECu_1}} = f_{11}$ y $\theta_{A_{ECu_1}} = f_{21}$. Así mismo, para la viga ECu_2, $\delta_{VA_{ECu_2}} = f_{12}$ y $\theta_{A_{ECu_2}} = f_{22}$.

Cálculo de las incompatibilidades geométricas y de los coeficientes de flexibilidad

En resumen, para poder resolver el sistema simultáneo de ecuaciones (3) y (4), el cual nos permite calcular las redundantes, en las vigas visualizadas en las figuras 2-1c, 2-1f y 2-1g es necesario conocer cuánto valen el desplazamiento vertical en A dado que R_{AY} (fuerza reactiva vertical en el empotramiento del punto A) fue suprimida y la pendiente en A debido a que M_A (momento reactivo en el empotramiento del punto A) fue eliminado.

Los desplazamientos requeridos pueden obtenerse con cualquiera de los métodos apropiados del análisis estructural; en la presente obra se empleará el **método del**

principio del trabajo virtual (es lo más recomendable) y se considerarán únicamente las deformaciones debidas a la flexión. En términos generales, este principio indica que debe incorporarse una carga ficticia unitaria sobre la viga descargada en el punto y en la dirección donde se requiere conocer el desplazamiento. Si debe determinarse la pendiente, se coloca un momento de par virtual unitario en el punto.

Para asociar a los momentos internos (se obtendrán a partir del **método de secciones**) con las estructuras, le hemos denominado M a la viga primaria, m_1 a la viga liberada con fuerza vertical unitaria aplicada en A y m_2 a la viga liberada con momento unitario aplicado en A. Es importante recordar que las coordenadas x a emplear y las direcciones positivas de los momentos internos entre las tres estructuras recién mencionadas deben ser iguales. En las figuras 2-1c, 2-1f y 2-1g se puede observar que usaremos únicamente la coordenada x para determinar la energía de deformación, cuyo origen se asocia en A, es positiva hacia la derecha y es válida para $0 \leq x \leq L$, pero el lector puede usar otra(s) coordenada(as) distinta(s) que sea(n) correctas(s) para cubrir la longitud de la viga. Con base en el principio del trabajo virtual, se tiene

$$d_1 = \delta_{VA_{EP}} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mm_1}{EI}\,dx - - - (I) \qquad d_2 = \theta_{A_{EP}} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mm_2}{EI}\,dx - - - (II)$$

$$f_{11} = \delta_{VA_{ECu_1}} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{m_1 m_1}{EI}\,dx - - - (III) \qquad f_{21} = \theta_{A_{ECu_1}} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{m_1 m_2}{EI}\,dx - - - (IV)$$

$$f_{12} = \delta_{VA_{ECu_2}} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{m_2 m_1}{EI}\,dx - - - (V) \qquad f_{22} = \theta_{A_{ECu_2}} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{m_2 m_2}{EI}\,dx - - - (VI)$$

Note que para determinar d_1 se requiere de la combinación apropiada de los momentos internos M y m_1; algo análogo ocurre con las expresiones restantes. En todas las vigas de este libro, EI es constante.

A continuación se calculan las reacciones y los momentos internos en las vigas isostáticas de las figuras 2-1c, 2-1f y 2-1g.

Considere que la función del momento flector será discontinua en los puntos donde el tipo o la magnitud de la carga distribuida cambia, o bien donde se apliquen fuerzas concentradas. La carga distribuida, así como la fuerza concentrada, o una de sus componentes, actúan perpendicularmente al eje longitudinal de la viga. Además de lo anterior, habrá discontinuidad en cada punto donde se aplique algún momento de par.

Viga EP, figura 2-1c.

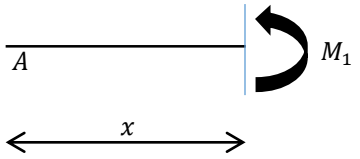
Al aplicar las ecuaciones de equilibrio en una secuencia y emplear los resultados calculados previamente, se obtiene

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow \therefore R_{BX} = 0$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow -P + R_{BY} = 0 \Rightarrow \therefore R_{BY} = P\uparrow$$

$$\circlearrowleft+\sum MB = 0 \Rightarrow -P\left(\frac{L}{2}\right) + M_B = 0 \Rightarrow \therefore M_B = \frac{PL}{2}\circlearrowright$$

Se formulan los momentos internos M. Las funciones de momento serán discontinuas en el punto de aplicación de la carga P, así que se requiere de efectuar dos cortes perpendiculares al eje longitudinal de la viga para definir M a lo largo de la estructura, figuras 2-1h y 2-1i.

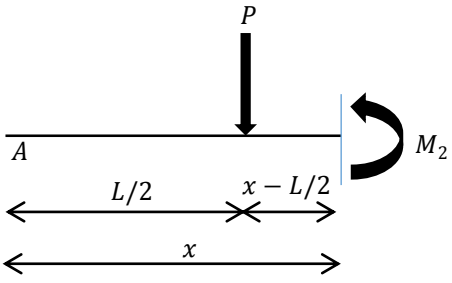


(h)

$$0 \leq x \leq {}^{L}/_{2}$$

$$\circlearrowleft+\sum Mcorte = 0$$

$$M_1 = 0$$



(i)

$$^{L}/_{2} \leq x \leq L$$

$$\circlearrowleft+\sum Mcorte = 0$$

$$-M_2 - P\left(x - \frac{L}{2}\right) = 0 \Rightarrow M_2 = -Px + \frac{PL}{2}$$

Viga ECu_1, figura 2-1f.

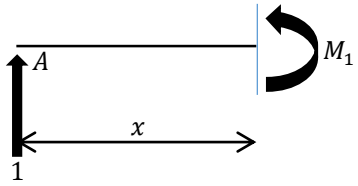
Las fuerzas reactivas en el apoyo empotrado B son resultado de

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow \therefore R_{BX} = 0$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow 1 - R_{BY} = 0 \Rightarrow \therefore R_{BY} = 1$$

$$+\circlearrowleft \sum MB = 0 \Rightarrow 1(L) - M_B = 0 \Rightarrow \therefore M_B = L$$

Se deduce el momento interno m_1. Como no hay discontinuidad de carga, la viga se secciona ortogonalmente a su eje en una sola ocasión, figura 2-1j.



(j)

$$0 \leq x \leq L$$

$$+\circlearrowleft \sum Mcorte = 0$$

$$-M_1 + (1)(x) = 0 \Rightarrow M_1 = x$$

Viga ECu_2, figura 2-1g.

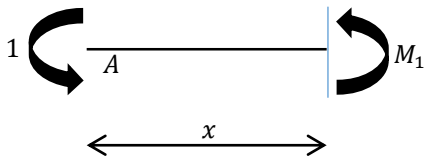
Las reacciones en el empotramiento B equivalen a

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow \therefore R_{BX} = 0$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow \therefore R_{BY} = 0$$

$$+\circlearrowleft \sum MB = 0 \Rightarrow -1 + M_B = 0 \Rightarrow \therefore M_B = 1$$

Se infiere el momento interno m_2 a partir de la figura 2-1k.



(k)

$$0 \leq x \leq L$$

$$+\circlearrowleft \sum Mcorte = 0$$

$$-M_1 - 1 = 0 \Rightarrow M_1 = -1$$

Obsérvese que la coordenada x seleccionada conlleva a que no haya necesidad de determinar las reacciones con el fin de encontrar los momentos internos.

Enseguida se presenta el cálculo de las incompatibilidades geométricas, empleando las ecuaciones (I) y (II).

$$d_1 = \frac{1}{EI}\left[\int_0^{L/2}(0)(x)dx + \int_{L/2}^{L}\left(-Px + \frac{PL}{2}\right)(x)dx\right] = \frac{1}{EI}\int_{L/2}^{L}\left(-Px^2 + \frac{PL}{2}x\right)dx$$

$$= \frac{1}{EI}\left[-\frac{P}{3}x^3 + \frac{PL}{4}x^2\right]_{L/2}^{L} = \frac{1}{EI}\left[-\frac{P}{3}\left(L^3 - \left(\frac{L}{2}\right)^3\right) + \frac{PL}{4}\left(L^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2\right)\right]$$

$$= \frac{1}{EI}\left(-\frac{7PL^3}{24} + \frac{3PL^3}{16}\right) = -\frac{5PL^3}{48EI}$$

$$d_2 = \frac{1}{EI}\left[\int_0^{L/2}(0)(-1)dx + \int_{L/2}^{L}\left(-Px + \frac{PL}{2}\right)(-1)dx\right]$$

$$= \frac{1}{EI}\int_{L/2}^{L}\left(Px - \frac{PL}{2}\right)dx = \frac{1}{EI}\left[\frac{P}{2}x^2 - \frac{PL}{2}x\right]_{L/2}^{L} = \frac{1}{EI}\left[\frac{P}{2}\left(L^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2\right) - \frac{PL}{2}\left(L - \frac{L}{2}\right)\right]$$

$$\frac{1}{EI}\left(\frac{3PL^2}{8} - \frac{PL^2}{4}\right) = \frac{PL^2}{8EI}$$

Ahora se muestra el cálculo de los coeficientes de flexibilidad, aplicando las ecuaciones (III) hasta (VI).

$$f_{11} = \frac{1}{EI}\int_0^L (x)(x)dx = \frac{1}{EI}\int_0^L x^2 dx = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^L = \frac{1}{3EI}(L^3 - 0^3) = \frac{L^3}{3EI}$$

$$f_{21} = \frac{1}{EI}\int_0^L (x)(-1)dx = -\frac{1}{EI}\int_0^L xdx = -\frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^L = -\frac{1}{2EI}(L^2 - 0^2) = -\frac{L^2}{2EI}$$

$$f_{12} = \frac{1}{EI}\int_0^L (-1)(x)dx = -\frac{1}{EI}\int_0^L xdx = -\frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^L = -\frac{1}{2EI}(L^2 - 0^2) = -\frac{L^2}{2EI}$$

Obsérvese que como una consecuencia del teorema de Maxwell de los desplazamientos recíprocos, se cumple que $f_{12} = f_{21}$. De forma más generalizada, se tiene que $f_{ij} = f_{ji}$, lo cual hace que mientras más grande sea el grado de hiperestaticidad, más se evita el cálculo de varios coeficientes de flexibilidad.

$$f_{22} = \frac{1}{EI}\int_0^L (-1)(-1)dx = \frac{1}{EI}\int_0^L dx = \frac{1}{EI}[x]_0^L = \frac{1}{EI}(L-0) = \frac{L}{EI}$$

Cálculo de las redundantes

Al sustituir los coeficientes en el sistema simultáneo de ecuaciones (3) y (4) se tiene

$$-\frac{5PL^3}{48EI} + \frac{L^3}{3EI}R_{AY} - \frac{L^2}{2EI}M_A = 0 - - - (5)$$

$$\frac{PL^2}{8EI} - \frac{L^2}{2EI}R_{AY} + \frac{L}{EI}M_A = 0 - - - (6)$$

Despejando M_A de las expresiones (4) y (5) respectivamente, resulta

$$M_A = \frac{\frac{5PL^3}{48EI} - \frac{L^3}{3EI}R_{AY}}{-\frac{L^2}{2EI}} - - - (7)$$

$$M_A = \frac{-\frac{PL^2}{8EI} + \frac{L^2}{2EI}R_{AY}}{\frac{L}{EI}} - - - (8)$$

Igualando la ecuación (7) con la ecuación (8) y simplificando da

$$\frac{\frac{5PL^3}{48EI} - \frac{L^3}{3EI}R_{AY}}{-\frac{L^2}{2EI}} = \frac{-\frac{PL^2}{8EI} + \frac{L^2}{2EI}R_{AY}}{\frac{L}{EI}} \Rightarrow \left(\frac{L}{EI}\right)\left(\frac{5PL^3}{48EI} - \frac{L^3}{3EI}R_{AY}\right) = \left(-\frac{L^2}{2EI}\right)\left(-\frac{PL^2}{8EI} + \frac{L^2}{2EI}R_{AY}\right)$$

$$-\frac{L^4}{3(EI)^2}R_{AY} + \frac{L^4}{4(EI)^2}R_{AY} = \frac{PL^4}{16(EI)^2} - \frac{5PL^4}{48(EI)^2} \Rightarrow -\frac{1}{12}R_{AY} = -\frac{1}{24}P \Rightarrow R_{AY} = \frac{\frac{1}{24}P}{\frac{1}{12}}$$

$$\Rightarrow \therefore R_{AY} = \frac{P}{2}\uparrow$$

Si se reemplaza el resultado previamente obtenido en (7), entonces

$$M_A = \frac{\frac{5PL^3}{48EI} - \frac{L^3}{3EI}\left(\frac{P}{2}\right)}{-\frac{L^2}{2EI}} = \frac{-\frac{PL^3}{16EI}}{-\frac{L^2}{2EI}} \Rightarrow \therefore M_A = \frac{PL}{8}\circlearrowleft$$

La magnitud positiva obtenida tanto para R_{AY} como M_A indicó que tales redundantes tienen el mismo sentido que el propuesto para su correspondiente carga unitaria.

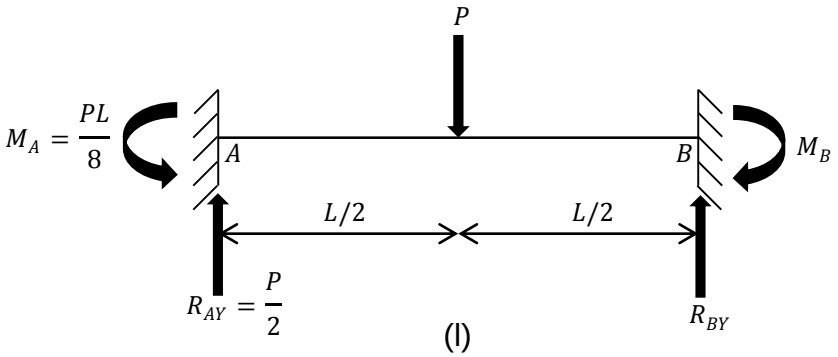
En caso de haber resultado negativas, simplemente el sentido es opuesto al observado en la figuras 2-1d y 2-1e.

Ecuaciones de equilibrio

Como las reacciones redundantes ya han sido calculadas, los valores de las reacciones desconocidas faltantes pueden deducirse aplicando las ecuaciones de equilibrio al diagrama de cargas de la figura 2-1l.

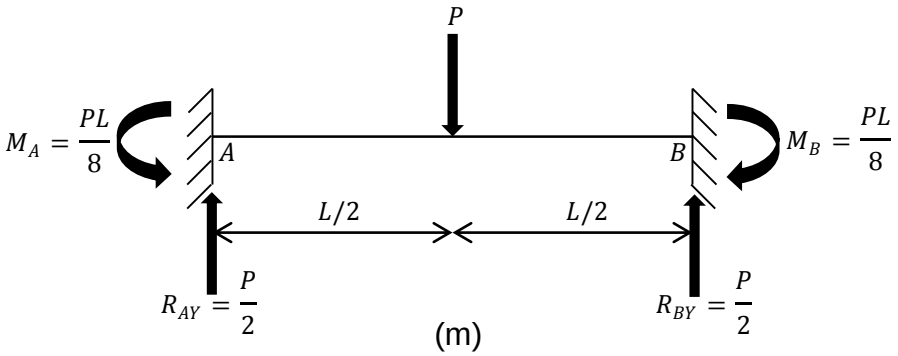
$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow \frac{P}{2} - P + R_{BY} = 0 \Rightarrow \therefore R_{BY} = \frac{P}{2}\uparrow$$

$$\circlearrowleft + \sum MA = 0 \Rightarrow -\frac{PL}{8} + P\left(\frac{L}{2}\right) - \frac{P}{2}(L) + M_B = 0 \Rightarrow \therefore M_B = \frac{PL}{8}\circlearrowleft$$



(l)

Finalmente, en la figura 2-1m se muestran las reacciones en los empotramientos A y B de la viga real.



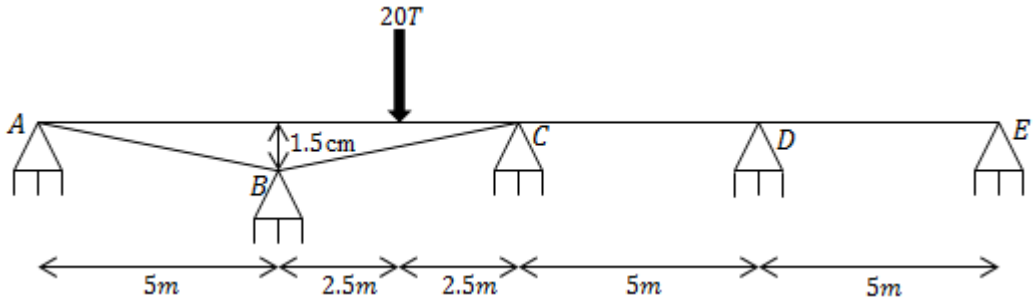
(m)

Ejercicio 2.2 Método de flexibilidades aplicado a una viga con un asentamiento en un soporte.

Instrucciones Calcular las reacciones en los soportes de la viga continua que se muestra en la ilustración 2-2a cuyo apoyo B sufre un asentamiento de $1.5cm$.

Datos:

$$E = \frac{2 \cdot 10^7\ T}{m^2}, I = 0.00171m^4 \qquad \therefore EI = 3.42 \cdot 10^4\ T \cdot m^2$$



ER: Estructura real

(a)

Figura 2-2

SOLUCIÓN

Verificación del grado de indeterminación y elección de las reacciones correctivas

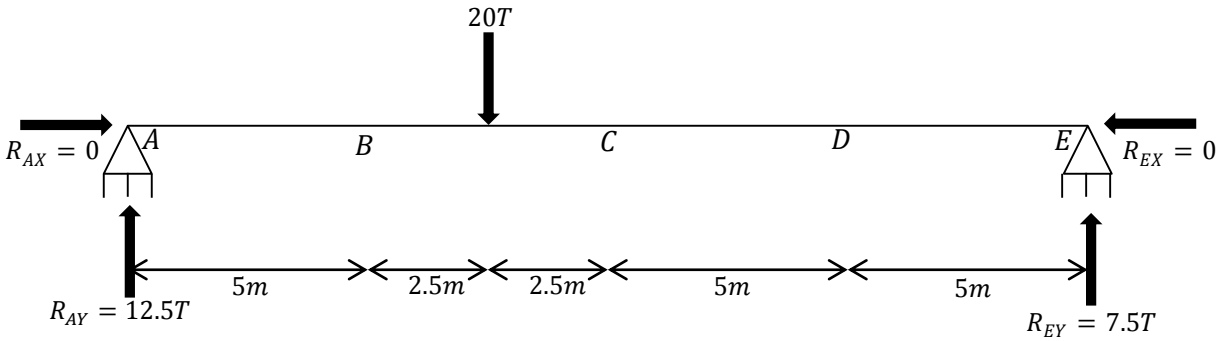
Por inspección, al no soportar cargas en la dirección X, las reacciones horizontales en los apoyos de la viga son nulas; es decir, $R_{AX} = R_{BX} = R_{CX} = R_{DX} = R_{EX} = 0$.

Entonces, la estructura es estáticamente indeterminada de tercer grado. Se elegirán $R_{BY}, R_{CY}\ y\ R_{DY}$ como redundantes. En consecuencia, los soportes articulados en B, C y D deben ser suprimidos en la estructura primaria.

Principio de superposición

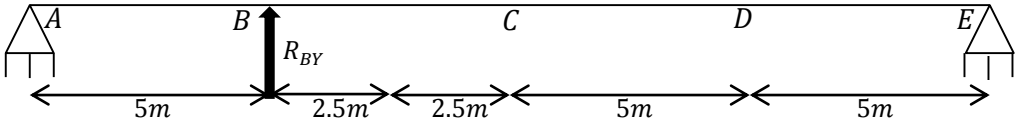
Al aplicar el principio de superposición, se tiene que la estructura real es igual a la suma de las estructuras mostradas en las figuras 2-2b, 2-2c, 2-2d y 2-2e, es decir

$$ER = EP + ERd_1 + ERd_2 + ERd_3$$



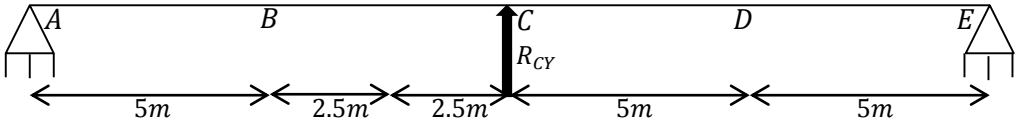
EP: Estructura primaria $\Longrightarrow M$

(b)



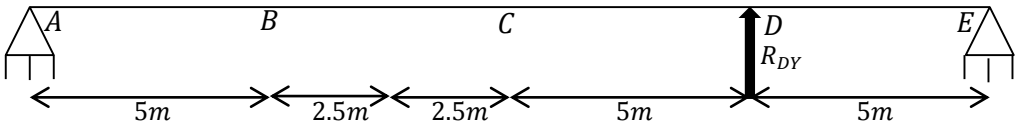
ERd_1: Estructura liberada con fuerza redundante R_{BY} aplicada

(c)



ERd_2: Estructura liberada con fuerza redundante R_{CY} aplicada

(d)



ERd_3: Estructura liberada con fuerza redundante R_{DY} aplicada

(e)

Planteamiento de las ecuaciones de compatibilidad geométrica

Tomando en cuenta la compatibilidad del desplazamiento vertical en los soportes B, C y D, puede plantearse el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\delta_{VB_{EP}} + \delta_{VB_{ERd_1}} + \delta_{VB_{ERd_2}} + \delta_{VB_{ERd_3}} = \delta_{VB_{ER}} - - - (1)$$

$$\delta_{VC_{EP}} + \delta_{VC_{ERd_1}} + \delta_{VC_{ERd_2}} + \delta_{VC_{ERd_3}} = \delta_{VC_{ER}} - - - (2)$$

$$\delta_{VD_{EP}} + \delta_{VD_{ERd_1}} + \delta_{VD_{ERd_2}} + \delta_{VD_{ERd_3}} = \delta_{VD_{ER}} - - - (3)$$

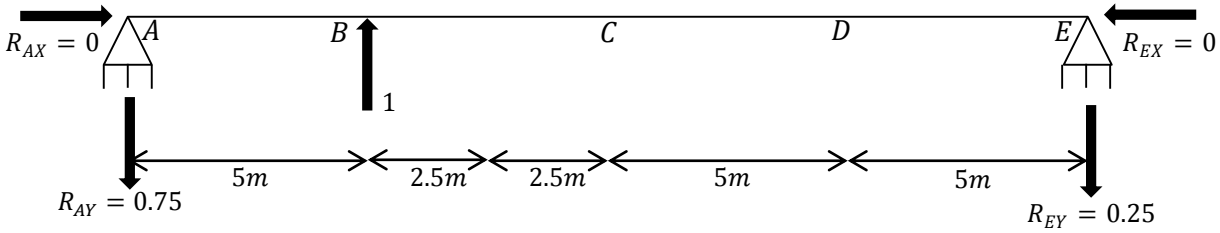
Obsérvese que en la viga real los puntos C y D no experimentan desplazamiento vertical debido a que las reacciones verticales de sus respectivos apoyos lo impiden, por lo que $\delta_{VC_{ER}}$ y $\delta_{VD_{ER}}$ son nulos. Aunque en el punto B también hay un pasador, existe la condición de que éste sufre un asentamiento de $0.015m$ y como las cargas unitarias se propondrán hacia arriba un desplazamiento en ese sentido se considera positivo, $\therefore \delta_{VB_{ER}} = -0.015$. Si hacemos las sustituciones correspondientes y expresamos el sistema de ecuaciones de compatibilidad geométrica en función de las incógnitas obtenemos

$$d_1 + f_{11}R_{BY} + f_{12}R_{CY} + f_{13}R_{DY} = -0.015 - - - (4)$$

$$d_2 + f_{21}R_{BY} + f_{22}R_{CY} + f_{23}R_{DY} = 0 - - - (5)$$

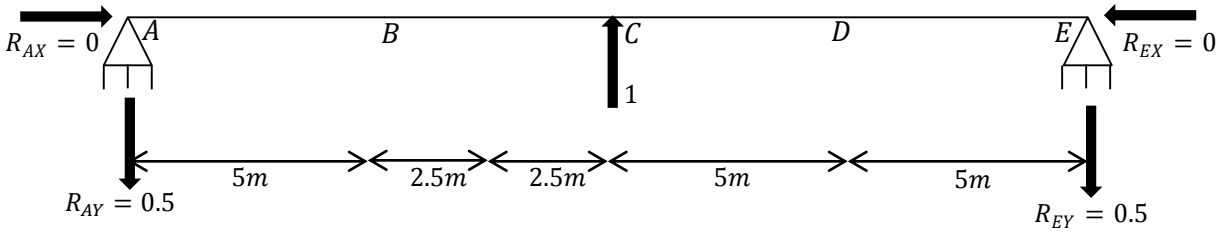
$$d_3 + f_{31}R_{BY} + f_{32}R_{CY} + f_{33}R_{DY} = 0 - - - (6)$$

Las estructuras visualizadas en las figuras 2-2f, 2-2g y 2-2h auxilian a obtener el valor de los coeficientes de flexibilidad fácilmente ya que sólo soportan una unidad de carga vertical en B, C y D, respectivamente.



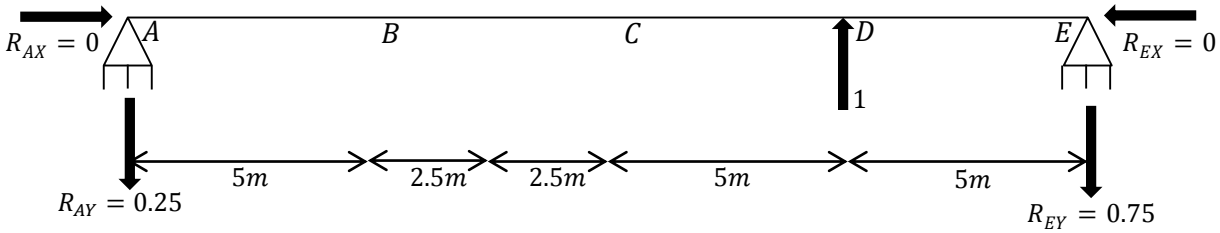
ECu_1: Estructura liberada con fuerza vertical unitaria aplicada en $B \Longrightarrow m_1$

(f)



ECu_2: Estructura liberada con fuerza vertical unitaria aplicada en $C \Longrightarrow m_2$

(g)



ECu_3: Estructura liberada con fuerza vertical unitaria aplicada en $D \Longrightarrow m_3$

(h)

Cálculo de las incompatibilidades geométricas y de los coeficientes de flexibilidad

En resumen, en las vigas mostradas en las figuras 2-2b, 2-2f, 2-2g y 2-2h es necesario determinar los valores del desplazamiento vertical en B dado que R_{BY} (fuerza reactiva vertical en el pasador del punto B) fue suprimida, del desplazamiento vertical en C dado que R_{CY} (fuerza reactiva vertical en el pasador del punto C) fue eliminada y del desplazamiento vertical en D dado que R_{DY} (fuerza reactiva vertical en el pasador del punto D) se ha quitado.

El orden en el que se calcularán los desplazamientos citados aplicando el método del trabajo virtual, considerando sólo las deformaciones debidas a flexión, se proporciona enseguida.

$$d_1 = \delta_{VB_{EP}} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mm_1}{EI}\,dx\,;\, d_2 = \delta_{VC_{EP}} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mm_2}{EI}\,dx\,;\, d_3 = \delta_{VD_{EP}} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mm_3}{EI}\,dx$$

$$f_{11} = \delta_{VB_{ECu_1}} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{m_1 m_1}{EI}\,dx\,;\, f_{21} = \delta_{VC_{ECu_2}} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{m_1 m_2}{EI}\,dx\,;\, f_{31} = \delta_{VD_{ECu_3}} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{m_1 m_3}{EI}\,dx$$

$$f_{12} = \delta_{VB\,ECu_1} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{m_2 m_1}{EI} dx \,;\, f_{22} = \delta_{VC\,ECu_2} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{m_2 m_2}{EI} dx \,;\, f_{32} = \delta_{VD\,ECu_3} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{m_2 m_3}{EI} dx$$

$$f_{13} = \delta_{VB\,ECu_1} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{m_3 m_1}{EI} dx \,;\, f_{23} = \delta_{VC\,ECu_2} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{m_3 m_2}{EI} dx \,;\, f_{33} = \delta_{VD\,ECu_3} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{m_3 m_3}{EI} dx$$

Se analiza la viga EP, figura 2-1b.

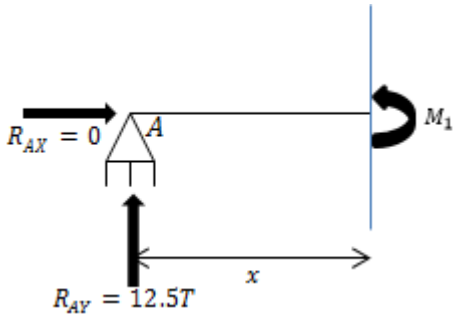
Al aplicar las ecuaciones de equilibrio se obtiene

$$+\circlearrowright \sum MA = 0 \Rightarrow 20(7.5) - R_{EY}(20) = 0 \Rightarrow \therefore R_{EY} = 7.5T\uparrow$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow R_{AY} - 20 + 7.5 = 0 \Rightarrow \therefore R_{AY} = 12.5T\uparrow$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow \therefore R_{AX} = R_{EX} = 0$$

Los momentos internos M se obtienen con base en las figuras 2-2i y 2-2j.

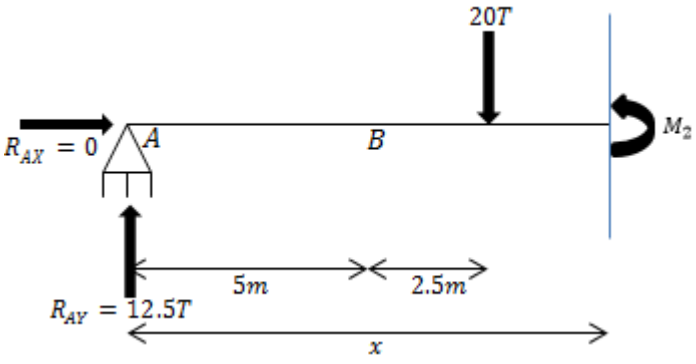


(i)

$$0 \le x \le 7.5m$$

$$+\circlearrowright \sum Mcorte = 0$$

$$M_1 = 12.5x$$



(j)

$$7.5m \le x \le 20m$$

$$+\circlearrowright \sum Mcorte = 0$$

$$M_2 = 12.5x - 20(x - 7.5) = 150 - 7.5x$$

Viga ECu_1, figura 2-1f.

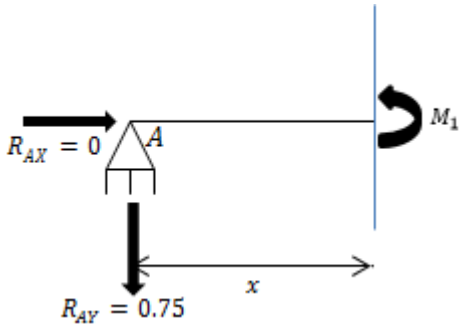
Se calculan las reacciones en los soportes.

$$+\circlearrowright \sum MA = 0 \Rightarrow -1(5) + R_{EY}(20) = 0 \Rightarrow \therefore R_{EY} = 0.25 \downarrow$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow -R_{AY} + 1 - 0.25 = 0 \Rightarrow \therefore R_{AY} = 0.75 \downarrow$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow \therefore R_{AX} = R_{EX} = 0$$

Se deducen los momentos internos m_1 a partir de las figuras 2-2k y 2-2l.

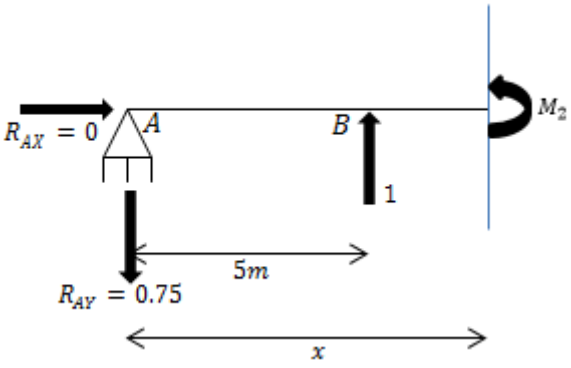


(k)

$$0 \leq x \leq 5m$$

$$+\circlearrowright \sum Mcorte = 0$$

$$M_1 = -0.75x$$



(l)

$$5m \leq x \leq 20m$$

$$+\circlearrowright \sum Mcorte = 0$$

$$M_2 = -0.75x + 1(x - 5) = 0.25x - 5$$

Viga ECu_2, figura 2-1g.

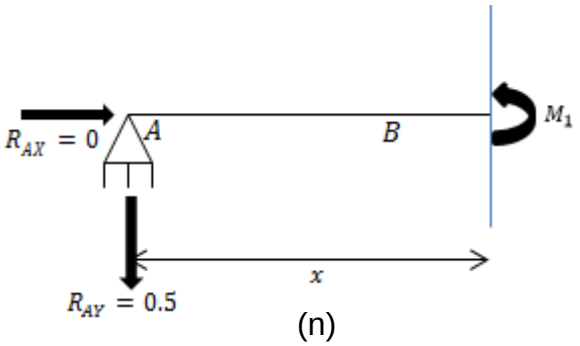
Las fuerzas reactivas en los apoyos son resultado de

$$+\circlearrowright \sum MA = 0 \Rightarrow -1(10) + R_{EY}(20) = 0 \Rightarrow \therefore R_{EY} = 0.5 \downarrow$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow -R_{AY} + 1 - 0.5 = 0 \Rightarrow \therefore R_{AY} = 0.5 \downarrow$$

$$+\longrightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow \therefore R_{AX} = R_{EX} = 0$$

Se proporcionan los momentos internos m_2, figuras 2-2n y 2-2ñ.



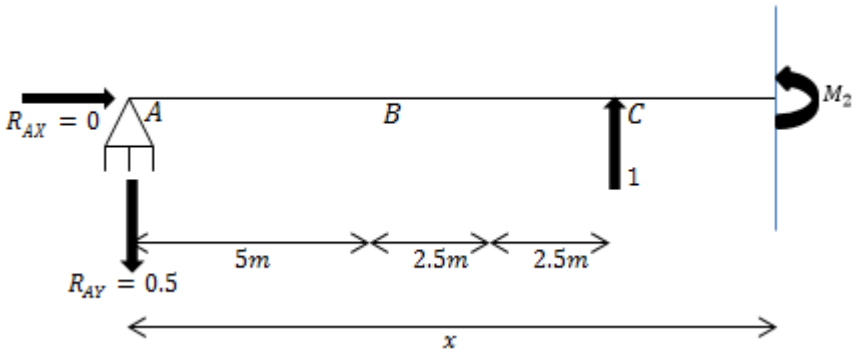
(n)

$$0 \leq x \leq 10m$$

$$\circlearrowleft + \sum Mcorte = 0$$

$$M_1 = -0.5x$$

$$10m \leq x \leq 20m$$



(ñ)

$$\circlearrowleft + \sum Mcorte = 0 \Rightarrow M_2 = -0.5x + 1(x - 10) = 0.5x - 10$$

Viga ECu_3, figura 2-1h.

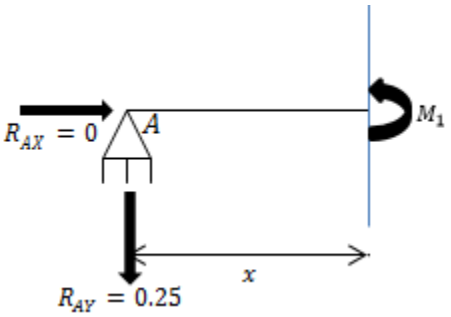
Las reacciones en los soportes son

$$\circlearrowleft + \sum MA = 0 \Rightarrow 0 - 1(15) + R_{EY}(20) = 0 \Rightarrow \therefore R_{EY} = 0.75 \downarrow$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow -R_{AY} + 1 - 0.75 = 0 \Rightarrow \therefore R_{AY} = 0.25 \downarrow$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow \therefore R_{AX} = R_{EX} = 0$$

Se muestran los momentos internos m_3.



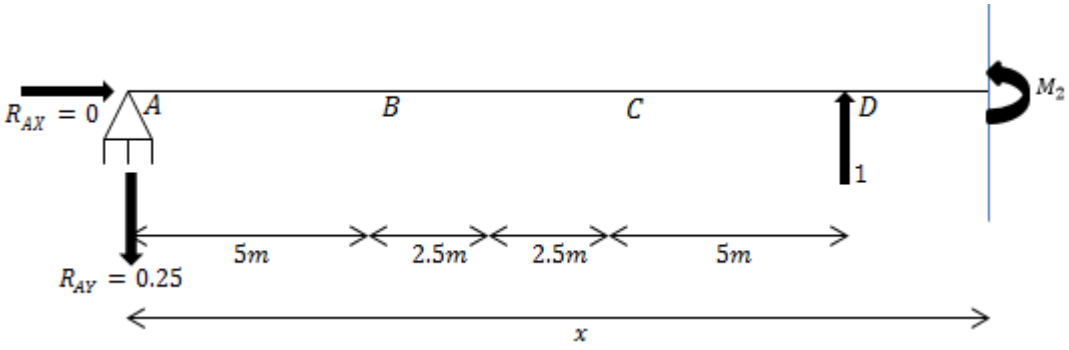
(o)

$$0 \leq x \leq 15m$$

$$+\circlearrowright \sum Mcorte = 0$$

$$M_1 = -0.25x$$

$$15m \leq x \leq 20m$$



(p)

$$+\circlearrowright \sum Mcorte = 0 \Rightarrow M_2 = -0.25x + 1(x - 15) = 0.75x - 15$$

Se presenta el cálculo de las incompatibilidades geométricas.

$$d_1 = \frac{1}{34200}\left[\int_0^5 (12.5x)(-0.75x)dx + \int_5^{7.5} (12.5x)(0.25x - 5)dx + \int_{7.5}^{20} (150 - 7.5x)(0.25x - 5)dx\right] = -0.066627m$$

$$d_2 = \frac{1}{34200}\left[\int_0^{7.5} (12.5x)(-0.5x)dx + \int_{7.5}^{10} (150 - 7.5x)(-0.5x)dx + \int_{10}^{20} (150 - 7.5x)(0.5x - 10)dx\right] = -0.08909m$$

$$d_3 = \frac{1}{34200}\left[\int_0^{7.5}(12.5x)(-0.25x)dx + \int_{7.5}^{15}(150-7.5x)(-0.25x)dx + \int_{15}^{20}(150-7.5x)(0.75x-15)dx\right] = -0.058251m$$

Se muestra el cálculo de los coeficientes de flexibilidad.

$$f_{11} = \frac{1}{34200}\left[\int_0^{5}(-0.75x)(-0.75x)dx + \int_{15}^{20}(0.25x-5)(0.25x-5)dx\right] = 0.002741m$$

$$f_{21} = \frac{1}{34200}\left[\int_0^{5}(-0.75x)(-0.5x)dx + \int_{5}^{10}(0.25x-5)(-0.5x)dx + \int_{10}^{20}(0.25x-5)(0.5x-10)dx\right] = 0.00335m$$

$$f_{31} = \frac{1}{34200}\left[\int_0^{5}(-0.75x)(-0.25x)dx + \int_{5}^{15}(0.25x-5)(-0.25x)dx + \int_{15}^{20}(0.25x-5)(0.75x-15)dx\right] = 0.002132m$$

$$f_{12} = f_{21} = 0.00335m$$

$$f_{22} = \frac{1}{34200}\left[\int_0^{10}(-0.5x)(-0.5x)dx + \int_{10}^{20}(0.5x-10)(0.5x-10)dx\right] = 0.004873m$$

$$f_{32} = \frac{1}{34200}\left[\int_0^{10}(-0.5x)(-0.25x)dx + \int_{10}^{15}(0.5x-10)(-0.25x)dx + \int_{15}^{20}(0.5x-10)(0.75x-15)dx\right] = 0.00335m$$

$$f_{13} = f_{31} = 0.002132m$$

$$f_{23} = f_{32} = 0.00335m$$

$$f_{33} = \frac{1}{34200}\left[\int_0^{15}(-0.25x)(-0.25x)dx + \int_{15}^{20}(0.75x-15)(0.75x-15)dx\right] = 0.002741m$$

Cálculo de las redundantes

Al sustituir los resultados en las ecuaciones $(4), (5)$ y , (6) se tiene

$$-0.066627 + 0.002741R_{BY} + 0.00335R_{CY} + 0.002132R_{DY} = -0.015 - - - (7)$$

$$-0.08909 + 0.00335R_{BY} + 0.004873R_{CY} + 0.00335R_{DY} = 0 - - - (8)$$

$$-0.058251 + 0.002132R_{BY} + 0.00335R_{CY} + 0.002741R_{DY} = 0 - - - (9)$$

Resolviendo el sistema se obtiene

$$R_{BY} = -29.0593, R_{CY} = 50.7592, R_{DY} = -18.1824$$

Los signos negativos indican que tales reacciones tienen un sentido opuesto al propuesto en su respectiva carga unitaria. Por lo tanto,

$$R_{BY} = 29.0593T\downarrow$$

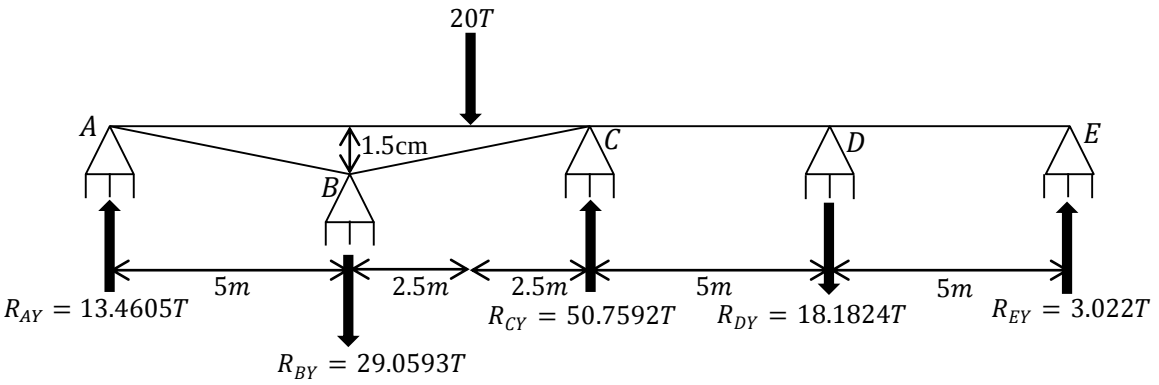
$$R_{CY} = 50.7592T\uparrow$$

$$R_{DY} = 18.1824T\downarrow$$

Ecuaciones de equilibrio

En el diagrama de la figura 2-2q se visualizan los valores de todas las reacciones en los soportes de la viga real.

(q)



Las reacciones restantes se obtiene de

$$+\circlearrowright \sum MA = 0$$

$$29.0593(5) + 20(7.5) - 50.7592(10) + 18.1824(15) - R_{EY}(20) = 0$$

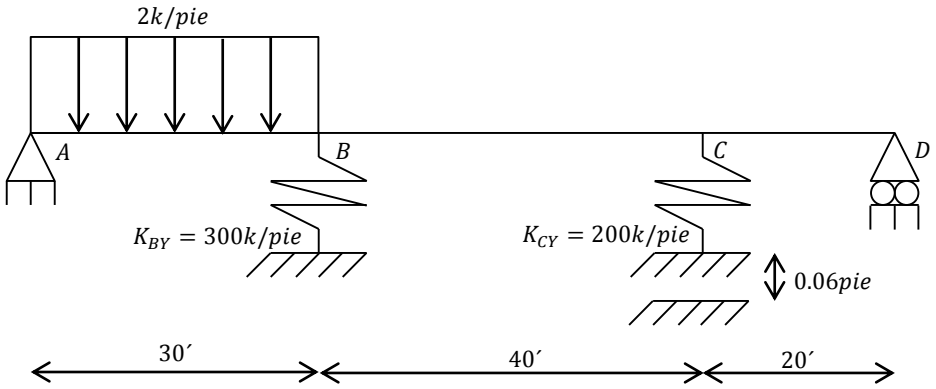
$$\therefore R_{EY} = 3.022T\uparrow$$

$$+\uparrow \sum FY = 0$$

$$R_{AY} - 29.0593 - 20 + 50.7592 - 18.1824 + 3.022 = 0 \Rightarrow \therefore R_{AY} = 13.4605T\uparrow$$

Ejercicio 2.3 Método de flexibilidades aplicado a una viga con un asentamiento en un soporte modelado como resorte helicoidal.

Instrucciones Calcule las reacciones en los apoyos de la viga continua de tres tramos representada en la figura 2-3a. Sobre el tramo $A-B$ actúa una carga de $2k/pie$ y un error de construcción desplazó al apoyo C $0.06pie$ por debajo de la posición prevista. Los apoyos B y C se modelan como resortes elásticos de compresión o helicoidales; las constantes de resorte respectivas se especifican en la ilustración. E e I son constantes para toda la viga y $EI = 276000k \cdot pie^2$.



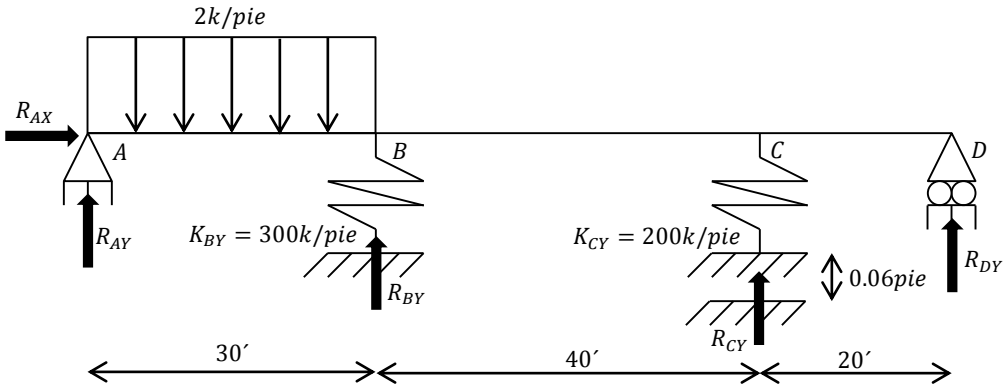
ER: Estructura real

(a)

Figura 2-3

SOLUCIÓN

Verificación del grado de indeterminación y elección de las reacciones redundantes



(b)

Las reacciones en los soportes han sido debidamente identificadas, figura 2-3b.

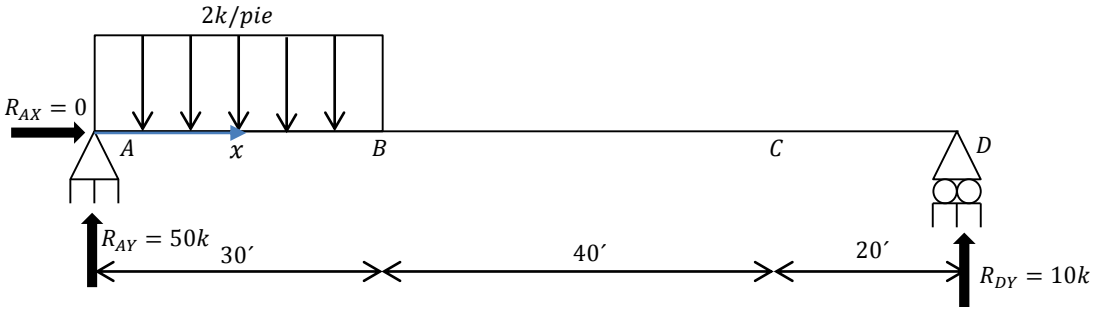
Como la viga no soporta alguna fuerza horizontal, directamente de suma de fuerzas en la dirección X se obtiene que $R_{AX} = 0$.

Entonces, la viga es estáticamente indeterminada de segundo grado. Se Seleccionan como redundantes las reacciones de los soportes modelados con resortes helicoidales.

Principio de superposición

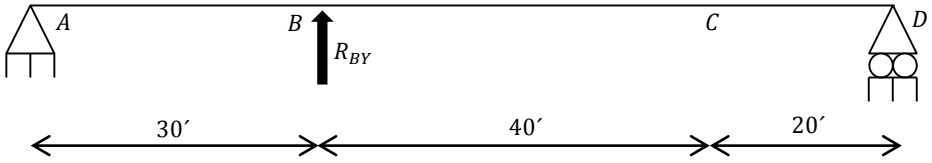
Por superposición, la viga real (ER) es igual a la suma de las vigas observadas en las figuras 2-3c, 2-3d y 2-3e:

$$ER = EP + ERd_1 + ERd_2$$



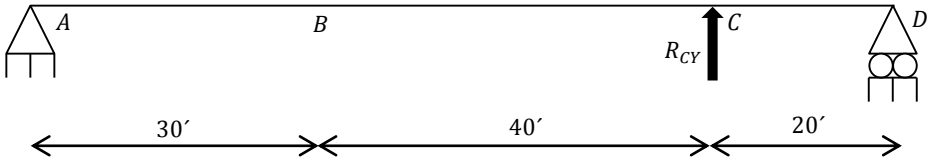
EP: Estructura primaria $\Longrightarrow M$

(c)



ERd_1: Estructura liberada con fuerza redundante R_{BY} aplicada

(d)



ERd_2: Estructura liberada con fuerza redundante R_{CY} aplicada

(e)

Planteamiento de las ecuaciones de compatibilidad geométrica

Tomando en cuenta la compatibilidad del desplazamiento vertical tanto en el soporte B como en el C, puede plantearse el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\delta_{VB_{EP}} + \delta_{VB_{ERd_1}} + \delta_{VB_{ERd_2}} = \delta_{VB_{ER}} - - - (1)$$

$$\delta_{VC_{EP}} + \delta_{VC_{ERd_1}} + \delta_{VC_{ERd_2}} = \delta_{VC_{ER}} - - - (2)$$

Obsérvese que en la viga real (ER) el punto B, debido al resorte helicoidal, experimenta un desplazamiento vertical opuesto a su fuerza reactiva que equivale a ésta última entre su correspondiente constante de resorte. Algo análogo ocurre en el punto D, pero además ahí se ha impuesto un desplazamiento vertical hacia abajo de $0.006\ pies$.

Las redundantes se han propuesto hacia arriba, por lo que las cargas unitarias para la estructura liberada también tendrán esa dirección; ello indica que estamos adoptando una convención de signo en la que un desplazamiento hacia arriba se considera positivo. Por todo lo anterior, el desplazamiento vertical en el punto B de la viga real equivale a $\delta_{VB_{ER}} = -\frac{R_{BY}}{K_{BY}}$ y el desplazamiento vertical en el punto C es igual a $\delta_{VC_{ER}} = -\frac{R_{CY}}{K_{CY}} - 0.06$. Si hacemos las sustituciones correspondientes y expresamos el sistema de ecuaciones de compatibilidad geométrica en función de las incógnitas obtenemos

$$d_1 + f_{11}R_{BY} + f_{12}R_{CY} = -\frac{R_{BY}}{K_{BY}} - - - (3)$$

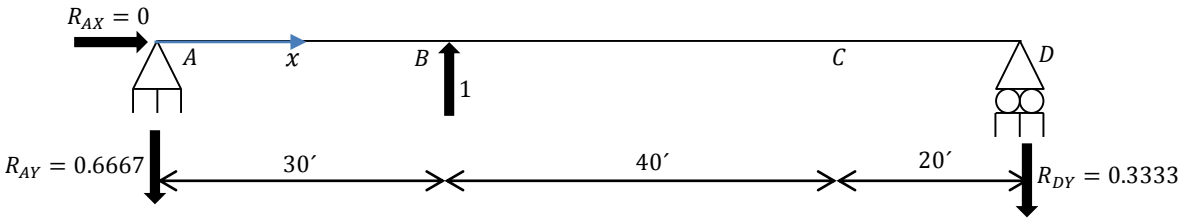
$$d_2 + f_{21}R_{BY} + f_{22}R_{CY} = -\frac{R_{CY}}{K_{CY}} - 0.06 - - - (4)$$

Al agrupar términos semejantes se tiene

$$d_1 + \left(f_{11} + \frac{1}{K_{BY}}\right)R_{BY} + f_{12}R_{CY} = 0 - - - (5)$$

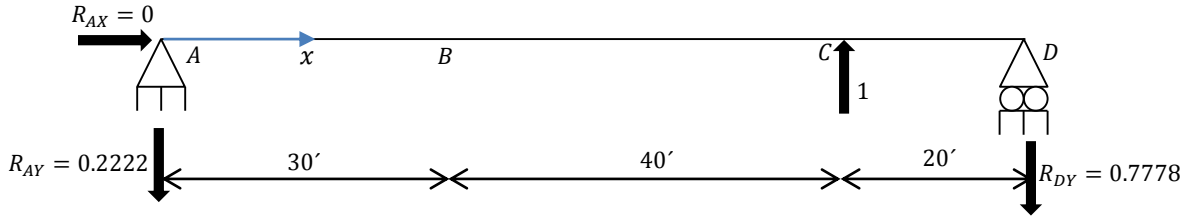
$$d_2 + f_{21}R_{BY} + \left(f_{22} + \frac{1}{K_{CY}}\right)R_{CY} = -0.06 - - - (6)$$

Las siguientes estructuras, figuras 2-3f y 2-3g, auxilian a obtener el valor de los coeficientes de flexibilidad fácilmente ya que sólo soportan una unidad de carga vertical en B y C, respectivamente.



ECu_1: Estructura liberada con fuerza vertical unitaria aplicada en $B \Longrightarrow m_1$

(f)



ECu_2: Estructura liberada con fuerza vertical unitaria aplicada en $C \Longrightarrow m_2$

(g)

Cálculo de las incompatibilidades geométricas y de los coeficientes de flexibilidad

En resumen, en las vigas de las figuras 2-3c, 2-3f y 2-3g es necesario determinar los valores del desplazamiento vertical en B dado que R_{BY} (fuerza reactiva vertical en el resorte helicoidal del punto B) fue suprimida y del desplazamiento vertical en C dado que R_{CY} (fuerza reactiva vertical en el resorte de compresión del punto C) fue eliminada.

El orden con el que se calcularán los desplazamientos citados aplicando el método del trabajo virtual considerando sólo las deformaciones debidas a flexión, se proporciona en seguida.

$$d_1 = \delta_{VB_{EP}} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mm_1}{EI}\,dx\,;\, d_2 = \delta_{VC_{EP}} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mm_2}{EI}\,dx\,;\, f_{11} = \delta_{VB_{ECu_1}} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{m_1 m_1}{EI}\,dx$$

$$f_{21} = \delta_{VC_{ECu_1}} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{m_1 m_2}{EI}\,dx\,;\, f_{12} = \delta_{VB_{ECu_2}} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{m_2 m_1}{EI}\,dx\,;\, f_{22} = \delta_{VC_{ECu_2}} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{m_2 m_2}{EI}\,dx$$

Viga EP, figura 2-3c.

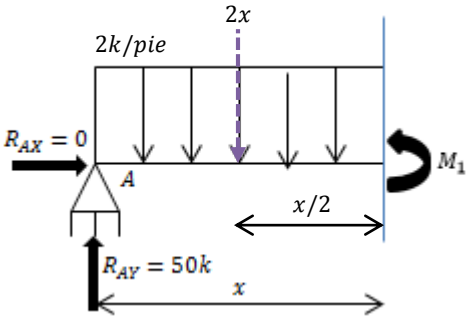
Se calculan las reacciones en los apoyos.

$$\circlearrowright+\sum MA=0\Rightarrow 2(30)\left(\frac{1}{2}(30)\right)-R_{DY}(90)=0\Rightarrow\therefore R_{DY}=10k\uparrow$$

$$+\uparrow\sum FY=0\Rightarrow R_{AY}-2(30)+10=0\Rightarrow\therefore R_{AY}=50k\uparrow$$

$$+\rightarrow\sum FX=0\Rightarrow\therefore R_{AX}=0$$

Los momentos internos M, figuras 2-3h y 2-3i, son

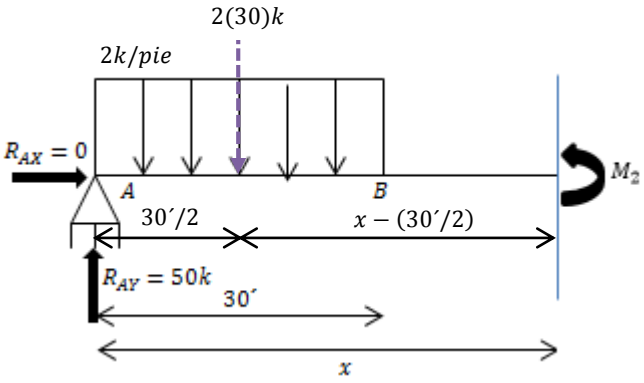


(h)

$$0'\leq x\leq 30'$$

$$\circlearrowright+\sum Mcorte=0$$

$$M_1=50x-2(x)\left(\frac{x}{2}\right)=50x-x^2$$



(i)

$$30'\leq x\leq 90'$$

$$\circlearrowright+\sum Mcorte=0$$

$$M_2=50x-2(30)\left(x-\frac{1}{2}(30)\right)=900-10x$$

Viga ECu_1, figura 2-3f.

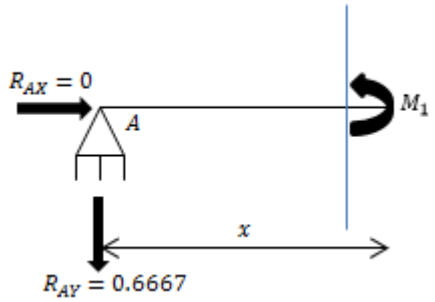
Se muestra el cálculo de las reacciones en los apoyos.

$$\circlearrowright+\sum MA=0\Rightarrow -1(30)+R_{DY}(90)=0\Rightarrow\therefore R_{DY}=0.3333\downarrow$$

$$+\uparrow\sum FY=0\Rightarrow -R_{AY}+1-0.3333=0\Rightarrow\therefore R_{AY}=0.6667\downarrow$$

$$+\rightarrow\sum FX=0\Rightarrow\therefore R_{AX}=0$$

Se deducen los momentos internos m_1, figuras 2-3j y 2-3k.

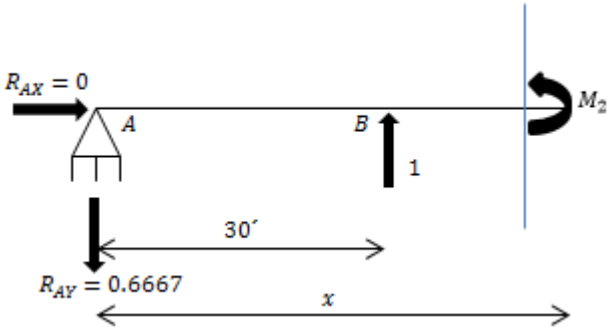


(j)

$$0' \leq x \leq 30'$$

$$+\circlearrowright \sum Mcorte = 0$$

$$M_1 = -0.6667x$$



(k)

$$30' \leq x \leq 90'$$

$$+\circlearrowright \sum Mcorte = 0$$

$$M_2 = -0.6667x + 1(x - 30) = 0.3333x - 30$$

Viga ECu_2, figura 2-3g.

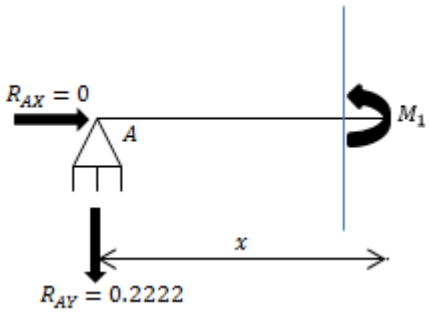
Se determinan las reacciones en los apoyos.

$$+\circlearrowright \sum MA = 0 \Rightarrow -1(70) + R_{DY}(90) = 0 \Rightarrow \therefore R_{DY} = 0.7778 \downarrow$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow -R_{AY} + 1 - 0.7778 = 0 \Rightarrow \therefore R_{AY} = 0.2222 \downarrow$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow \therefore R_{AX} = 0$$

Se calculan los momentos internos m_2, figuras 2-3l y 2-3m.



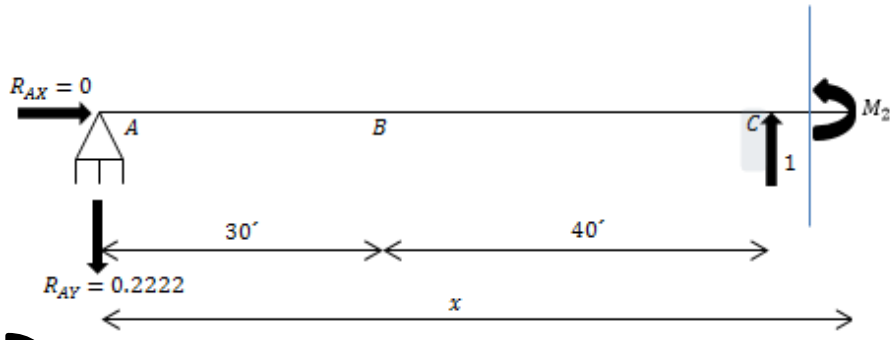
$$0' \leq x \leq 70'$$

$$+\sum Mcorte = 0$$

$$M_1 = -0.2222x$$

(l)

$$70' \leq x \leq 90'$$



(m)

$$+\sum Mcorte = 0 \Rightarrow M_2 = -0.2222x + 1(x - 70) = 0.7778x - 70$$

Se proporciona el cálculo de las incompatibilidades geométricas.

$$d_1 = \frac{1}{276000}\left[\int_0^{30}(50x - x^2)(-0.6667x)dx + \int_{30}^{90}(900 - 10x)(0.3333x - 30)dx\right]$$
$$= -1.46753pies$$

$$d_2 = \frac{1}{276000}\left[\int_0^{30}(50x - x^2)(-0.2222x)dx + \int_{30}^{70}(900 - 10x)(-0.2222x)dx + \int_{70}^{90}(900 - 10x)(0.7778x - 70)dx\right] = -0.875511pies$$

Se presenta el cálculo de los coeficientes de flexibilidad.

$$f_{11} = \frac{1}{276000}\left[\int_0^{30}(-0.6667x)(-0.6667x)dx + \int_{30}^{90}(0.3333x-30)(0.3333x-30)dx\right] = 0.043487pies$$

$$f_{21} = \frac{1}{276000}\left[\int_0^{30}(-0.6667x)(-0.2222x)dx + \int_{30}^{70}(0.3333x-30)(-0.2222x)dx + \int_{70}^{90}(0.3333x-30)(0.7778x-70)dx\right] = 0.027377pies$$

$$f_{12} = f_{21} = 0.027377pies$$

$$f_{22} = \frac{1}{276000}\left[\int_0^{70}(-0.2222x)(-0.2222x)dx + \int_{70}^{90}(0.7778x-70)(0.7778x-70)dx\right] = 0.026296pies$$

Cálculo de las reacciones redundantes

Al expresar en forma matricial el sistema de ecuaciones de compatibilidad se tiene

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{11}+\frac{1}{K_1} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22}+\frac{1}{K_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} R_{BY} \\ R_{CY} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.06 \end{pmatrix} - - - (7)$$

Sustituyendo los resultados en la expresión (7) y resolviendo se obtiene

$$\begin{pmatrix} -1.46753 \\ -0.875511 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.043487+\frac{1}{300} & 0.027377 \\ 0.027377 & 0.026296+\frac{1}{200} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} R_{BY} \\ R_{CY} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.06 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} R_{BY} \\ R_{CY} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.043487+\frac{1}{300} & 0.027377 \\ 0.027377 & 0.026296+\frac{1}{200} \end{pmatrix}^{-1}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ -0.06 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1.46753 \\ -0.875511 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 32.9728 \\ -2.78584 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

$$R_{BY} = 32.9728k\uparrow \quad y \quad R_{CY} = 2.78584k\downarrow$$

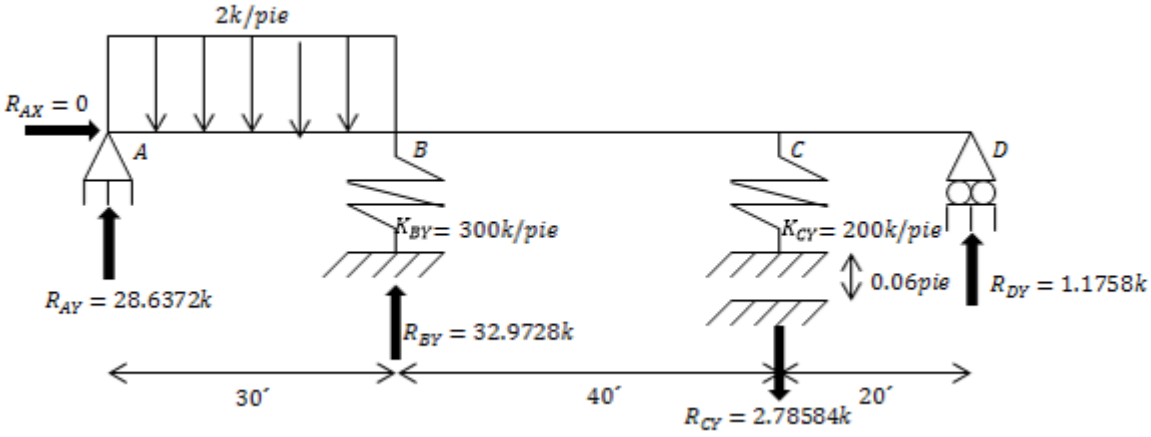
Ecuaciones de equilibrio

Las reacciones restantes se obtienen de

$$\circlearrowright + \sum MA = 0 \Rightarrow 2(30)\left(\frac{1}{2}(30)\right) - 32.9728(30) + 2.78584(70) - R_{DY}(90) = 0 \Rightarrow \therefore R_{DY} = 1.1758k\uparrow$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow R_{AY} - 2(30) + 32.9728 - 2.78584 + 1.1758 = 0 \Rightarrow \therefore R_{AY} = 28.6372k\uparrow$$

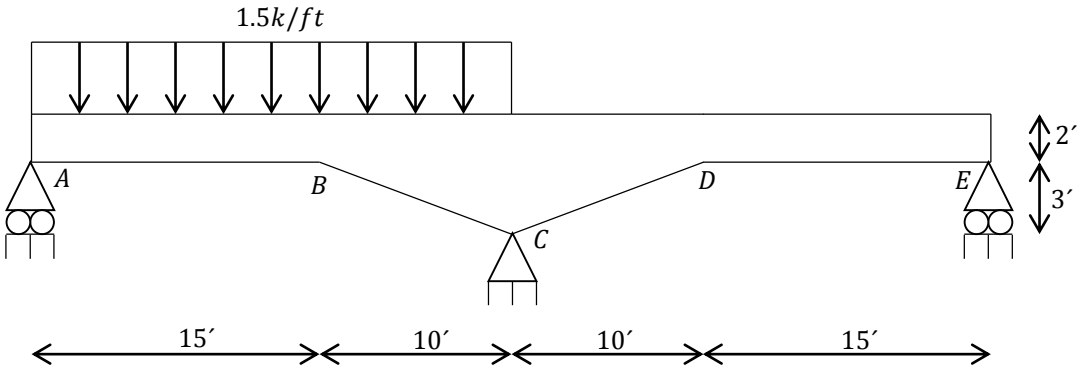
En el diagrama de la figura 2-3n se visualizan los valores de todas las reacciones en los soportes de la viga real.



(n)

Ejercicio 2.4 Resolución de una viga de sección variable empleando el método de las fuerzas.

Instrucciones Calcular las reacciones de la viga indeterminada de tres apoyos que se ilustra en la figura 2-4a usando el método de las fuerzas. La sección transversal de la viga es rectangular y tiene 1.5 pies de ancho, su altura varía linealmente a cada lado del apoyo intermedio. Aquí $E = 3000k/pulg^2$.



ER: Estructura real

(a)

Figura 2-4

SOLUCIÓN.

Datos

Esta viga es especial por ser de sección variable. Por otra parte, se opta por usar unidades k y ft, entonces, para manejar una congruencia de ellas, tenemos que el módulo de elasticidad para toda la viga es

$$E = \left(3000\frac{k}{pulg^2}\right)\left(\frac{(12pulg)^2}{(ft)^2}\right) = 432000\frac{k}{ft^2}$$

En los tramos $A-B$ y $E-D$ donde la sección transversal es constante, la inercia tiene un valor fijo de

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{(1.5ft)(2ft)^3}{12} = 1ft^4$$

En tanto, para los tramos $B-C$ y $C-D$ donde la sección transversal ya no es constante, la inercia ya no será un valor fijo, sin embargo esta parte se tratará más adelante.

Verificación del grado de indeterminación y elección de las reacciones redundantes

Obsérvese que la viga real no soporta cargas en la dirección X por lo que directamente se infiere que la fuerza reactiva horizontal del soporte en C es nula.

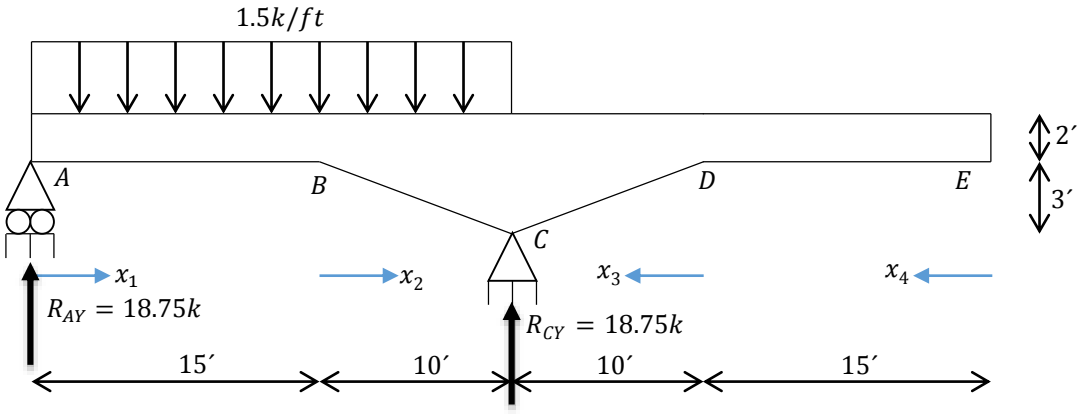
$$+\longrightarrow \sum FX = 0 \Longrightarrow R_{CX} = 0$$

Como sólo quedan dos ecuaciones de equilibrio $\sum FY = 0$ y $\sum M = 0$ y tenemos tres incógnitas de reacción $(R_{AY}, R_{CY}\ y\ R_{EY})$, la estructura tiene un grado de hiperestaticidad de uno, así que debemos elegir a una de las tres fuerzas reactivas previas, cualquiera de ellas, como redundante; se opta porque R_{EY} sea la fuerza correctiva.

Principio de superposición

Se elimina el soporte en E. Usando el principio de superposición, la viga real ER es igual a la suma de las siguientes vigas:

$$ER = EP + ERd_1$$



EP: Estructura primaria $\Longrightarrow M$

(b)

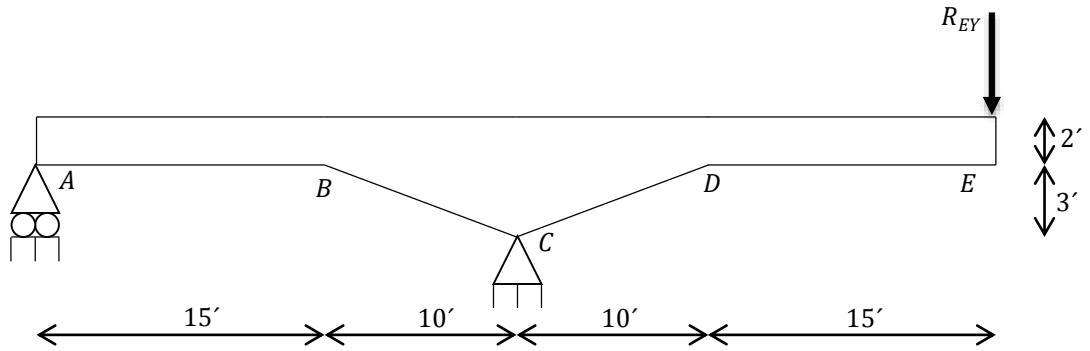
Planteamiento de la ecuación de compatibilidad geométrica

Como el grado de indeterminación es de uno, en vez de un sistema de ecuaciones se plantea una sola ecuación de compatibilidad.

$$\delta_{VE_{EP}} + \delta_{VE_{ERd_1}} = \delta_{VE_{ER}} - - - (1)$$

Considerando que el rodillo en E de la viga real restringe (no permite) la deflexión en ese punto, $\delta_{VE_{ER}}$ es nulo y como en la viga ERd_1, figura 2-4c, el desplazamiento vertical en el punto E es equivalente a una cierta cantidad $\delta_{VE_{ERd_1}} = R_{EY}(f_{11})$, la ecuación (1) puede escribirse en términos de la incógnita R_{EY} como:

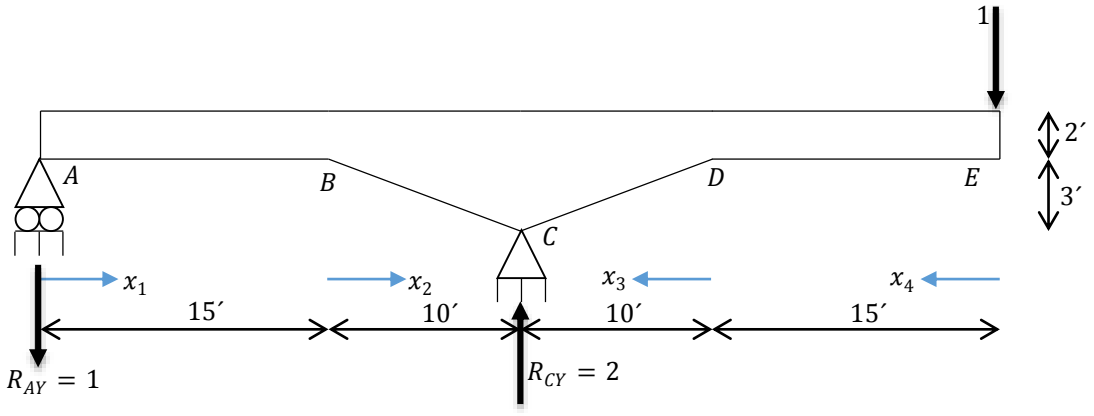
$$d_1 + f_{11}R_{EY} = 0 - - - (2)$$



ERd_1: Estructura liberada con fuerza redundante R_{EY} aplicada

(c)

Si a la estructura liberada le aplicamos una unidad de carga vertical en el punto E en lugar de aplicar la fuerza R_{EY}, figura 2-4d, el coeficiente de flexibilidad puede obtenerse directamente al calcular el desplazamiento vertical en ese mismo punto, debido a que $\delta_{VE_E} = f_{11}$.



ECu_1: Estructura liberada con fuerza vertical unitaria aplicada en $B \Longrightarrow m$

(d)

Cálculo de la incompatibilidad geométrica y del coeficiente de flexibilidad

En consecuencia, para poder resolver la ecuación (2), en las vigas de las figuras 2-4b y 2-4c es necesario determinar el valor del desplazamiento vertical en E ya que R_{EY} (fuerza reactiva vertical en el rodillo del punto E) fue eliminada. El orden con el que se calcularán los desplazamientos aplicando el método del trabajo virtual considerando sólo las deformaciones debidas a flexión se proporciona enseguida.

$$d_1 = \delta_{VE_{EP}} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mm}{EI}$$

$$f_{11} = \delta_{VE_{ECu_1}} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{mm}{EI}$$

Se analiza la viga EP, figura 2-3b.

Las reacciones en los apoyos son

$$+\circlearrowright \sum MA = 0 \Rightarrow (1.5)(25)\left(\frac{25}{2}\right) - R_{CY}(25) = 0 \Rightarrow \therefore R_{CY} = 18.75k \uparrow$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow R_{AY} - (1.5)(25) + 18.75 = 0 \Longrightarrow \therefore R_{AY} = 18.75k \uparrow$$

Los momentos internos M se deducen a continuación.

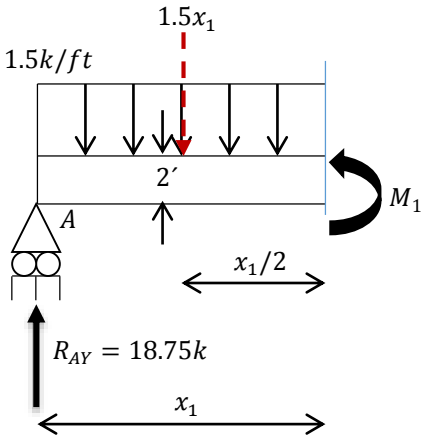
Las funciones de momento M son discontinuas en C debido a que en ese punto la carga uniforme distribuida es discontinua, además de que ahí actúa la carga puntual R_{CY}. Sin embargo, por los cambio de geometría presentados en los puntos B y D, pueden distinguirse cuatro regiones distintas, en este caso, cada región ha sido cubierta por una coordenada x diferente; en consecuencia, la viga debe seccionarse perpendicularmente a su eje en cuatro ocasiones.

Se han especificado las coordenadas x por separado y sus orígenes asociados. La coordenada x_1 toma en cuenta le energía de deformación dentro del segmento $A - B$, tiene su origen en A y es positiva hacia la derecha; por su cuenta, x_2 que es válida dentro de la región desde B hasta C, cuyo origen es B, es positiva también hacia la derecha. Con ello ha quedado cubierta la región correspondiente a la mitad izquierda de la estructura.

Para abarcar la parte restante, se tiene que x_4 va de E a D, su origen está definido en E y es positiva hacia la izquierda, mientras que x_3 cubre el tramo $D - C$, su origen se asocia en D y es positiva hacia la izquierda.

Al aplicar el método de secciones en la estructura primaria, figuras 2-4e hasta 2-4i, se tiene

$$0 \leq x_1 \leq 15'$$



(e)

$$\circlearrowright+\sum Mcorte = 0$$

$$-M_1 + 18.75(x_1) - 1.5(x_1)\left(\frac{x_1}{2}\right) = 0$$

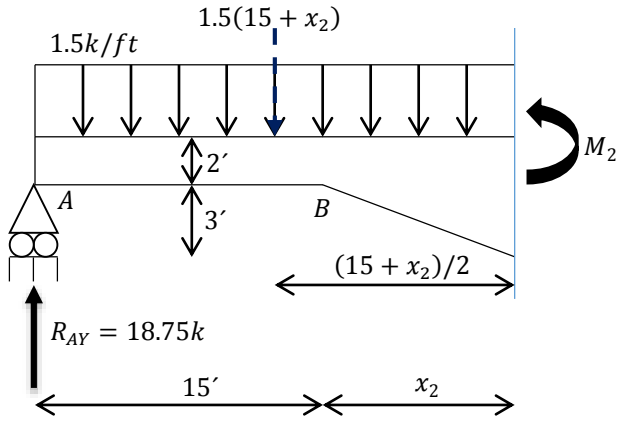
$$M_1 = 18.75x_1 - 0.75{x_1}^2$$

$$0 \leq x_2 \leq 10'$$

$$\circlearrowright+\sum Mcorte = 0$$

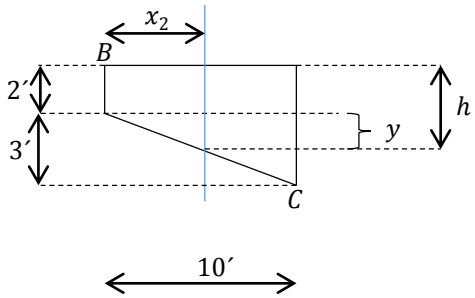
$$-M_2 + 18.75(x_2 + 15) - 1.5(15 + x_2)\left(\frac{15 + x_2}{2}\right) = 0$$

$$M_2 = -0.75{x_2}^2 - 3.75x_2 + 112.5$$



(f)

En la figura 2-4g se deduce la ecuación en función de x_2 con la que la altura h de la viga varía linealmente en la región $B-C$, en consecuencia, la inercia I también queda en función de x_2.



(g)

$$\frac{10´}{3´}=\frac{x_2}{y}\Rightarrow y=\frac{3}{10}x_2$$

$$h=2´+y=\frac{3}{10}x_2+2$$

$$I=\frac{bh^3}{12}=\frac{(1.5)\left(\frac{3}{10}x_2+2\right)^3}{12}=\frac{1}{8}\left(\frac{3}{10}x_2+2\right)^3$$

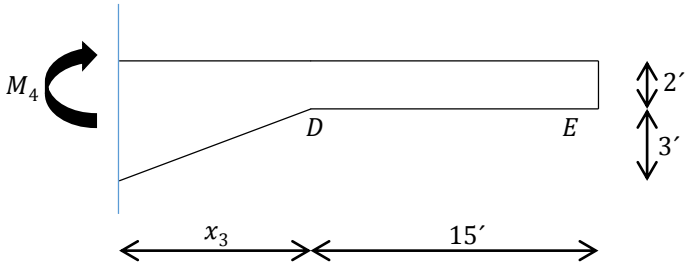
$$0\le x_4\le 15´$$

(h)

$$+\circlearrowright\sum Mcorte=0$$

$$M_3=0$$

$$0\le x_3\le 10´$$



(i)

$$+\circlearrowright\sum Mcorte=0$$

$$M_4=0$$

De forma análoga a la región $B-C$, la inercia en función de x_3 para la región $D-C$ es

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{(1.5)\left(\frac{3}{10}x_3 + 2\right)^3}{12} = \frac{1}{8}\left(\frac{3}{10}x_3 + 2\right)^3$$

Análisis de la viga ECu_1, figura 2-3d.

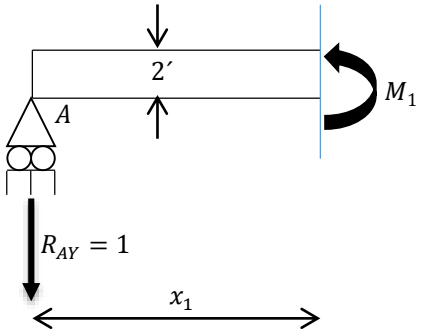
Al aplicar las ecuaciones de equilibrio se tiene

$$+\circlearrowleft \sum MA = 0 \Longrightarrow (1)(50) - R_{CY}(25) = 0 \Longrightarrow \therefore R_{CY} = 2\uparrow$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow -R_{AY} + 2 - 1 = 0 \Longrightarrow \therefore R_{AY} = 1\downarrow$$

Para calcular los momentos internos m, es forzoso utilizar las mismas coordenadas x que se emplearon para M. Al aplicar el método de secciones, figuras 2-4j hasta 2-4m, resulta

$$0 \leq x_1 \leq 15'$$



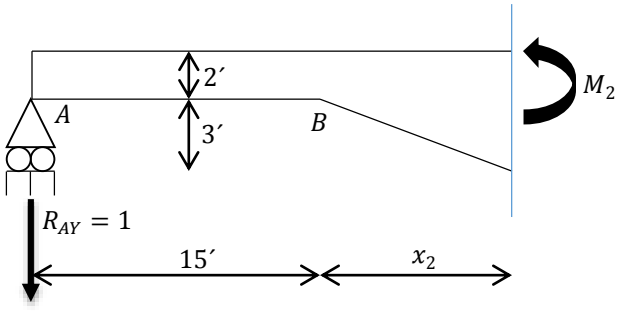
(j)

$$+\circlearrowleft \sum Mcorte = 0$$

$$-M_1 - 1(x_1) = 0$$

$$M_1 = -x_1$$

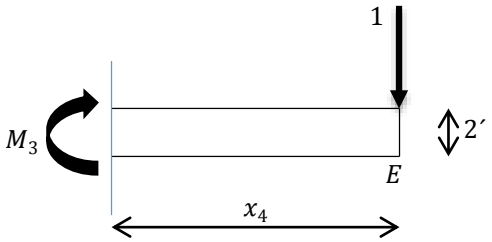
$$0 \leq x_2 \leq 10'$$



(k)

$$+\circlearrowright \sum Mcorte = 0 \Rightarrow -M_2 - 1(x_2 + 15) = 0 \Rightarrow M_2 = -15 - x_2$$

$$0 \leq x_4 \leq 15'$$

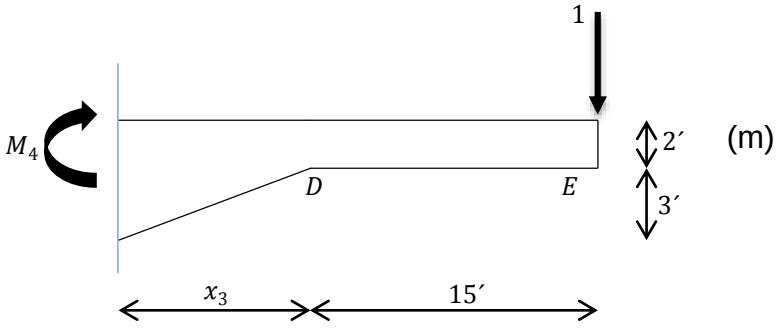


(l)

$$+\circlearrowright \sum Mcorte = 0$$

$$M_3 + 1(x_4) = 0 \Rightarrow M_3 = -x_4$$

$$0 \leq x_3 \leq 10'$$



(m)

$$+\circlearrowright \sum Mcorte = 0$$

$$M_4 + 1(x_3 + 15) = 0 \Rightarrow M_4 = -15 - x_3$$

A continuación se determinan la incompatibilidad geométrica d_1 y el coeficiente de flexibilidad f_{11}.

$$d_1 = \int_0^{15} \frac{(18.75x_1 - 0.75{x_1}^2)(-x_1)}{(432000)(1)} dx_1 + \int_0^{10} \frac{(-0.75{x_2}^2 - 3.75x_2 + 112.5)(-15 - x_2)}{(432000)\left[\frac{1}{8}\left(\frac{3}{10}x_2 + 2\right)^3\right]} dx_2$$

$$+ \int_0^{15} \frac{(0)(-x_3)}{(432000)(1)} dx_3 + \int_0^{10} \frac{(0)(-15 - x_4)}{(432000)\left[\frac{1}{8}\left(\frac{3}{10}x_4 + 2\right)^3\right]} dx_4$$

$$= -0.0268555 - 0.010127 + 0 + 0 = -0.036983$$

$$f_{11} = \int_0^{15} \frac{(-x_1)^2}{(432000)(1)} dx_1 + \int_0^{10} \frac{(-15 - x_2)^2}{(432000)\left[\frac{1}{8}\left(\frac{3}{10}x_2 + 2\right)^3\right]} dx_2$$

$$+ \int_0^{15} \frac{(-x_3)^2}{(432000)(1)} dx_3 + \int_0^{10} \frac{(-15 - x_4)^2}{(432000)\left[\frac{1}{8}\left(\frac{3}{10}x_4 + 2\right)^3\right]} dx_4$$

$$= 0.002604 + 0.002107 + 0.02604 + 0.002107 = 0.009423$$

Cálculo de la reacción redundante

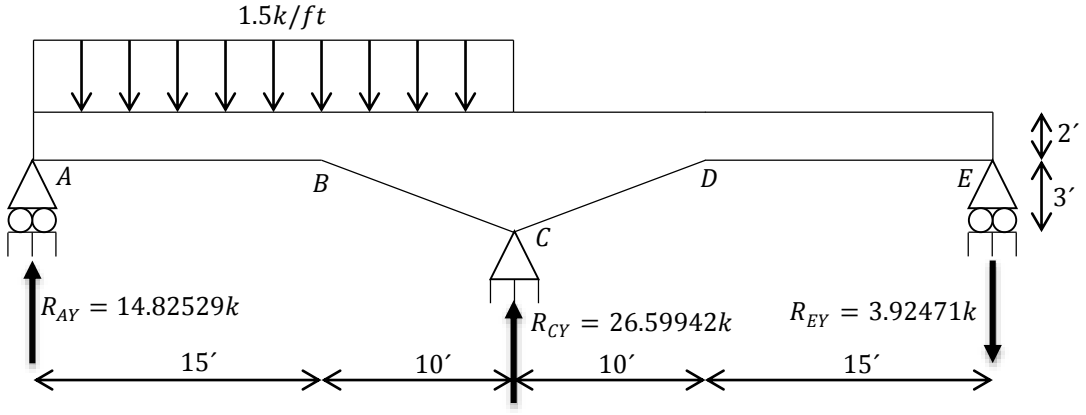
Al sustituir los resultados en la ecuación (2), se tiene

$$-0.036983 + 0.009423R_{EY} = 0 - - - (3)$$

Despejando a la incógnita da

$$R_{EY} = \frac{0.036983}{0.009423} = 3.92471 \Rightarrow \therefore R_{EY} = 3.92471k\downarrow$$

Ecuaciones de equilibrio



(n)

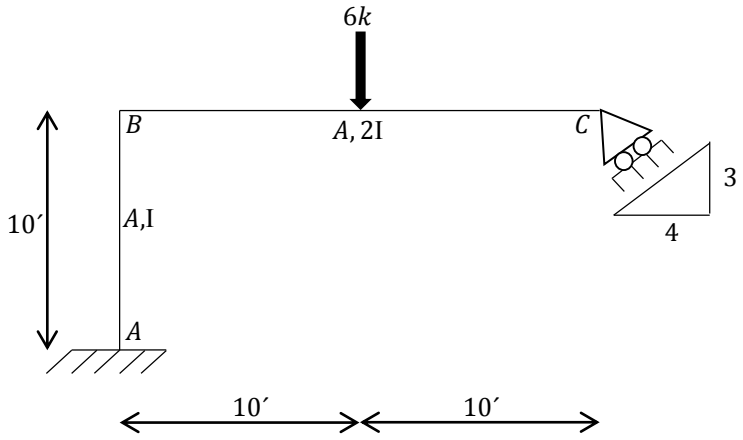
Las reacciones restantes, figura 2-4n, son

$$+\circlearrowright \sum MA = 0 \Rightarrow (1.5)(25)\left(\frac{25}{2}\right) - R_{CY}(25) + 3.92471(50) = 0 \Rightarrow \therefore R_{CY} = 26.59942k\uparrow$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow R_{AY} - (1.5)(25) + 26.59942 - 3.92471 = 0 \Rightarrow R_{AY} = 14.82529k\uparrow$$

Ejercicio 2.5 Método de flexibilidades aplicado a un marco con una redundante.

Instrucciones Calcule las reacciones en los apoyos y luego determine las expresiones algebraicas que describen la variación de los elementos mecánicos de la estructura rígida mostrada en la figura 2-5a. Se indican los valores relativos del área y del momento de inercia de la sección transversal de cada elemento de la estructura. $I = 500pulg^4$,$A = 20pulg^2$. El módulo de elasticidad E es igual para los dos elementos.



ER: Estructura real

(a)

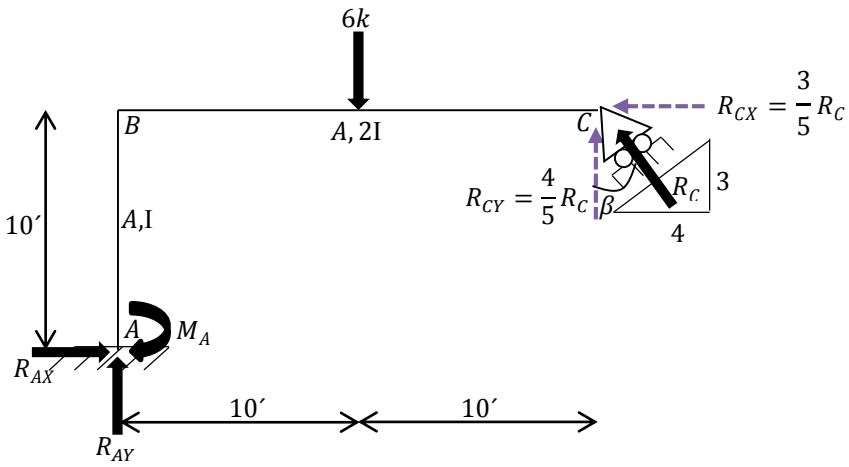
Figura 2-5

SOLUCIÓN

Verificación del grado de indeterminación

El número de nodos en el marco es $j = 3(A; B; C)$, no hay condiciones impuestas por la construcción, es decir $c = 0$, y hay $m = 2\ (A - B;\ C - B)$ miembros.

A continuación se identifican las reacciones en los apoyos, figura 2-5b.



(b)

Note que sólo hay $r = 4(R_{AX}; R_{AY}; M_A; R_C)$ incógnitas de reacción, dado que R_{CX} y R_{CY} son las componentes rectangulares de R_C que en seguida se explica cómo se obtienen.

De acuerdo a la figura 2-5c, del triángulo ① tenemos

$$\sin\theta = \frac{3}{5}, \cos\theta = \frac{4}{5}$$

$$\tan\theta = \frac{3}{4} \rightarrow \theta = \tan^{-1}\frac{3}{4}$$

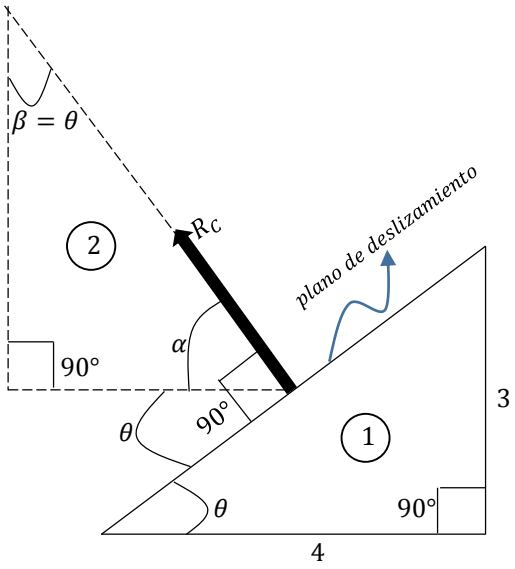
y del triángulo ②, se infiere

$$\alpha = 90° - \theta = 90° - \tan^{-1}\frac{3}{4}$$

$$90° + \alpha + \beta = 180° \rightarrow \beta = 180° - \alpha - 90°$$

$$\beta = 180° - \left(90° - \tan^{-1}\frac{3}{4}\right) - 90°$$

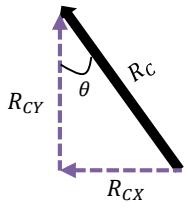
$$\beta = \tan^{-1}\frac{3}{4} = \theta = 36.8699°$$



(c)

Por lo tanto, con base en la figura 2-5d, resulta

(d)



$$\sin\theta = \frac{R_{CX}}{R_C} \Rightarrow R_{CX} = R_C(\sin\theta) = \frac{3}{5}R_C$$

$$\cos\theta = \frac{R_{CY}}{R_C} \Rightarrow R_{CY} = R_C(\cos\theta) = \frac{4}{5}R_C$$

Como $3m + r > 3j + c$ ya que $3(2) + 4 > 3(3) + 0 \Rightarrow 10 > 9$, el marco es estáticamente indeterminado de grado uno $(10 - 9 = 1)$.

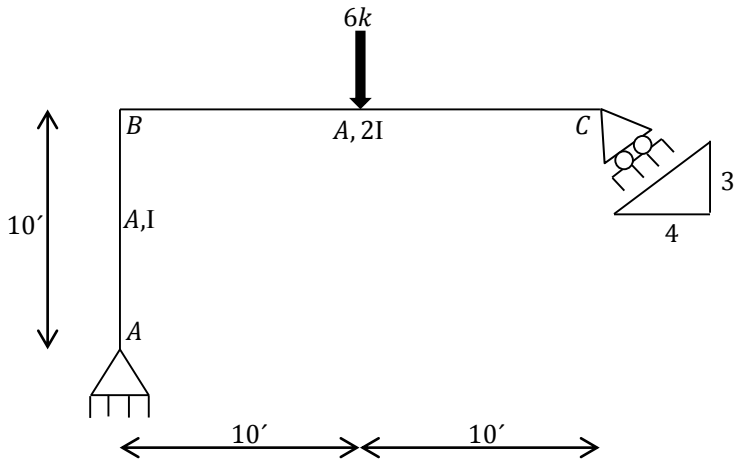
Elección de la reacción redundante y planteamiento de la estructura primaria

Se puede obtener una solución directa para M_A al elegirlo como redundante. En consecuencia, para liberar el marco, el empotramiento en A se reemplaza por un apoyo articulado (pasador), puesto que este último no restringirá A en la rotación (giro) ya que se está eliminando la capacidad del marco para soportar un

momento en A. No obstante, cualquiera de las otras tres reacciones restantes se pudieron haber elegido como fuerzas sobrantes.

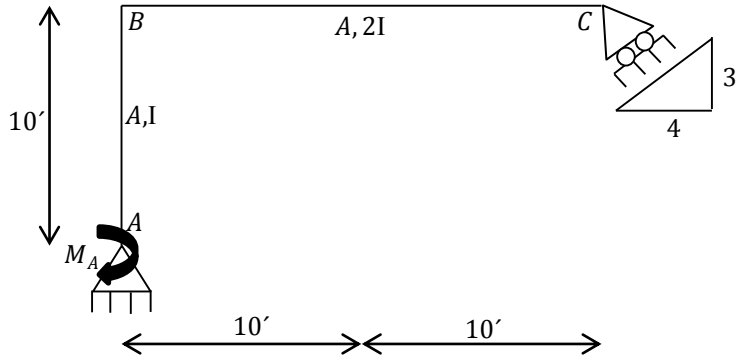
Principio de superposición

El marco real es igual a la estructura primaria (estructura liberada que soporta las cargas reales) más la estructura liberada sometida al momento puntual M_A, o sea, $ER = EP + ERd_1$.



EP: Estructura primaria $\Longrightarrow M$

(e)



ERd_1: Estructura liberada con momento redundante M_A aplicado

(f)

Planteamiento de la ecuación de compatibilidad geométrica

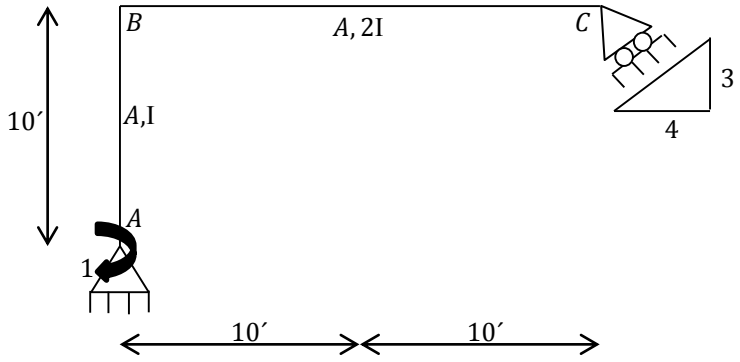
Por superposición, la ecuación de compatibilidad para el giro (rotación o pendiente) en A, θ_A, es

$$\theta_{A_{EP}} + \theta_{A_{ERd_1}} = \theta_{A_{ER}} - - - (1)$$

En el marco real no hay giro en A debido al empotramiento, así que $\theta_{A_{ER}}$ es nulo; por otra parte, si consideramos que el giro en A para los marcos de las figura 2-5e y 2-5f son iguales a una cierta cantidad de d_1 y $M_A(f_{11})$, es posible escribir la ecuación (1) en términos de la incógnita M_A como

$$d_1 + f_{11}M_A = 0 - - - (2)$$

Si a la estructura liberada le aplicamos una unidad de momento puntual en A correspondiente a la fuerza redundante, figura 2-5g, el coeficiente de flexibilidad puede obtenerse directamente al calcular la pendiente en ese punto por lo que $\theta_{A_{ECu_1}} = f_{11}$.



ECu_1: Estructura liberada con momento puntual unitario aplicado en $A \Longrightarrow m$
(g)

Cálculo de la incompatibilidad geométrica y del coeficiente de flexibilidad

En resumen, para poder resolver la ecuación (2), en los marcos de las figuras 2-5e y 2-5g es necesario determinar el valor de la pendiente en A ya que M_A (momento en el empotramiento del punto A) fue suprimido. A continuación se presenta el orden con el que se calcularán los giros por medio del método del trabajo virtual considerando únicamente las deformaciones debidas a la flexión.

$$d_1 = \theta_{A_{MIF1}} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mm}{EI}\, dx$$

$$f_{11} = \theta_{A_{MIF2}} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{mm}{EI}\, dx$$

Para asociar los momentos internos con las estructuras, le hemos denominado estructura M a la primaria y estructura m a la liberada con momento unitario aplicado en A. Es importante recordar que las coordenadas x a emplear y las direcciones positivas de los momentos tienen que ser iguales entre las dos estructuras recién mencionadas.

Se analiza el marco EP, figura 2-5e.

Las reacciones en los soportes, figura 2-5h, son

$$+\circlearrowright \sum MA = 0 \Rightarrow 6(10) - R_{CX}(10) - R_{CY}(20) = 0$$

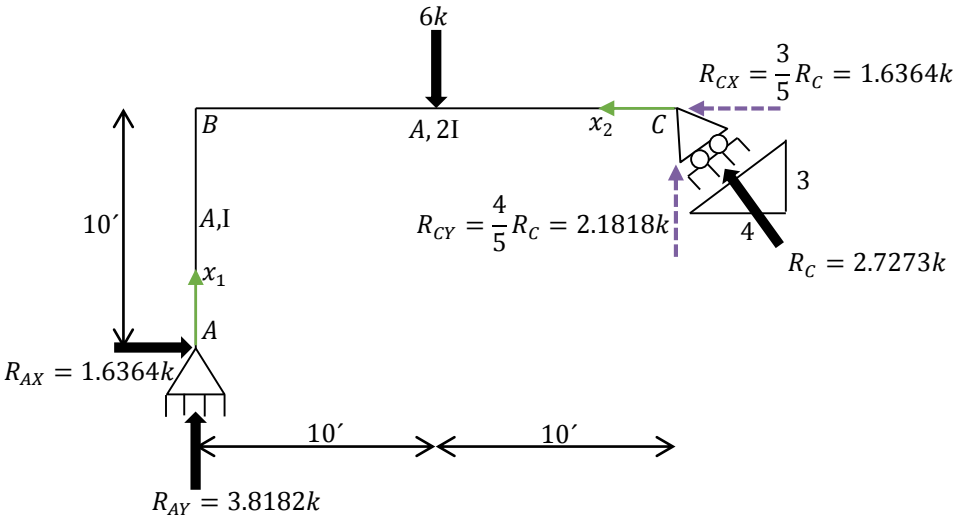
$$6(10) - \frac{3}{5}R_C(10) - \frac{4}{5}R_C(20) = 0 \Rightarrow 6(10) - \frac{30}{5}R_C - \frac{80}{5}R_C = 0$$

$$R_C\left(-\frac{30}{5} - \frac{80}{5}\right) = -60 \Rightarrow R_C(-22) = -60 \Rightarrow R_C = \frac{-60}{-22} \Rightarrow \therefore R_C = 2.7273k \nwarrow$$

$$R_{CX} = \left({}^{3}/_{5}\right)(2.7273k) = 1.6364k \leftarrow \qquad R_{CY} = \left({}^{4}/_{5}\right)(2.7273k) = 2.1818k \uparrow$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow R_{AY} - 6 + R_{CY} = 0 \Rightarrow R_{AY} - 6 + 2.1818 = 0 \Rightarrow \therefore R_{AY} = 3.8182k \uparrow$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow R_{AX} - R_{CX} = 0 R_{AX} - 1.6364 = 0 \Rightarrow \therefore R_{AX} = 1.6364k \rightarrow$$



(h)

El marco de la figura 2-5h debe seccionarse en una ocasión para la columna $A-B$ debido a que este miembro no presenta discontinuidad de carga, y en dos ocasiones para la viga $C-B$ puesto que la carga puntual aplicada a la mitad de ese claro provoca una discontinuidad en las funciones de la fuerza cortante y del momento flector en ese punto, distinguiéndose entonces dos regiones en tal miembro. Se puede establecer una coordenada x por cada región distinta, como se hizo en el ejercicio 1.4 de este libro, sin embargo, se opta por definir una sola coordenada x para cada miembro. La cola de la flecha indica el origen del sistema coordenado, mientras que la punta de la flecha indica la dirección positiva. Así, x_1 con origen en A y positiva hacia arriba, es asignada para cubrir la columna, o sea, la región $A-B$, en tanto, la coordenada x_2 cuyo origen se asocia en C y es positiva hacia la izquierda, define la viga, o lo que es lo mismo, se extiende desde C hasta B.

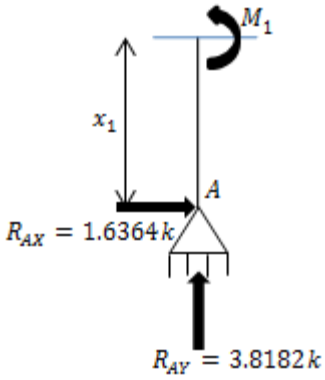
A continuación, con base en las figuras 2-5i, 2-5j y 2-5k se deducen los momentos internos M.

Miembro $A-B$.

$$0 \le x_1 \le 10'$$

$$\circlearrowright + \sum Mcorte = 0 \Rightarrow -M_1 - 1.6364(x_1) = 0$$

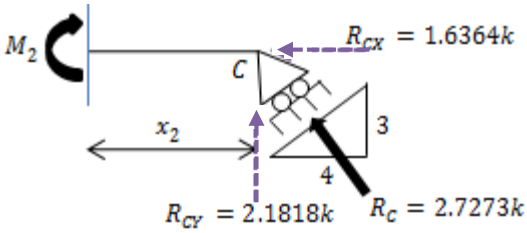
$$M_1 = -1.6364x_1$$



(i)

Miembro $C-B$.

(j)

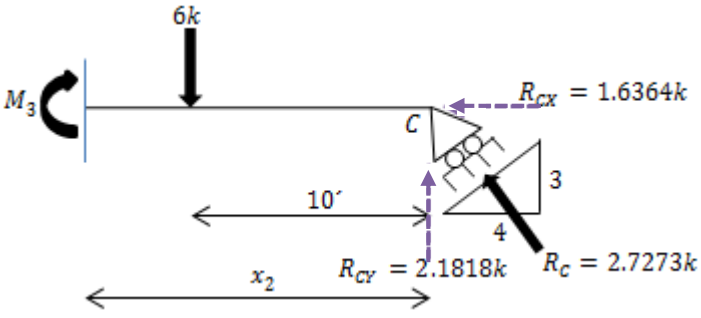


$$0 \le x_2 \le 10'$$

$$\circlearrowright + \sum Mcorte = 0$$

$$M_2 - 2.1818(x_2) = 0 \Rightarrow M_2 = 2.1818x_2$$

(k)



$$10' \le x_2 \le 20'$$

$$\circlearrowright + \sum Mcorte = 0$$

$$M_3 + 6(x_2 - 10) - 2.1818x_2 = 0$$

$$M_3 = 60 - 3.8182x_2$$

Enseguida se analiza el marco ECu_1, figura 2-5g.

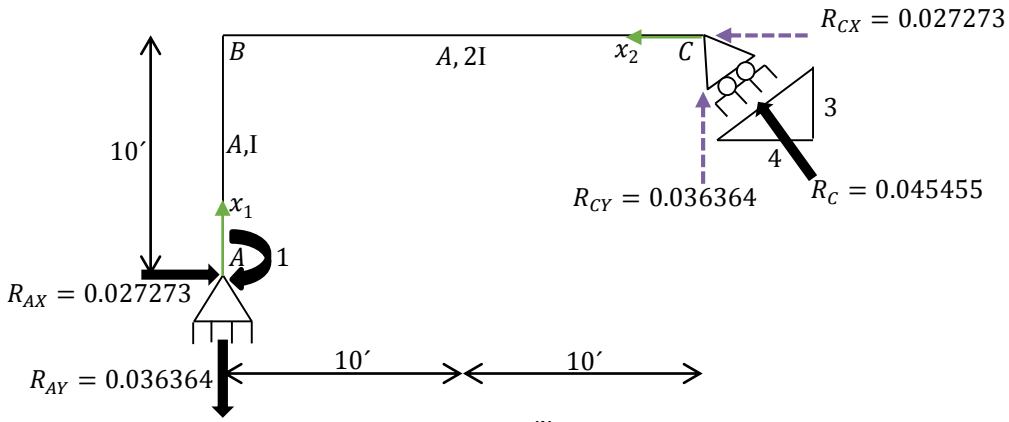
Al aplicar las ecuaciones de equilibrio en la figura 2-5l, se tiene

$$+\sum MA = 0 \Rightarrow 1 - \frac{3}{5}R_C(10) - \frac{4}{5}R_C(20) = 0 \Rightarrow\therefore R_C = 0.045455$$

$$R_{CX} = \left({}^{3}/_{5}\right)(0.045455) = 0.027273 \qquad R_{CY} = \left({}^{4}/_{5}\right)(0.045455) = 0.036364$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow -R_{AY} + R_{CY} = 0 \rightarrow -R_{AY} + 0.036364 = 0 \Rightarrow\therefore R_{AY} = 0.036364$$

$$+\longrightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow R_{AX} - R_{CX} = 0 \rightarrow R_{AX} - 0.027273 = 0 \Rightarrow\therefore R_{AX} = 0.027273$$

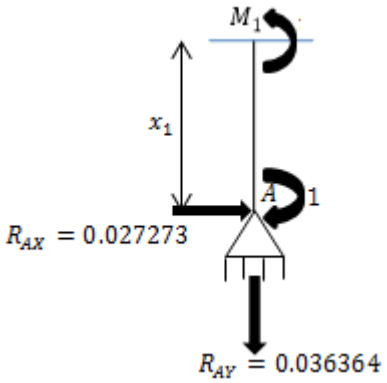


(l)

Tanto la columna como la viga no presentan discontinuidad de carga, por consiguiente un sólo corte en cada miembro es suficiente para definir el momento. Se formulan los momentos internos m a partir de las figuras 2-5m y 2-5n.

Miembro $A - B$.

(m)

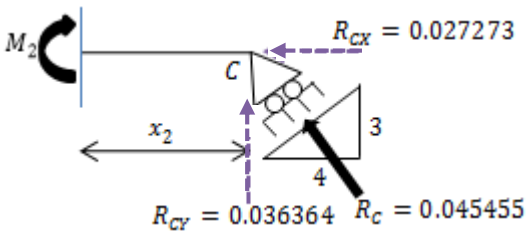


$$0 \le x_1 \le 10´$$

$$+\circlearrowleft \sum Mcorte = 0 \Rightarrow -M_1 + 1 - 0.027273(x_1) = 0$$

$$M_1 = 1 - 0.027273x_1$$

Miembro $C-B$.



(n)

$$0 \leq x_2 \leq 20'$$

$$+\circlearrowright \sum Mcorte = 0 \Rightarrow M_2 - 0.036364(x_2) = 0$$

$$M_2 = 0.036364x_2$$

Se calcula la incompatibilidad geométrica d_1.

$$d_1 = \frac{1}{EI}\left(\int_0^{10}(-1.6364x_1)(1-0.027273x_1)dx_1\right)$$

$$+\frac{1}{2EI}\left(\int_0^{10}(2.1818x_2)\,(0.036364x_2)dx_2 + \int_{10}^{20}(60-3.8182x_2)\,(0.036364x_2)dx_2\right)$$

$$= \frac{1}{EI}(-66.9435 + 13.2232 + 1.65214) = \frac{1}{EI}(-52.0682)$$

Se determina el coeficiente de flexibilidad f_{11}.

$$f_{11} = \frac{1}{EI}\left(\int_0^{10}(1-0.027273x_1)(1-0.027273x_1)dx_1\right)$$

$$+\frac{1}{2EI}\left(\int_0^{20}(0.036364x_2)\,(0.036364x_2)dx_2\right)$$

$$= \frac{1}{EI}(7.52064 + 1.76312) = \frac{1}{EI}(9.28376)$$

Cálculo de la reacción redundante

Sustituyendo los resultados precedentes en la ecuación (2), se tiene

$$\frac{1}{EI}(-52.0682) + \frac{1}{EI}(9.28376)M_A = 0 \quad ---(3)$$

Se resuelve la ecuación lineal (3).

$$M_A = \frac{52.0682}{9.28376} = 5.60852$$

Como el valor numérico de M_A es positivo, esta redundante actúa en el mismo sentido al que se muestra en la figura 2-5f.

$$\therefore\ M_A = 5.60852k.pie$$

Ecuaciones de equilibrio

Con el valor previo obtenido, las reacciones desconocidas restantes pueden determinarse directamente al efectuar el equilibrio estático en el cuerpo libre de la figura 2-5ñ.

$$+\circlearrowleft \sum MA = 0 \Rightarrow 6(10) + 5.60852 - R_{CX}(10) - R_{CY}(20) = 0$$

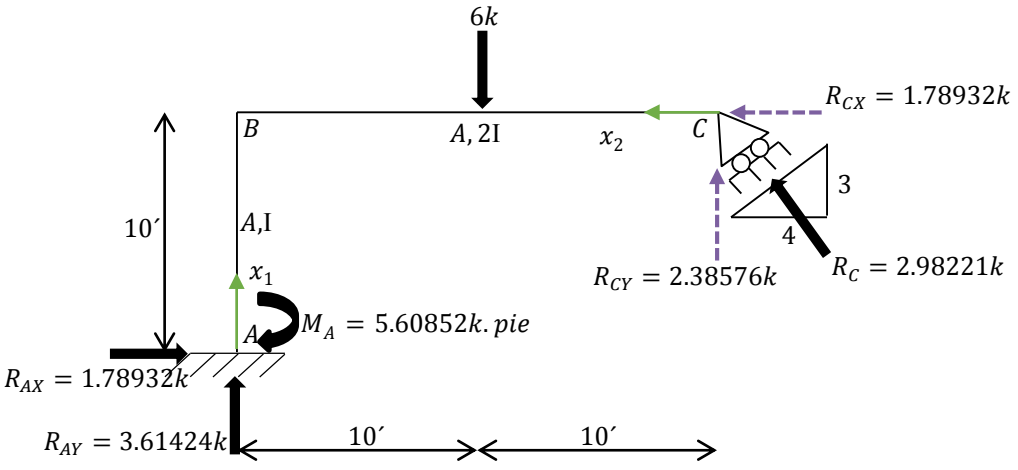
$$6(10) + 5.60852 - \frac{3}{5}R_C(10) - \frac{4}{5}R_C(20) = 0 \Rightarrow -22R_C = -65.6085$$

$$R_C = \frac{65.6085}{22} \Rightarrow\therefore R_C = 2.98221k\ \nwarrow$$

$$R_{CX} = \frac{3}{5}(2.98221k) = 1.78932k\ \leftarrow \qquad R_{CY} = \frac{4}{5}(2.98221k) = 2.38576k\ \uparrow$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow R_{AY} - 6 + R_{CY} = 0 \rightarrow R_{AY} - 6 + 2.38576 = 0 \Rightarrow\therefore R_{AY} = 3.61424k\ \uparrow$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow R_{AX} - R_{CX} = 0 \Rightarrow R_{AX} - 1.78932 = 0 \Rightarrow\therefore R_{AX} = 1.78932k\ \rightarrow$$



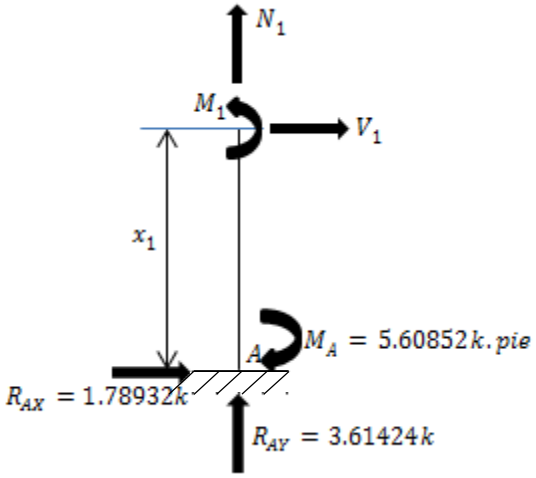
(ñ)

Funciones de momento, de fuerza cortante y de fuerza normal

Simplemente se aplica el método de secciones en el marco de la figura 2-5ñ para calcular las funciones mencionadas. Para ello, la estructura real se corta tres veces, figuras 2-5o, 2-5p y 2-5q.

Miembro $A-B$.

$$0 \leq x_1 \leq 10'$$



(o)

$$\circlearrowright + \sum Mcorte = 0 \Rightarrow M_1 = 5.60852 - 1.78932x_1$$

$$en\ x_1 = 0, M_1 = 5.60852k.ft; en\ x_1 = 10ft, M_1 = -12.2847k.ft$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow V_1 + 1.78932 = 0 \Rightarrow V_1 = -1.78932$$

$$o\ también\ V_1 = \frac{dM_1}{dx_1} = -1.78932$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow N_1 + 3.61424 = 0 \Rightarrow N_1 = -3.61424$$

Miembro $C-B$.

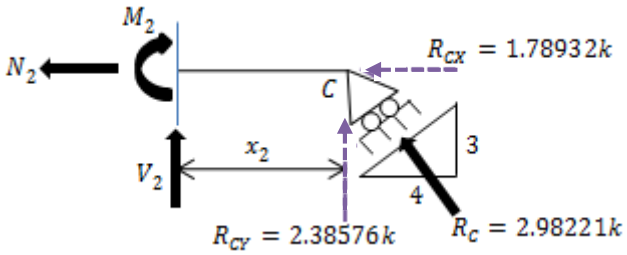
$$0 \leq x_2 \leq 10'$$

$$\circlearrowright + \sum Mcorte = 0 \Rightarrow M_2 - 2.38576x_2 = 0 \Rightarrow M_2 = 2.38576x_2$$

$$en\ x_2 = 0, M_2 = 0; en\ x_2 = 10ft, M_2 = 23.8576k.ft$$

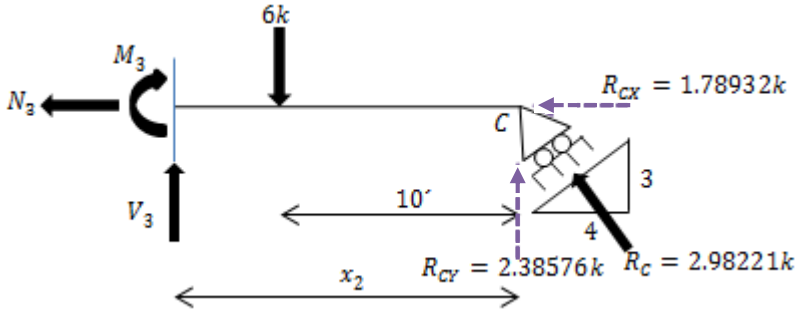
$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow V_2 + 2.38576 = 0 \Rightarrow V_2 = -2.38576 \quad o\ V_2 = -\frac{dM_2}{dx_2} = -2.38576$$

$$+\longrightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow -N_2 - 1.78932 = 0 \Rightarrow N_2 = -1.78932$$



(p)

$$10' \leq x_2 \leq 20'$$



(q)

$$+\circlearrowright \sum Mcorte = 0 \Rightarrow M_3 + 6(x_2 - 10) - 2.38576x_2 = 0 \Rightarrow M_3 = 60 - 3.61424x_2$$

$$en\ x_2 = 10, M_2 = 23.8576; en\ x_2 = 20, M_2 = -12.2848$$

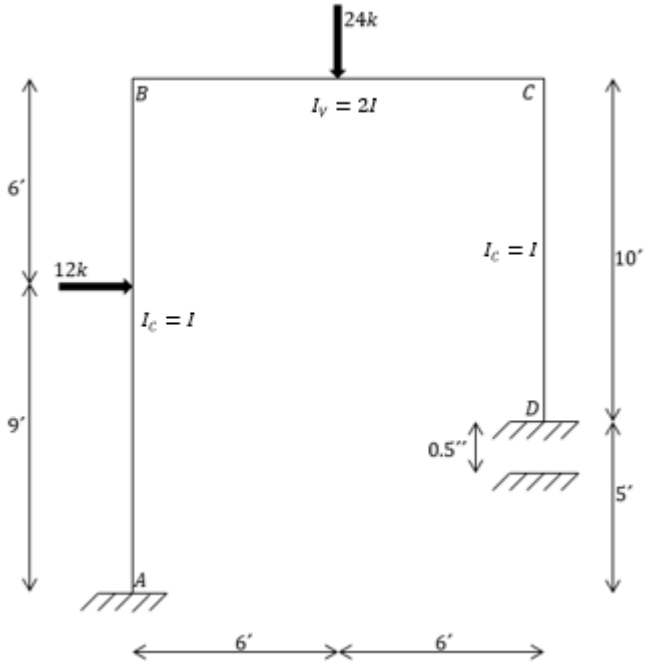
$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow V_3 + 2.38576 - 6 = 0 \Rightarrow V_3 = 3.61424 \quad o\ V_3 = -\frac{dM_3}{dx_2} = 3.61424$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow -N_3 - 1.78932 = 0 \Rightarrow N_3 = -1.78932$$

Luego, el lector puede obtener fácilmente los diagramas de fuerzas cortante V y normal N, y del momento flector M al graficar las expresiones algebraicas deducidas en cada miembro, de forma análoga a como se hizo en el pórtico isostático del ejercicio 1.4.

Ejercicio 2.6 Método de flexibilidades aplicado a un pórtico con varias redundantes y un asentamiento en un apoyo.

Instrucciones Calcule las reacciones de los apoyos de la estructura plana descrita en la figura 2-6a correspondientes a la carga y perturbación del apoyo D indicadas; esta última corresponde al asentamiento de 0.50 pulgadas que experimenta el poyo derecho. La estructura esta empotrada en los puntos A y D, el momento de inercia de la viga es el doble del momento de inercia de las columnas, el módulo de elasticidad es constante y se sugiere que se consideren únicamente las deformaciones por flexión.Utilice $E = 30000k/pulg^2; I = 200pulg^4$.



ER: Estructura real

(a)

Figura 2-6

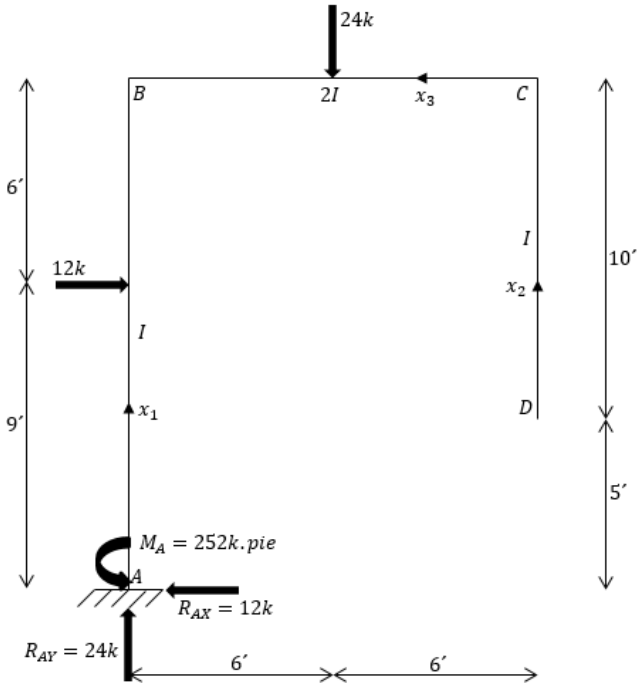
SOLUCIÓN

Verificación del grado de indeterminación

En esta estructura hay seis incógnitas de reacción, tres en cada empotramiento, es decir, $r = 6(R_{AX}; R_{AY}; M_A; R_{DX}; R_{DY}; M_D)$; debido a que no hay condiciones impuestas por la construcción, $c = 0$. Además, está conformada por $m = 3(A - B; B - C; D - C)$ miembros y el número de nodos es $j = 4(A; B; C; D)$. Como $3m + r > 3j + c$ ya que $3(3) + 6 > 3(4) + 0 \Rightarrow 15 > 12$, el marco es estáticamente indeterminado en tercer grado $(15 - 12 = 3)$.

Elección de las reacciones redundantes y planteamiento de la estructura primaria

De acuerdo al grado de hiperestaticidad, tres acciones son redundantes; por conveniencia se escogen las tres reacciones del empotramiento derecho, punto D. En consecuencia, la estructura se libera suprimiendo el empotramiento en D. Con esta modificación queda definida la estructura primaria, la cual soporta las mismas cargas externas que la estáticamente indeterminada, figura 2-6b.



EP: Estructura primaria $\Longrightarrow M$

(b)

Principio de superposición

El marco real es igual a la suma del marco liberado bajo la acción: A) de las cargas originales y B) de cada una de las reacciones redundantes por separado.

Planteamiento de las ecuaciones de compatibilidad geométrica

El asentamiento en el apoyo D es

$$-0.5pulg\left(\frac{1pie}{12pulg}\right) = -0.041667pies$$

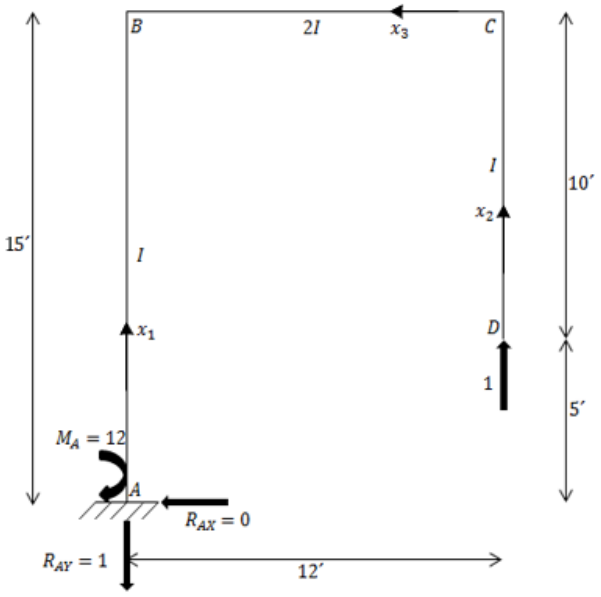
y tiene un valor negativo porque la carga unitaria correspondiente a la redundante R_{DY} se propondrá hacia arriba y ello definirá una convención de signos en la que los desplazamientos con esa dirección sean considerados positivos. De acuerdo a lo que se ha venido estableciendo en los ejercicios anteriores de flexibilidades, las incógnitas pueden calcularse directamente formulando el siguiente sistema en el que por superposición se establece una ecuación de compatibilidad para los desplazamientos vertical y horizontal, y la rotación, todos en D, en ese orden.

$$d_1 + f_{11}R_{DY} + f_{12}R_{DX} + f_{13}M_D = -0.041667 - - - (1)$$

$$d_2 + f_{21}R_{DY} + f_{22}R_{DX} + f_{23}M_D = 0 - - - (2)$$

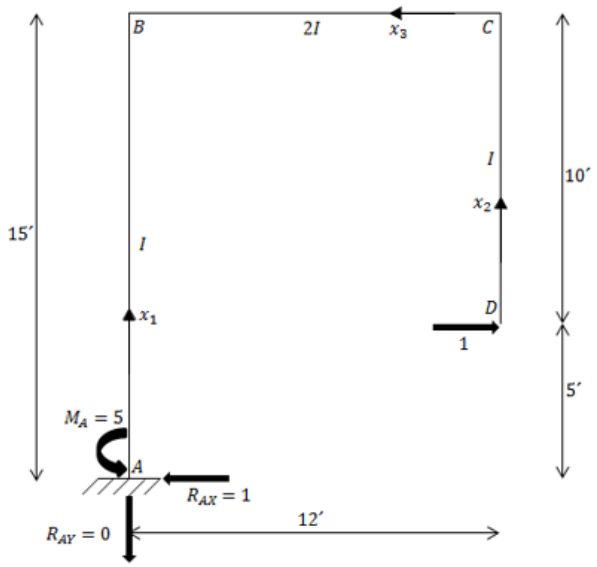
$$d_3 + f_{31}R_{DY} + f_{32}R_{DX} + f_{33}M_D = 0 - - - (3)$$

Para el cálculo directo de los coeficientes de flexibilidad f_{ij} se analizará la estructura liberada bajo la acción individual de una unidad de cada reacción redundante, figuras 2-6c, 2-6d y 2-6e.



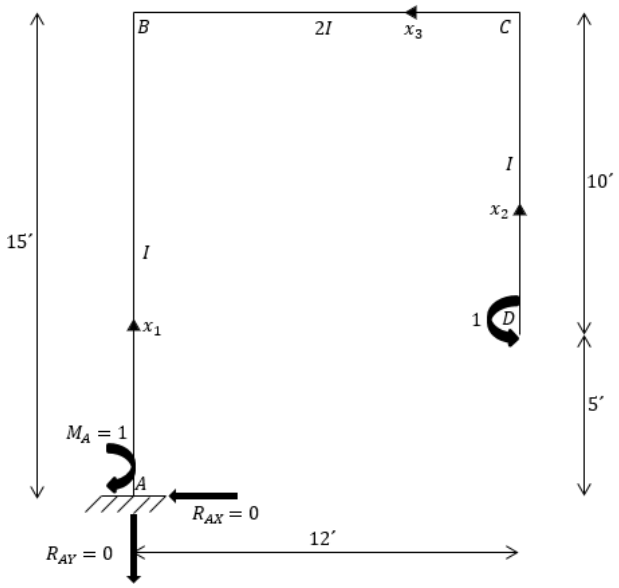
ECu_1: Estructura liberada con fuerza vertical unitaria aplicada en $D \Longrightarrow m_1$

(c)



ECu_2: Estructura liberada con fuerza horizontal unitaria aplicada en $D \Longrightarrow m_2$

(d)



ECu_3: Estructura liberada con momento puntual unitario aplicado en $D \Longrightarrow m_3$

(e)

Cálculo de las incompatibilidades geométricas y de los coeficientes de flexibilidad

En particular, debe calcularse el desplazamiento que experimenta el punto D en la dirección de la línea de acción de las reacciones redundantes en cada caso de carga de la estructura liberada. Se aplicará el método del trabajo virtual para calcular los desplazamientos y las pendientes.

$$d_1 = \delta_{VD_{EP}} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mm_1}{EI}\,dx\,;\, d_2 = \Delta_{HD_{EP}} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mm_2}{EI}\,dx\,;\, d_3 = \theta_{D_{EP}} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mm_3}{EI}\,dx$$

$$f_{11} = \delta_{VD_{ECu_1}} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{m_1 m_1}{EI}\,dx\,;\, f_{21} = \Delta_{HD_{ECu_1}} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{m_1 m_2}{EI}\,dx\,;\, f_{31} = \theta_{D_{ECu_1}} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{m_1 m_3}{EI}\,dx$$

$$f_{12} = \delta_{VD_{ECu_2}} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{m_2 m_1}{EI}\,dx\,;\, f_{22} = \Delta_{HD_{ECu_2}} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{m_2 m_2}{EI}\,dx\,;\, f_{32} = \theta_{D_{ECu_2}} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{m_2 m_3}{EI}\,dx$$

$$f_{13} = \delta_{VD_{ECu_3}} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{m_3 m_1}{EI}\,dx\,;\, f_{23} = \Delta_{HD_{ECu_3}} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{m_3 m_2}{EI}\,dx\,;\, f_{33} = \theta_{D_{ECu_3}} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{m_3 m_3}{EI}\,dx$$

Se considerará el Teorema de Maxwell de los desplazamientos recíprocos para establecer que $f_{ij} = f_{ji}$.

Al calcular los momentos internos, se usarán las coordenadas x_1, x_2 y x_3 que se observan en las figuras precedentes, pero el lector puede usar otras que sean válidas para cubrir todas las regiones de cada miembro del marco.

Marco EP, figura 2-6b.

Las reacciones en los soportes son

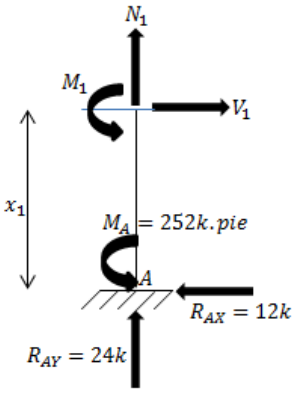
$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow 12 - R_{AX} = 0 \Rightarrow \therefore R_{AX} = 12k \leftarrow$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow R_{AY} - 24 = 0 \Rightarrow \therefore R_{AY} = 24k \uparrow$$

$$\circlearrowleft + \sum MA = 0 \Rightarrow 24(6) + 12(9) - M_A = 0 \Rightarrow \therefore M_A = 252k.pie \circlearrowright$$

Se deducen los momentos internos M, figuras 2-6f hasta 2-6j.

Miembro $A-B$.



(f)

$$0 \le x_1 \le 9'$$

$$+\circlearrowleft \sum Mcorte = 0$$

$$-M_1 + 12(x_1) - 252 = 0$$

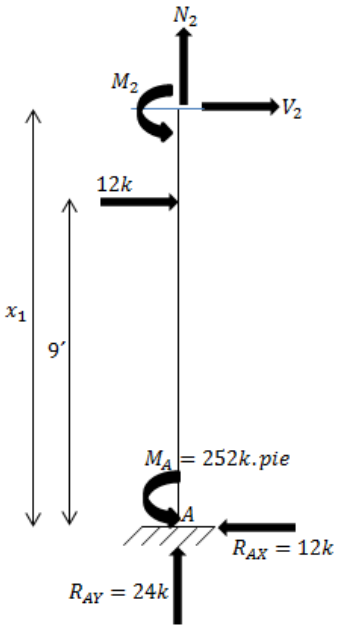
$$M_1 = 12x_1 - 252$$

$$9' \le x_1 \le 15'$$

$$+\circlearrowleft \sum Mcorte = 0$$

$$-M_2 + 12(x_1) - 12(x_1 - 9) - 252 = 0$$

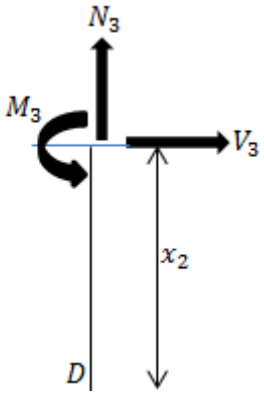
$$M_2 = 12x_1 - 12(x_1 - 9) - 252 = -144$$



(g)

Miembro $D-C$.

(h)



$$0 \le x_2 \le 10'$$

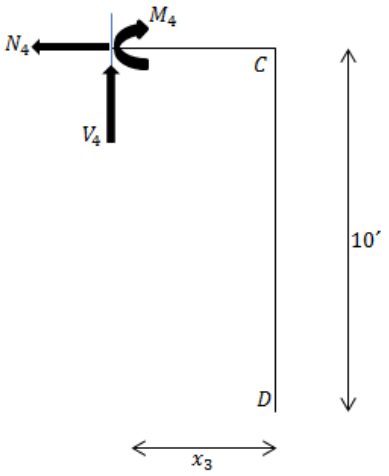
$$+\circlearrowleft \sum Mcorte = 0 \Rightarrow M_3 = 0$$

Miembro $C-B$.

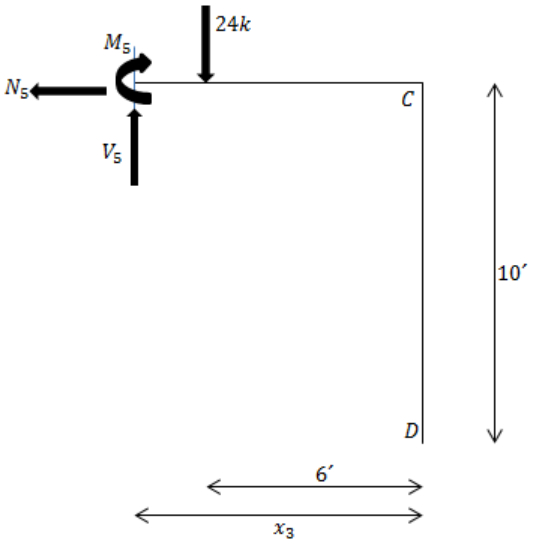
$0 \leq x_3 \leq 6'$

$+\circlearrowright \sum Mcorte = 0$

$M_4 = 0$



(i)



(j)

$6' \leq x_3 \leq 12'$

$+\circlearrowright \sum Mcorte = 0$

$M_5 + 24(x_3 - 6) = 0$

$M_5 = 144 - 24x_3$

Marco ECu_1, figura 2-6c.

Las reacciones en los soportes son

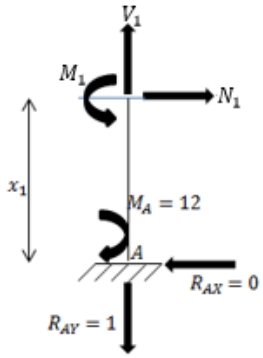
$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow \therefore R_{AX} = 0$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow -R_{AY} + 1 = 0 \Rightarrow \therefore R_{AY} = 1\downarrow$$

$$+\circlearrowright \sum MA = 0 \Rightarrow M_A - 1(12) = 0 \Rightarrow \therefore M_A = 12\circlearrowright$$

A partir de las figuras 2-6k, 2-6l y 2-6m, se determinan los momentos internos m_1.

Miembro $A-B$.

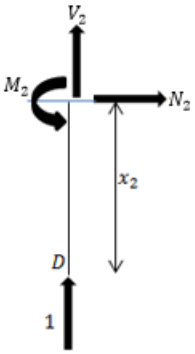


(k)

$0 \le x_1 \le 15'$

$+\circlearrowleft \sum Mcorte = 0 \Rightarrow M_1 = 12$

Miembro $D-C$.

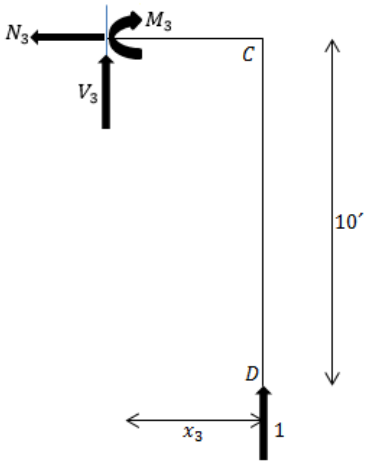


(l)

$0 \le x_2 \le 10'$

$+\circlearrowleft \sum Mcorte = 0 \Rightarrow M_2 = 0$

Miembro $C-B$.



(m)

$0 \le x_3 \le 12'$

$+\circlearrowleft \sum Mcorte = 0$

$M_3 - 1(x_3) = 0 \Rightarrow M_3 = x_3$

Marco ECu_2, figura 2-6d.

Las reacciones en los soportes son

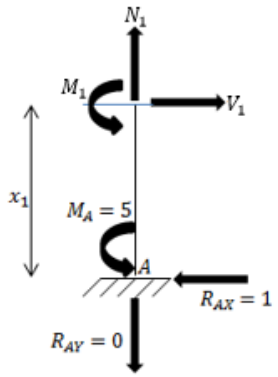
$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow -R_{AX} + 1 = 0 \Rightarrow \therefore R_{AX} = 1 \leftarrow$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow \therefore R_{AY} = 0$$

$$+\circlearrowleft \sum MA = 0 \Rightarrow -M_A + 1(5) = 0 \Rightarrow \therefore M_A = 5 \circlearrowleft$$

Con base en las figuras 2-6n, 2-6ñ y 2-6o, se formulan los momentos internos m_2.

(n)



Miembro $A - B$.

$0 \leq x_1 \leq 15'$

$$+\circlearrowleft \sum Mcorte = 0$$

$$-M_1 + 1(x_1) - 5 = 0 \Rightarrow M_1 = x_1 - 5$$

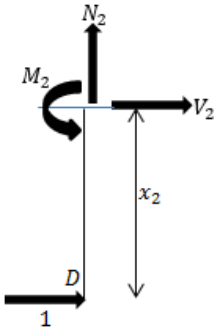
Miembro $D - C$.

$0 \leq x_2 \leq 10'$

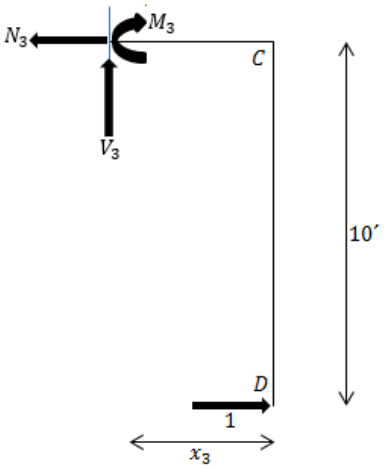
$$+\circlearrowleft \sum Mcorte = 0$$

$$-M_2 - 1(x_2) = 0 \Rightarrow M_2 = -x_2$$

(ñ)



(o)



Miembro $C - B$.

$0 \leq x_3 \leq 12'$

$$+\circlearrowleft \sum Mcorte = 0$$

$$M_3 - 1(10) = 0 \Rightarrow M_3 = 10$$

Marco ECu_3, figura 2-6e.

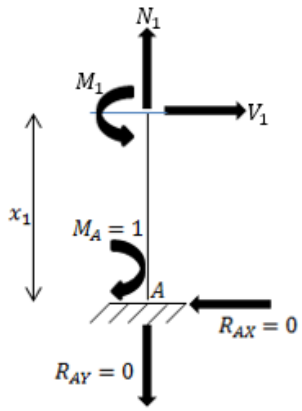
Las reacciones en los soportes son

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow \therefore R_{AX} = 0 \qquad +\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow \therefore R_{AY} = 0$$

$$\circlearrowleft + \sum MA = 0 \Rightarrow M_A - 1 = 0 \Rightarrow \therefore M_A = 1 \circlearrowright$$

Se determinan los momentos internos m_3 empleando las figuras 2-6p, 2-6q y 2-6r.

(p)



Miembro $A - B$.

$$\circlearrowleft 0 \leq x_1 \leq 15´$$

$$+ \sum Mcorte = 0$$

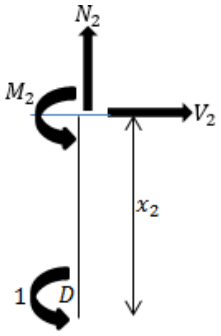
$$-M_1 + 1 = 0 \Rightarrow M_1 = 1$$

Miembro $D - C$.

$$0 \leq x_2 \leq 10´$$

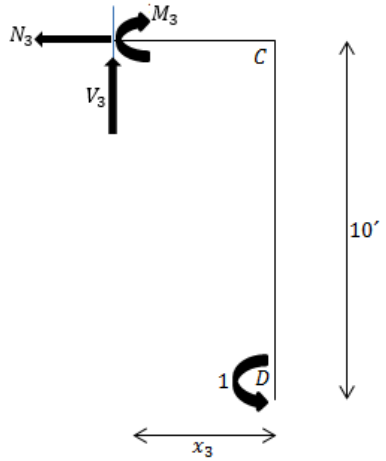
$$\circlearrowleft + \sum Mcorte = 0$$

$$-M_2 - 1 = 0 \Rightarrow M_2 = -1$$



(q)

(r)



Miembro $C - B$.

$$0 \leq x_3 \leq 12´$$

$$\circlearrowleft + \sum Mcorte = 0$$

$$M_3 - 1 = 0 \Rightarrow M_3 = 1$$

De acuerdo a los datos, para las columnas se tiene que

$$EI_C = EI = (30000k/pulg^2)(200pulg^4) = 6000000k \cdot pulg^2 \left(\frac{(1pie)^2}{(12pulg)^2}\right)$$
$$= 41666.6667k \cdot pie^2$$

mientras que para la viga tenemos

$$EI_V = E(2I) = 2EI = 2(41666.6667k \cdot pie^2) = 83333.3333k \cdot pie^2$$

Se muestra el cálculo de las incompatibilidades geométricas.

$$d_1 = \frac{1}{41666.6667}\left(\int_0^9 (12x_1 - 252)(12)\,dx_1 + \int_9^{15} (-144)(12)\,dx_1\right) +$$
$$\frac{1}{41666.6667}\left(\int_0^{10} (0)(0)\,dx_2\right) +$$
$$\frac{1}{83333.3333}\left(\int_0^6 (0)(x_3)\,dx_3 + \int_6^{12} (144 - 24x_3)(x_3)\,dx_3\right) = -0.813888pies$$

$$d_2 = \frac{1}{41666.6667}\left(\int_0^9 (12x_1 - 252)(x_1 - 5)\,dx_1 + \int_9^{15} (-144)(x_1 - 5)\,dx_1\right) +$$
$$\frac{1}{41666.6667}\left(\int_0^{10} (0)(-x_2)\,dx_2\right) +$$
$$\frac{1}{83333.3333}\left(\int_0^6 (0)(10)\,dx_3 + \int_6^{12} (144 - 24x_3)(10)\,dx_3\right) = -0.158112pies$$

$$d_3 = \frac{1}{41666.6667}\left(\int_0^9 (12x_1 - 252)(1)\,dx_1 + \int_9^{15} (-144)(1)\,dx_1\right) +$$
$$\frac{1}{41666.6667}\left(\int_0^{10} (0)(-1)\,dx_2\right) +$$
$$\frac{1}{83333.3333}\left(\int_0^6 (0)(1)\,dx_3 + \int_6^{12} (144 - 24x_3)(1)\,dx_3\right) = -0.068688rad$$

Se presenta el cálculo de los coeficientes de flexibilidad.

$$f_{11} = \frac{1}{41666.6667}\left(\int_0^{15} (12)(12)\,dx_1\right) + \frac{1}{41666.6667}\left(\int_0^{10} (0)(0)\,dx_2\right) +$$

$$\frac{1}{83333.3333}\left(\int_0^{12}(x_3)(x_3)\,dx_3\right)=0.058752pies$$

$$f_{21}=\frac{1}{41666.6667}\left(\int_0^{15}(12)(x_1-5)\,dx_1\right)+\frac{1}{41666.6667}\left(\int_0^{10}(0)(-x_2)\,dx_2\right)+$$

$$\frac{1}{83333.3333}\left(\int_0^{12}(x_3)(10)\,dx_3\right)=0.01944pies$$

$$f_{31}=\frac{1}{41666.6667}\left(\int_0^{15}(12)(1)\,dx_1\right)+\frac{1}{41666.6667}\left(\int_0^{10}(0)(-1)\,dx_2\right)+$$

$$\frac{1}{83333.3333}\left(\int_0^{12}(x_3)(1)\,dx_3\right)=0.005184rad$$

$$f_{12}=f_{21}=0.01944pies$$

$$f_{22}=\frac{1}{41666.6667}\left(\int_0^{15}(x_1-5)(x_1-5)\,dx_1\right)+\frac{1}{41666.6667}\left(\int_0^{10}(-x_2)(-x_2)\,dx_2\right)+$$

$$\frac{1}{83333.3333}\left(\int_0^{12}(10)(10)\,dx_3\right)=0.0314pies$$

$$f_{32}=\frac{1}{41666.6667}\left(\int_0^{15}(x_1-5)(1)\,dx_1\right)+\frac{1}{41666.6667}\left(\int_0^{10}(-x_2)(-1)\,dx_2\right)+$$

$$\frac{1}{83333.3333}\left(\int_0^{12}(10)(1)\,dx_3\right)=0.00354rad$$

$$f_{13}=f_{31}=0.005184pies$$

$$f_{23}=f_{32}=0.00354pies$$

$$f_{33}=\frac{1}{41666.6667}\left(\int_0^{15}(1)(1)\,dx_1\right)+\frac{1}{41666.6667}\left(\int_0^{10}(-1)(-1)\,dx_2\right)+$$

$$\frac{1}{83333.3333}\left(\int_0^{12}(1)(1)\,dx_3\right)=0.000744rad$$

Cálculo de las reacciones redundantes

Sustituyendo los resultados en las ecuaciones $(1),(2),(3)$ da

$$-0.813888+0.058752R_{DY}+0.01944R_{DX}+0.005184M_D=-0.041667---(4)$$

$$-0.158112 + 0.01944R_{DY} + 0.0314R_{DX} + 0.00354M_D = 0 - - - (5)$$

$$-0.068688 + 0.005184R_{DY} + 0.00354R_{DX} + 0.000744M_D = 0 - - - (6)$$

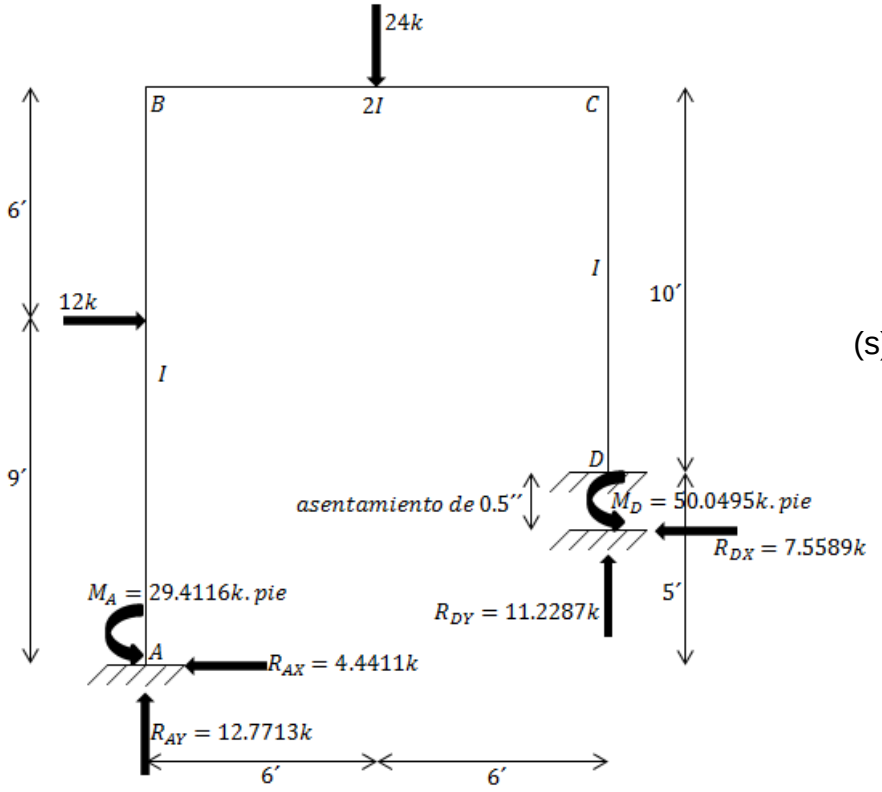
Resolviendo el sistema resulta

$$R_{DY} = 11.2287, R_{DX} = -7.5589, M_D = 50.0495$$

$$\therefore \quad R_{DY} = 11.2287k \uparrow \qquad R_{DX} = 7.5589k \leftarrow \qquad M_D = 50.0495k \cdot pie \circlearrowright$$

Ecuaciones de equilibrio

Con los resultados obtenidos se dibuja un diagrama de cuerpo libre y al aplicar las ecuaciones de equilibrio se obtienen las fuerzas reactivas restantes, figura 2-6s.



(s)

$$\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow 12 - 7.5589 - R_{AX} = 0 \Rightarrow \therefore R_{AX} = 4.4411k \leftarrow$$

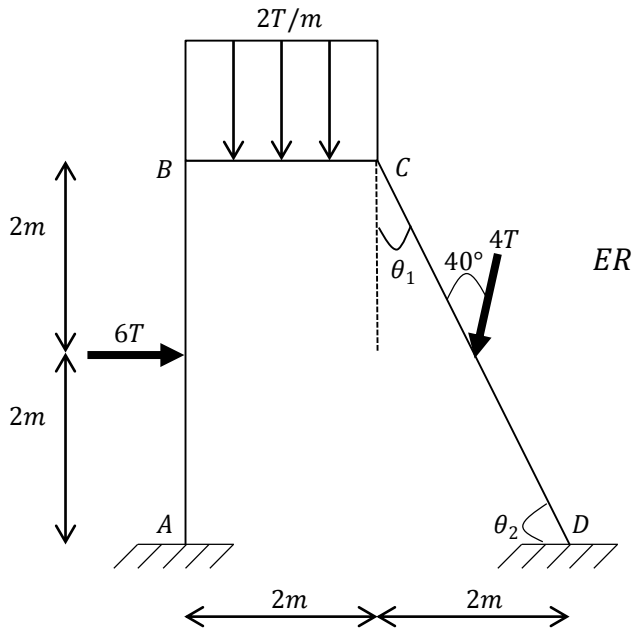
$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow -24 + 11.2287 + R_{AY} = 0 \Rightarrow \therefore R_{AY} = 12.7713k \uparrow$$

$$+\circlearrowright \sum MA = 0 \Rightarrow 12(9) + 24(6) - 7.5589(5) - 11.2287(12) - 50.0495 - M_A = 0$$

$$\therefore M_A = 29.4116k \cdot pie \circlearrowright$$

Ejercicio 2.7 Método de flexibilidades aplicado a un marco con una columna inclinada.

Instrucciones Calcule las reacciones en los empotramientos A y D del marco mostrado en la figura 2-7a. Suponga que EI es constante.



ER: Estructura real

(a)

Figura 2-7

SOLUCIÓN

Verificación del grado de indeterminación

Para el marco que se muestra en la figura 2-7a, el número de nodos es $j = 4(A; B; C; D)$ y no hay condiciones impuestas por la construcción, es decir, $c = 0$. La cantidad de miembros es $m = 3(A - B; B - C; D - C)$. En cada empotramiento hay tres incógnitas de reacción, una horizontal, una vertical y un momento, por lo que $r = 6(R_{AX}; R_{AY}; M_A; R_{DX}; R_{DY}; M_D)$.

Como $3m + r > 3j + c$ ya que $3(3) + 6 > 3(4) + 0 \Rightarrow 15 > 12$, el marco es estáticamente indeterminado de grado tres $(15 - 12 = 3)$.

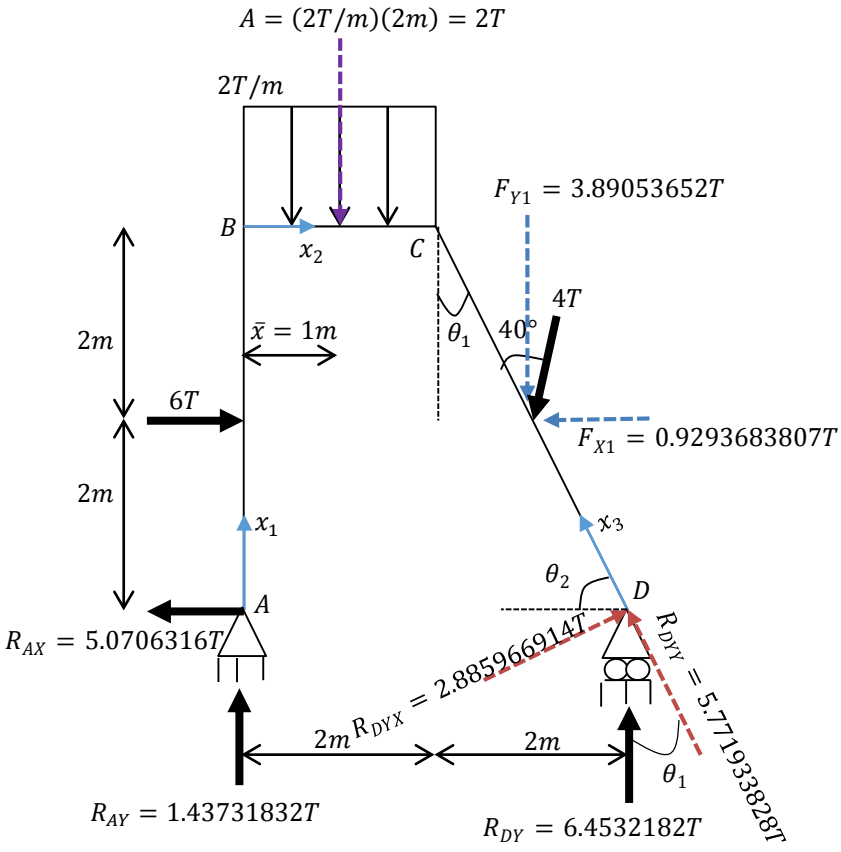
Elección de las reacciones redundantes y planteamiento de la estructura primaria

Seleccionaremos a M_A, R_{DX} y M_D como redundantes. En consecuencia, para idealizar la estructura primaria, figura 2-7b, se ha eliminado la capacidad del marco para soportar un momento en A al reemplazar el empotramiento por un apoyo

articulado (pasador) que es incapaz de restringir A en la rotación. Además, R_{DX} y M_D se han suprimido al sustituir en D el empotramiento por un rodillo, y con ello lograr que en ese punto se produzca un desplazamiento horizontal y una rotación. Obsérvese que quizá una manera más sencilla de resolver el problema sería eliminando alguno de los dos empotramientos.

Principio de superposición

El marco real es igual a la suma de la estructura liberada sometida a: A) las cargas originales y B) la acción individual de cada una de las reacciones redundantes.



EP: Estructura primaria $\Longrightarrow M$

(b)

Planteamiento de las ecuaciones de compatibilidad geométrica

En el marco real, el empotramiento en A impide el giro en ese punto y el empotramiento derecho hace que D no experimente desplazamiento lateral ni rotación, así que $\theta_{A_{ER}}, \Delta_{HD_{ER}}$ y $\theta_{D_{MR}}$ son nulos; con base en lo que se viene

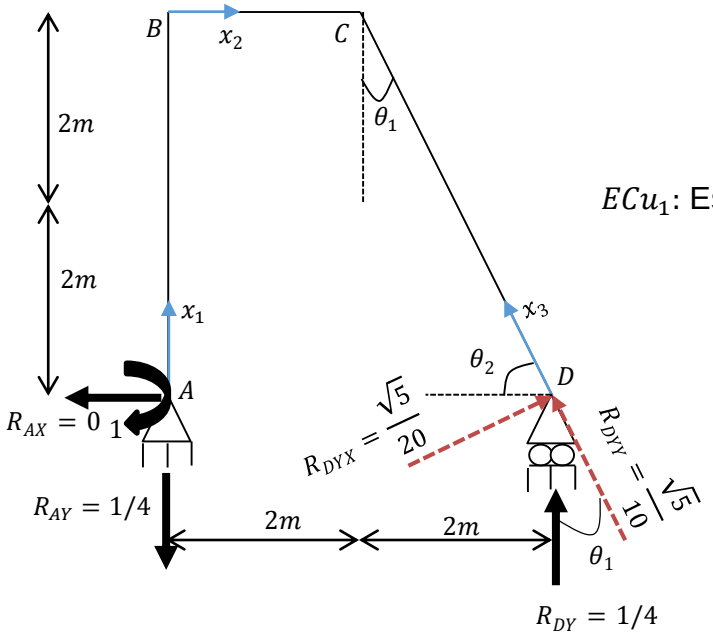
estableciendo para el método de las fuerzas, es posible escribir el sistema de ecuaciones de compatibilidad para la pendiente en A, el desplazamiento horizontal en D y la pendiente en D, respectivamente, en términos de las incógnitas M_A, R_{DX} y M_D como

$$d_1 + f_{11}M_A + f_{12}R_{DX} + f_{13}M_D = 0 - - - (1)$$

$$d_2 + f_{21}M_A + f_{22}R_{DX} + f_{23}M_D = 0 - - - (2)$$

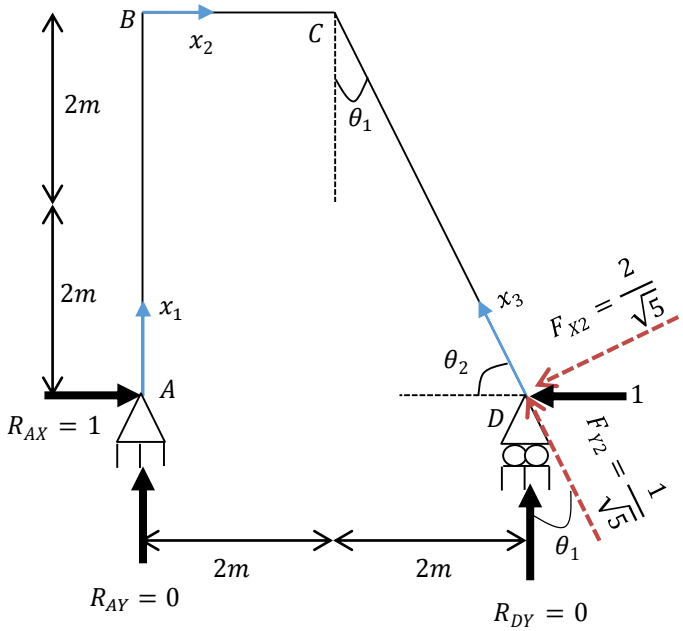
$$d_3 + f_{31}M_A + f_{32}R_{DX} + f_{33}M_D = 0 - - - (3)$$

Para calcular directamente los coeficientes de flexibilidad f_{ij} la estructura liberada debe analizarse bajo la acción individual de una unidad de cada una de las reacciones redundantes, figuras 2-7c, 2-7d y 2-7e.



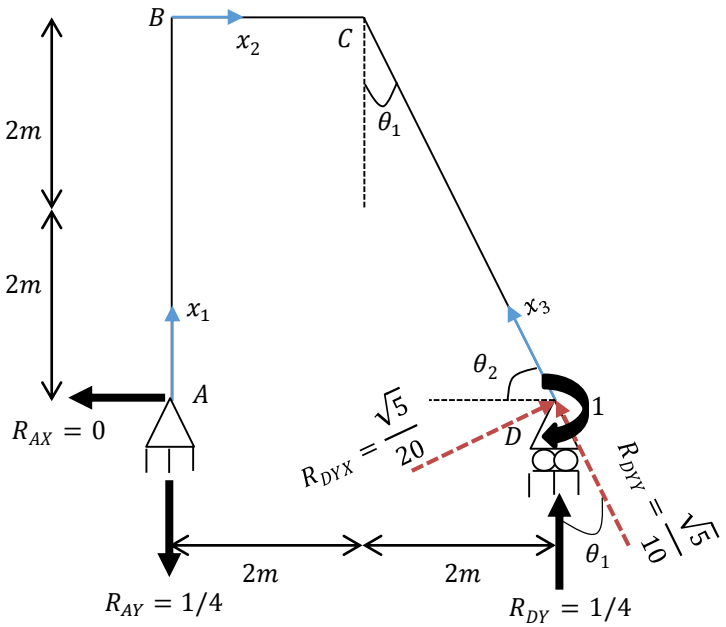
ECu_1: Estructura liberada con momento puntual unitario aplicado en $A \Longrightarrow m_1$

(c)



ECu_2: Estructura liberada con fuerza horizontal unitaria aplicada en $D \Longrightarrow m_2$

(d)



ECu_3: Estructura liberada con momento puntual unitario aplicado en $D \Longrightarrow m_3$

(e)

Cálculo de las incompatibilidades geométricas y de los coeficientes de flexibilidad

En resumen, en los marcos mostrados en las figuras 2-7b hasta 2-7e es necesario determinar los valores de la pendiente en A ya que M_A (momento en el empotre del punto A) fue suprimido, del desplazamiento horizontal en D dado que R_{DX} (fuerza reactiva horizontal en el empotre del punto D) fue eliminada y de la pendiente en D debido a que M_D (momento en el empotre del punto D) es también redundante. A continuación se muestra el orden con el que se calcularán los desplazamientos y los giros empleando el método del trabajo virtual considerando únicamente las deformaciones debidas a la flexión.

$$d_1 = \theta_{A_{EP}} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mm_1}{EI}\,dx\,;\, d_2 = \Delta_{HD_{EP}} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mm_2}{EI}\,dx\,;\, d_3 = \theta_{D_{EP}} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mm_3}{EI}\,dx$$

$$f_{11} = \theta_{A_{ECu_1}} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{m_1 m_1}{EI}\,dx\,;\, f_{21} = \Delta_{HD_{ECu_1}} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{m_1 m_2}{EI}\,dx\,;\, f_{31} = \theta_{D_{ECu_1}} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{m_1 m_3}{EI}\,dx$$

$$f_{12}=\theta_{AECu_2}=\int_{L_1}^{L_2}\frac{m_2m_1}{EI}dx\,;f_{22}=\Delta_{HDECu_2}=\int_{L_1}^{L_2}\frac{m_2m_2}{EI}dx\,;f_{32}=\theta_{DECu_2}=\int_{L_1}^{L_2}\frac{m_2m_3}{EI}dx$$

$$f_{13}=\theta_{AECu_3}=\int_{L_1}^{L_2}\frac{m_3m_1}{EI}dx\,;f_{23}=\Delta_{HDECu_3}=\int_{L_1}^{L_2}\frac{m_3m_2}{EI}dx\,;f_{33}=\theta_{DECu_3}=\int_{L_1}^{L_2}\frac{m_3m_3}{EI}dx$$

Sin embargo, varios de estos coeficientes de deducirán directamente al hacer uso del Teorema de Maxwell de los desplazamientos recíprocos que establece que $f_{ij}=f_{ji}$.

Se procede a Analizar el marco EP, figura 2-7b.

Con base en la figura 2-7f, la longitud de la columna inclinada es

$$L_{D-C}=\sqrt{(4m)^2+(2m)^2}=2\sqrt{5}m$$

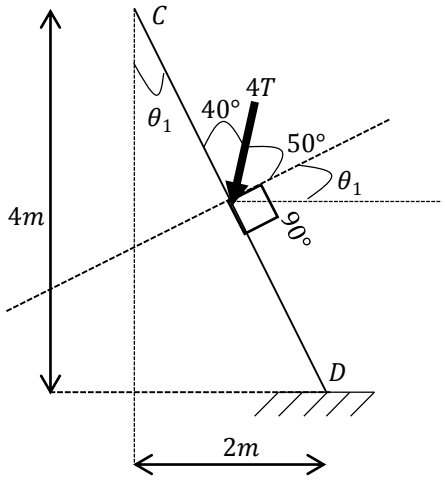
Por lo tanto,

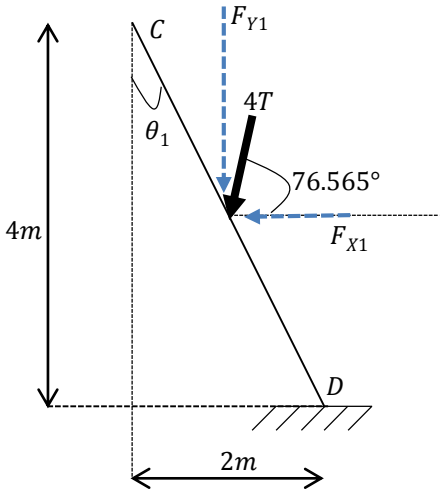
$$sin\theta_1=\frac{2}{2\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}};cos\theta_1=\frac{4}{2\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\theta_1=\tan^{-1}\left(\frac{2}{4}\right)=26.565°$$

Se resuelve la fuerza de $4T$ en sus componentes horizontal y vertical, figura 2-7g.

(f)





(g)

$$F_{Y1}=4\,\mathrm{T}\sin(76.565°)=3.89053652T$$

$$F_{X1}=4\,\mathrm{T}\cos(76.565°)=0.9293683807T$$

Las reacciones en los soportes son

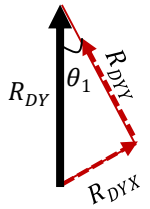
$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow 6T - 0.9293683807T - R_{AX} = 0 \Rightarrow \therefore R_{AX} = 5.0706316T \leftarrow$$

$$+\circlearrowright \sum MA = 0 \Rightarrow 6(2) + (4)(1) + 3.89053652(3) - 0.9293683807(2) - R_{DY}(4) = 0$$

$$\therefore R_{DY} = 6.4532182T \uparrow$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow R_{AY} - 4 - 3.89053652 + 6.4532182 = 0 \Rightarrow \therefore R_{AY} = 1.43731832T \uparrow$$

Para los marcos isostáticos mostrados previamente, la descomposición de R_{DY}, figura 2-7h, siempre vendrá dada por



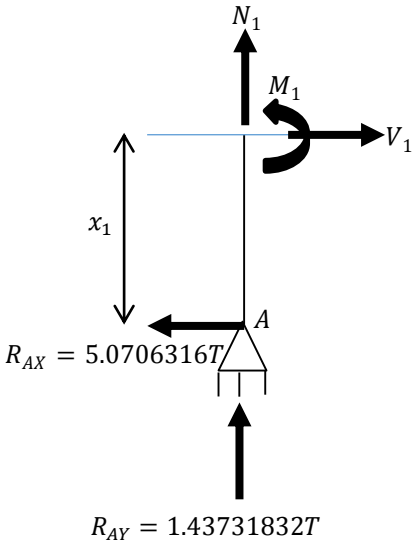
(h)

$$R_{DYX} = R_{DY} \cdot \sin\theta_1$$

$$R_{DYY} = R_{DY} \cdot \cos\theta_1$$

Se formulan los momentos internos M, figuras 2-7i hasta 2-7m.

Miembro $A - B$.



(i)

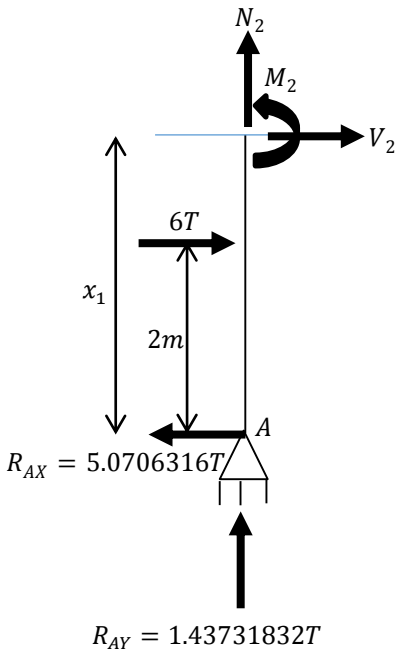
$$0 \leq x_1 \leq 2m$$

$$+\circlearrowright \sum M\,corte = 0$$

$$-M_1 + 5.0706316(x_1) = 0$$

$$M_1 = 5.0706316x_1$$

(j)



$$2m \leq x_1 \leq 4m$$

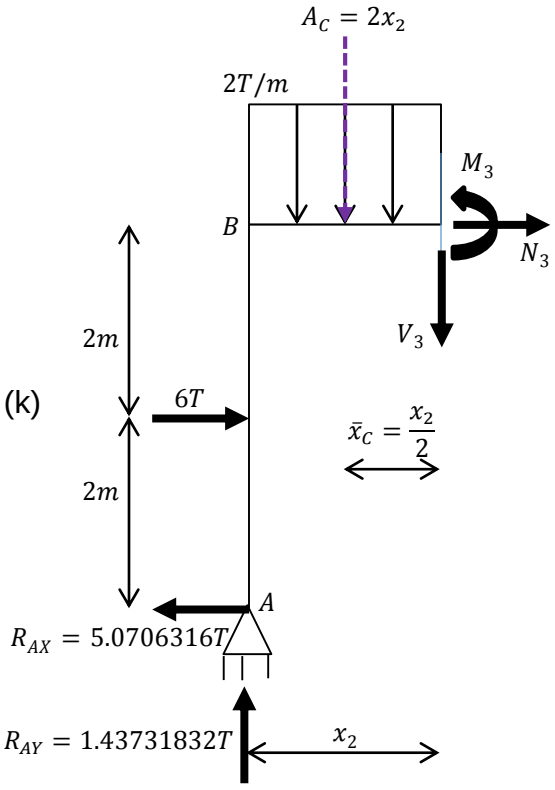
$$\circlearrowright + \sum M\ corte = 0$$

$$-M_2 + 5.0706316(x_1) - 6(x_1 - 2) = 0$$

$$M_2 = 12 - 0.9293683x_1$$

Miembro $B - C$.

(k)



$$0 \leq x_2 \leq 2m$$

$$\circlearrowright + \sum M\ corte = 0$$

$$-M_3 + 1.43731832(x_2) + 5.0706316(4)$$

$$-6(2) - 2(x_2)\left(\frac{x_2}{2}\right) = 0$$

$$M_3 = -x_2^2 + 1.43731832x_2 + 8.282526$$

Miembro $D - C$.

$$R_{DYX} = 6.4532182T \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = 2.885966914T$$

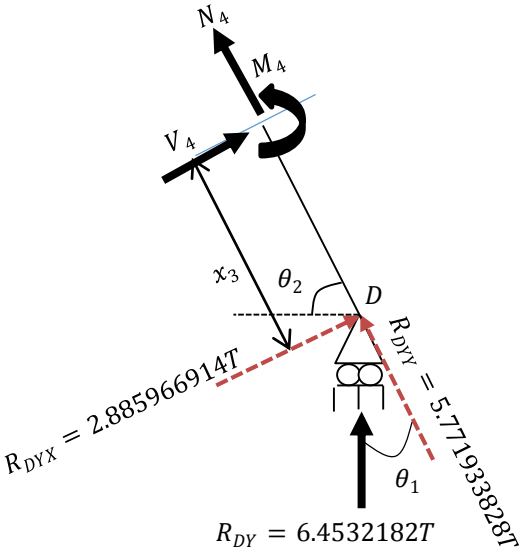
$$R_{DYY} = 6.4532182T \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = 5.771933828T$$

$$0 \leq x_3 \leq \sqrt{5}m$$

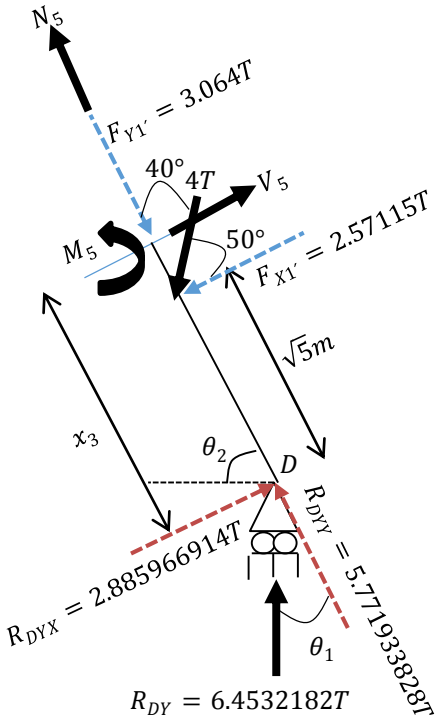
$$\circlearrowleft + \sum M\ corte = 0$$

$$-M_4 - 2.885966914(x_3) = 0$$

$$M_4 = -2.885966914x_3$$



(l)



(m)

$$\sqrt{5}m \leq x_3 \leq 2\sqrt{5}m$$

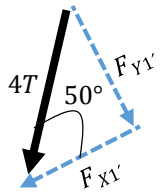
$$\circlearrowleft + \sum M\ corte = 0$$

$$-M_5 - 2.885966914(x_3) + 2.571150439\left(x_3 - \sqrt{5}\right) = 0$$

$$M_5 = -0.314816475x_3 - 5.749267162$$

Para calcular M_5, fue necesario resolver la fuerza de $4T$ en sus componentes paralela y perpendicular al eje del miembro inclinado, figura 2-7n.

(n)



$$F_{Y1}{}' = 4(\sin 50°) = 3.064177772T$$

$$F_{X1}{}' = 4(\cos 50°) = 2.571150439T$$

Se analiza el marco isostático ECu_1, figura 2-7c.

Las reacciones en los soportes son

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow R_{AX} = 0$$

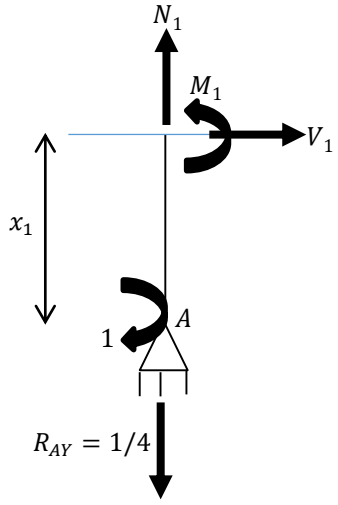
$$+\circlearrowright \sum MA = 0 \Rightarrow 1 - R_{DY}(4) = 0 \Rightarrow \therefore R_{DY} = \frac{1}{4}\uparrow$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow -R_{AY} + \frac{1}{4} \Rightarrow \therefore R_{AY} = \frac{1}{4}\downarrow$$

Se deducen los momentos internos m_1, figuras 2-7ñ, 2-7o y 2-7p.

Miembro $A - B$.

(ñ)



$$0 \leq x_1 \leq 4m$$

$$+\circlearrowright \sum M\ corte = 0$$

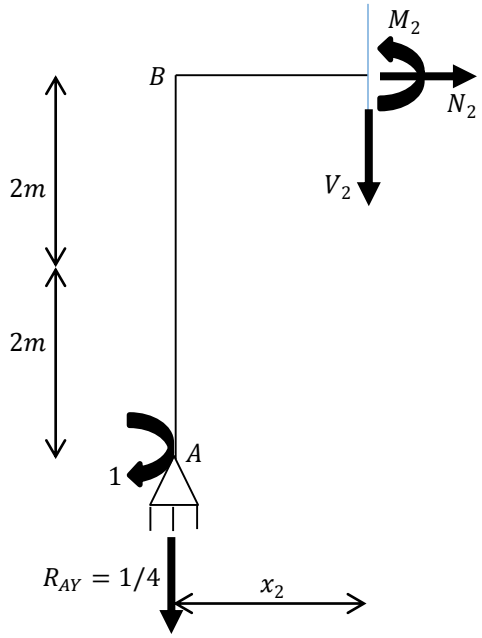
$$1 - M_1 = 0 \Rightarrow M_1 = 1$$

Miembro $B - C$.

$$0 \leq x_2 \leq 2m$$

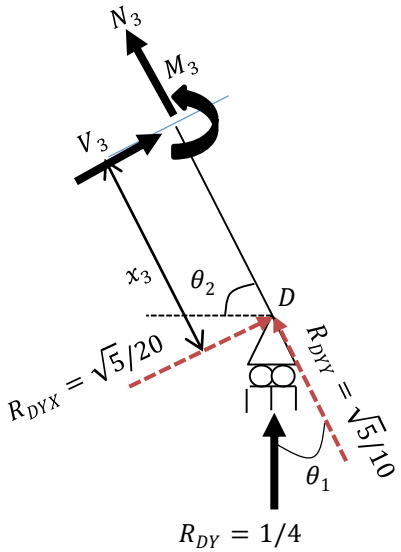
$$\circlearrowleft + \sum M\ corte = 0$$

$$-M_2 + 1 - \frac{1}{4}(x_2) = 0 \Rightarrow M_2 = 1 - \frac{1}{4}x_2$$



(o)

Miembro $D - C$.



(p)

$$0 \leq x_3 \leq 2\sqrt{5}m$$

$$R_{DYX} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{20}; R_{DYY} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{10}$$

$$\circlearrowleft + \sum M\ corte = 0$$

$$-M_3 - \frac{\sqrt{5}}{20}(x_3) = 0 \Rightarrow M_3 = -\frac{\sqrt{5}}{20}x_3$$

Se analiza el pórtico isostático ECu_2, figura 2-7d.

Al aplicar las ecuaciones de equilibrio, resulta

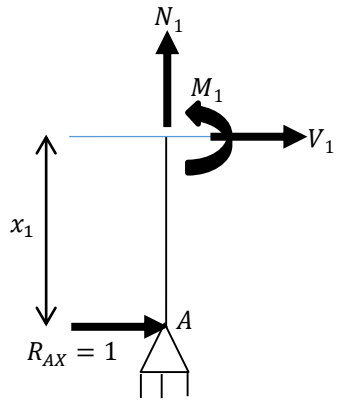
$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow R_{AX} - 1 = 0 \Rightarrow \therefore R_{AX} = 1 \rightarrow$$

$$\circlearrowleft + \sum MA = 0 \Rightarrow R_{DY} = 0 \qquad \sum FY = 0 \Rightarrow R_{AY} = 0$$

Se calculan los momentos internos m_2, figuras 2-7q, 2-7r y 2-7s.

Miembro $A - B$.

(q)



$$0 \leq x_1 \leq 4m$$

$$\circlearrowleft + \sum M\ corte = 0$$

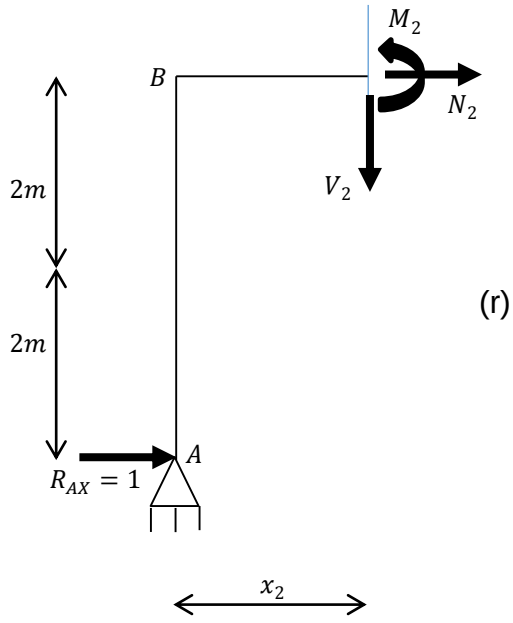
$$-M_1 - 1(x_1) = 0 \Rightarrow M_1 = -x_1$$

Miembro $B - C$.

$$0 \leq x_2 \leq 2m$$

$$\circlearrowleft + \sum M\ corte = 0$$

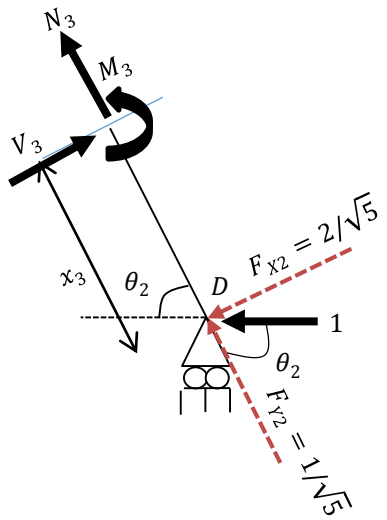
$$-M_2 - 1(4) = 0 \Rightarrow -4M_2 = -4$$



(r)

Miembro $D-C$.

(s)



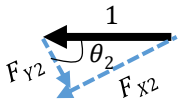
$$0 \le x_3 \le 2\sqrt{5}m$$

$$+\circlearrowright \sum M\ corte = 0$$

$$-M_3 + \frac{2}{\sqrt{5}}(x_3) = 0 \Rightarrow M_3 = \frac{2}{\sqrt{5}}x_3$$

La descomposición de la fuerza de 1 en sus componentes rectangulares perpendicular y paralela al eje del miembro $D-C$ se observa en la figura 2-7t.

(t)



$$F_{X2} = F_2 \sin\theta_2 = 1 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$F_{Y2} = F_2 \cos\theta_2 = 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Se analiza el pórtico ECu_3, figura 2-7e.

El equilibrio estático del cuerpo libre implica que

$$+\longrightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow R_{AX} = 0 \qquad +\circlearrowright \sum MA = 0 \Rightarrow 1 - R_{DY}(4) = 0 \Rightarrow \therefore R_{DY} = \frac{1}{4}\uparrow$$

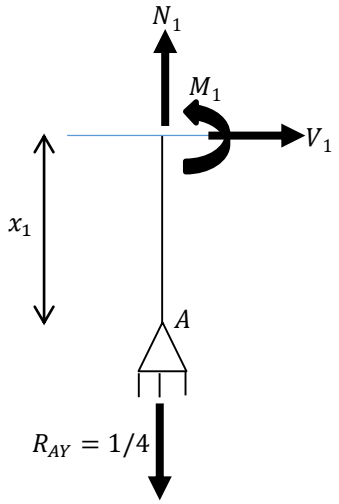
$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow -R_{AY} + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \therefore R_{AY} = \frac{1}{4}\downarrow$$

Se determinan los momentos internos m_3 con base en las figuras 2-7u, 2-7v y 2-7w.

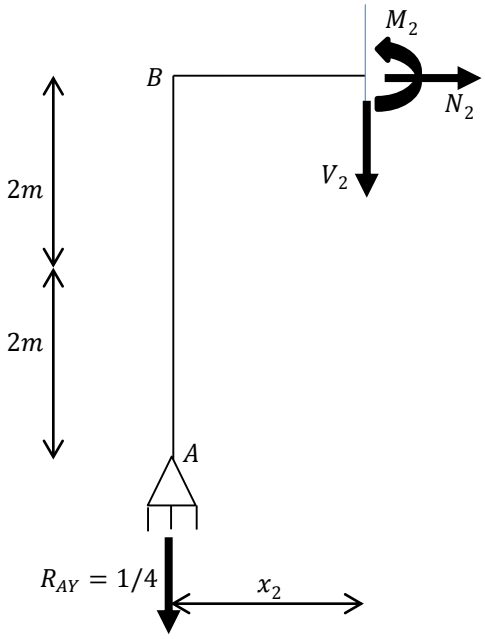
Miembro $A - B$.

$$0 \leq x_1 \leq 4m$$

$$\circlearrowright + \sum M\ corte = 0 \Rightarrow M_1 = 0$$



(u)



(v)

Miembro $B - C$.

$$0 \leq x_2 \leq 2m$$

$$\circlearrowright + \sum M\ corte = 0$$

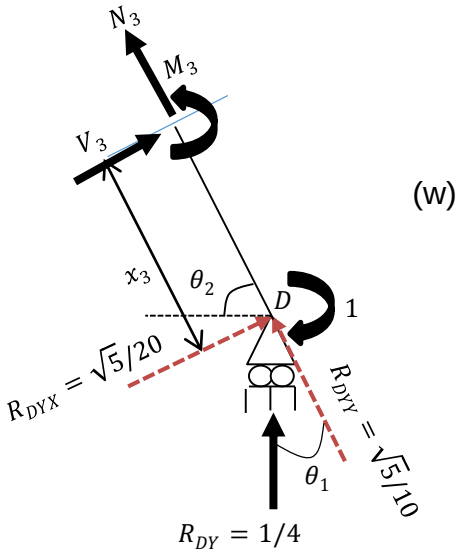
$$-M_2 - \frac{1}{4}(x_2) = 0 \Rightarrow M_2 = -\frac{1}{4}x_2$$

Miembro $D - C$.

$$0 \leq x_3 \leq 2\sqrt{5}m$$

$$\circlearrowright + \sum M\ corte = 0$$

$$-M_3 + 1 - \frac{\sqrt{5}}{20}(x_3) = 0 \Rightarrow M_3 = 1 - \frac{\sqrt{5}}{20}x_3$$



(w)

Se muestra el cálculo de las incompatibilidades geométricas.

$$d_1 = \frac{1}{EI}\left[\int_0^2 (5.0706316x_1)(1)dx_1 + \int_2^4 (12 - 0.9293683x_1)(1)dx_1 \right.$$

$$+ \int_0^2 (-x_2^2 + 1.43731832x_2 + 8.282526)\left(1 - \frac{1}{4}x_2\right)dx_2 + \int_0^{\sqrt{5}} (-2.885966914x_3)\left(-\frac{\sqrt{5}}{20}x_3\right)dx_3$$

$$\left. + \int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{5}} (-0.314816475x_3 - 5.749267162)\left(-\frac{\sqrt{5}}{20}x_3\right)dx_3\right] = \frac{48.1802}{EI}$$

$$d_2 = \frac{1}{EI}\left[\int_0^2 (5.0706316x_1)(-x_1)dx_1 + \int_2^4 (12 - 0.9293683x_1)(-x_1)dx_1 \right.$$

$$+ \int_0^2 (-x_2^2 + 1.43731832x_2 + 8.282526)(-4)dx_2 + \int_0^{\sqrt{5}} (-2.885966914x_3)\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x_3\right)dx_3$$

$$\left. + \int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{5}} (-0.314816475x_3 - 5.749267162)\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x_3\right)dx_3\right] = -\frac{190.798}{EI}$$

$$d_3 = \frac{1}{EI}\left[\int_0^2 (5.0706316x_1)(0)dx_1 + \int_2^4 (12 - 0.9293683x_1)(0)dx_1 \right.$$

$$+ \int_0^2 (-x_2^2 + 1.43731832x_2 + 8.282526)\left(-\frac{1}{4}x_2\right)dx_2 + \int_0^{\sqrt{5}} (-2.885966914x_3)\left(1 - \frac{\sqrt{5}}{20}x_3\right)dx_3$$

$$\left. + \int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{5}} (-0.314816475x_3 - 5.749267162)\left(1 - \frac{\sqrt{5}}{20}x_3\right)dx_3\right] = -\frac{19.5897}{EI}$$

Se presenta el cálculo de los coeficientes de flexibilidad.

$$f_{11} = \frac{1}{EI}\left[\int_0^4 (1)^2\, dx_1 + \int_0^2 \left(1 - \frac{1}{4}x_2\right)^2 dx_2 + \int_0^{2\sqrt{5}} \left(-\frac{\sqrt{5}}{20}x_3\right)^2 dx_3\right] = \frac{5.53934}{EI}$$

$$f_{21}=\frac{1}{EI}\left[\int_0^4(1)\,(-x_1)dx_1+\int_0^2\left(1-\frac{1}{4}x_2\right)(-4)dx_2+\int_0^{2\sqrt{5}}\left(-\frac{\sqrt{5}}{20}x_3\right)\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x_3\right)dx_3\right]=-\frac{16.9814}{EI}$$

$$f_{31}=\frac{1}{EI}\left[\int_0^4(1)\,(0)dx_1+\int_0^2\left(1-\frac{1}{4}x_2\right)\left(-\frac{1}{4}x_2\right)dx_2+\int_0^{2\sqrt{5}}\left(-\frac{\sqrt{5}}{20}x_3\right)\left(1-\frac{\sqrt{5}}{20}x_3\right)dx_3\right]=-\frac{1.07869}{EI}$$

$$f_{12}=f_{21}=-\frac{16.9814}{EI}$$

$$f_{22}=\frac{1}{EI}\left[\int_0^4(-x_1)^2\,dx_1+\int_0^2(-4)^2dx_2+\int_0^{2\sqrt{5}}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x_3\right)^2dx_3\right]=\frac{77.1847}{EI}$$

$$f_{32}=\frac{1}{EI}\left[\int_0^4(-x_1)\,(0)dx_1+\int_0^2(-4)\left(-\frac{1}{4}x_2\right)dx_2+\int_0^{2\sqrt{5}}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x_3\right)\left(1-\frac{\sqrt{5}}{20}x_3\right)dx_3\right]=\frac{7.96285}{EI}$$

$$f_{13}=f_{31}=-\frac{1.07869}{EI}\qquad\qquad f_{23}=f_{32}=\frac{7.96285}{EI}$$

$$f_{33}=\frac{1}{EI}\left[\int_0^4(0)^2\,dx_1+\int_0^2\left(-\frac{1}{4}x_2\right)^2dx_2+\int_0^{2\sqrt{5}}\left(1-\frac{\sqrt{5}}{20}x_3\right)^2dx_3\right]=\frac{2.77541}{EI}$$

Cálculo de las reacciones redundantes

Sustituyendo los resultados en las ecuaciones $(1),(2),(3)$, se tiene

$$\frac{48.1802}{EI}+\frac{5.53934}{EI}M_A-\frac{16.9814}{EI}R_{DX}-\frac{1.07869}{EI}M_D=0---(7)$$

$$-\frac{190.798}{EI}-\frac{16.9814}{EI}M_A+\frac{77.1847}{EI}R_{DX}+\frac{7.96285}{EI}M_D=0---(8)$$

$$-\frac{19.5897}{EI}-\frac{1.07869}{EI}M_A+\frac{7.96285}{EI}R_{DX}+\frac{2.77541}{EI}M_D=0---(9)$$

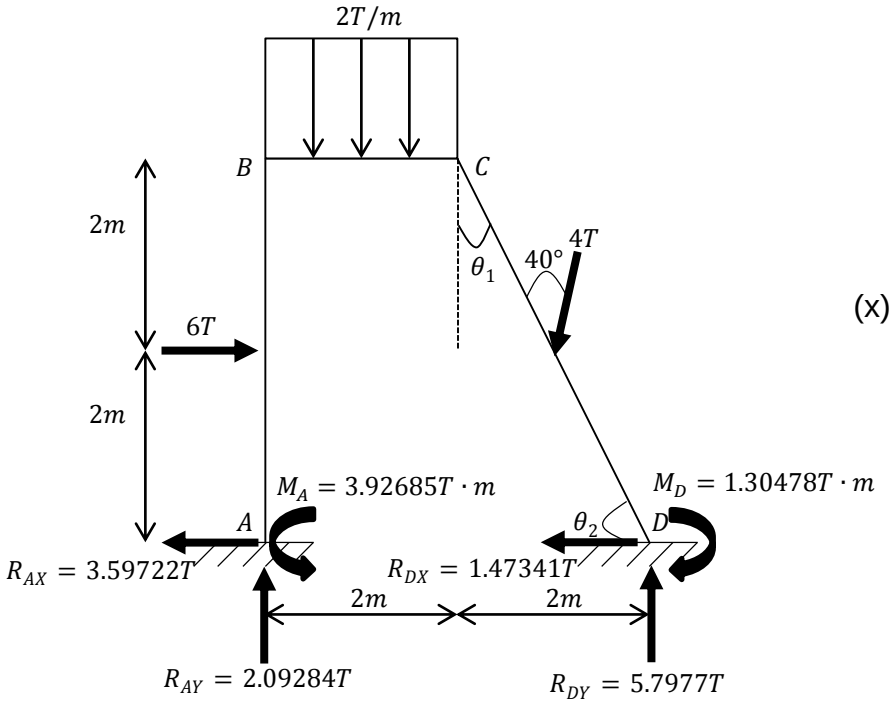
Al resolver el sistema, resulta

$$M_A = -3.92685; R_{DX} = 1.47341; M_D = 1.30478$$

Como la magnitud de M_A se obtuvo negativa, esta redundante actúa en dirección opuesta al momento unitario que se observa en la figura 2-7c. Por lo tanto,

$$M_A = 3.92685T \cdot m \curvearrowleft \qquad R_{DX} = 1.47341T \leftarrow \qquad M_D = 1.30478T \cdot m \curvearrowright$$

Ecuaciones de equilibrio



(x)

Con los resultados obtenidos, figura 2-7x, las reacciones restantes se obtienen directamente de

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow 6 - 0.9293683807 - 1.47341 - R_{AX} = 0 \Rightarrow \therefore R_{AX} = 3.59722 \leftarrow$$

$$\curvearrowright + \sum MA = 0 \Rightarrow 6(2) + 4(1) + 3.89053652(3) + 1.30478 - 3.92685 - 0.9293683807(2) - R_{DY}(4) = 0 \Rightarrow \therefore R_{DY} = 5.7977T \uparrow$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow R_{AY} - 4 - 3.89053652 + 5.7977 = 0 \Rightarrow \therefore R_{AY} = 2.09284T \uparrow$$

Ejercicio 2.8 Resolución de una armadura externamente indeterminada con el método de flexibilidades.

Instrucciones Calcule las reacciones de los apoyos de la armadura al actuar la carga indicada, figura 2-8a. El área de la sección transversal de cada elemento se especifica en pulgadas cuadradas en la tabla 2-1 y se ha etiquetado arbitrariamente a cada barra con un número cuadriculado adyacente. $E = 30000k/pulg^2$. Utilice el método de flexibilidades (de las fuerzas) que considera el sistema.

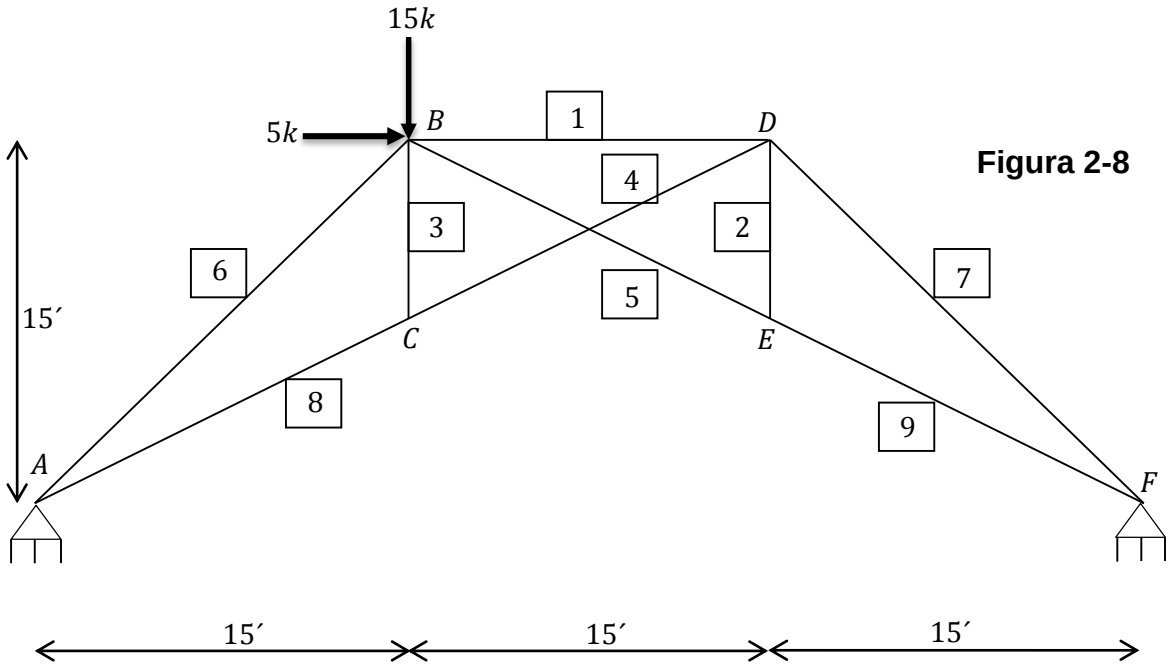


Figura 2-8

ER: Estructura real

(a)

No de barra	longitud (pies)	Área (pies^2)
1	15	0.05556
2	7.5	0.02778
3	7.5	0.02778
4	16.7705	0.08333
5	16.7705	0.08333
6	21.2132	0.06944
7	21.2132	0.06944
8	16.7705	0.08333
9	16.7705	0.08333

Tabla 2-1

$$Nota: L_{A-C} = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\sqrt{(30')^2 + (15')^2}\right) = 16.7705';\ L_{A-B} = \sqrt{(15')^2 + (15')^2} = 21.2132'$$

SOLUCIÓN

Verificación del grado de indeterminación

Las ecuaciones de equilibrio en el plano son $n = 3(\sum FX; \sum FY; \sum M)$ y en este caso no hay ecuaciones de condición, es decir, $c = 0$.

En cada pasador hay dos incógnitas de reacción, una horizontal y una vertical, por lo que $r = 4(R_{AX}; R_{AY}; R_{FX}; R_{FY})$. Ello indica que la armadura es estáticamente indeterminada externamente con un grado de $4 - 3 = 1$.

Por otra parte, el número de nodos es $j = 6(A; B; C; D; E; F)$ y la cantidad de barras es $b = 9$, así que $r + b = 13$ y $2j = 12$.

Como $r + b > 2j$ ya que $13 > 12$ con una diferencia de $13 - 12 = 1$, la armadura de la figura 2-8a es estáticamente determinada internamente, ya que ese 1 corresponde a la hiperestaticidad externa que se calculó previamente.

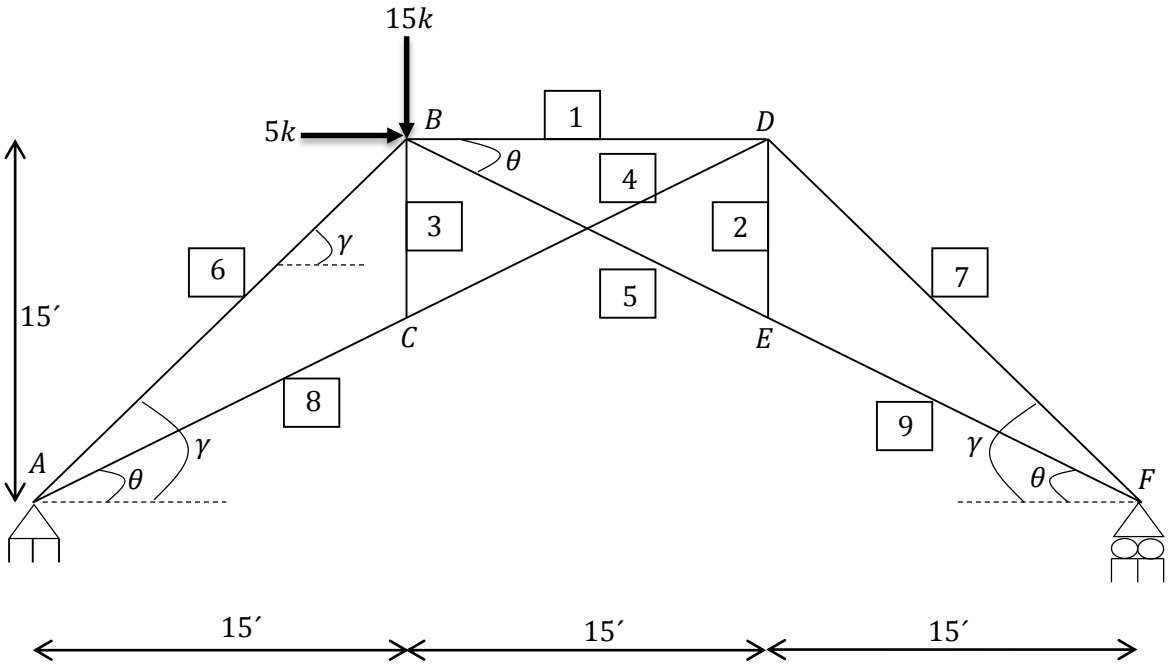
Elección de la reacción redundante (fuerza correctiva) y planteamiento de la estructura primaria

Dado que la indeterminación es externa, la fuerza sobrante es cualquiera de las reacciones en los soportes. Se considerará R_{FX} como redundante, pero el lector puede elegir R_{AY}, R_{AX} o R_{FY}. En consecuencia, para idealizar la estructura primaria, el apoyo articulado (pasador) en F se reemplaza por un rodillo (oscilador), puesto que éste último soporte no restringirá F en la dirección horizontal ya que se está eliminando R_{FX}. Esta nueva estructura, figura 2-8b, es isostática, estable y soporta las mismas cargas que la hiperestática.

Principio de superposición

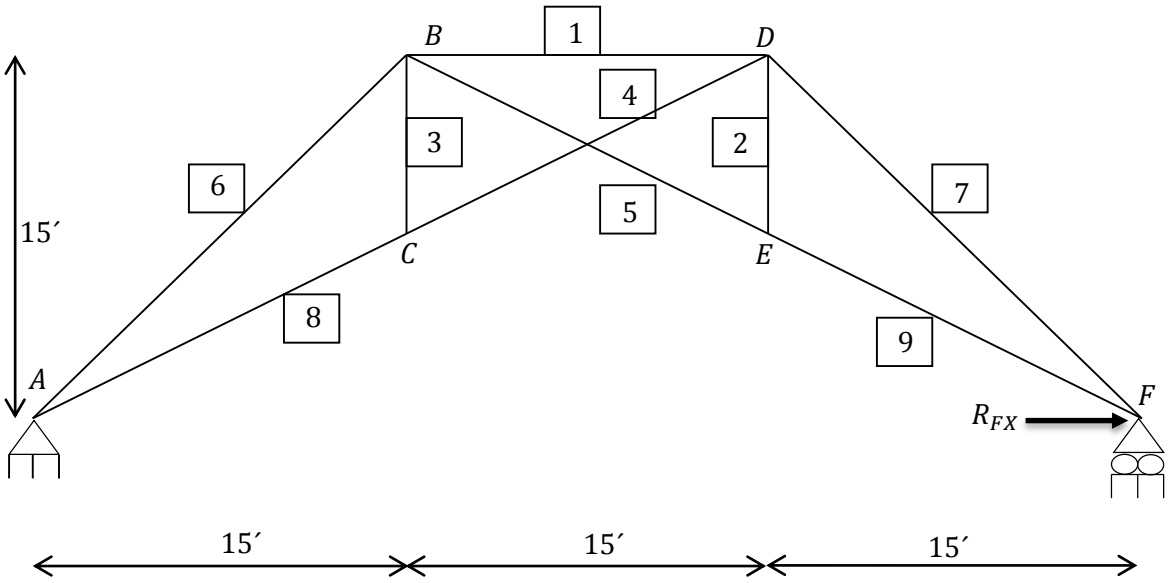
La armadura real, al ser estáticamente indeterminada, puede ser igual a la suma de una serie de armaduras isostáticas conformada por la estructura primaria EP y otro número de estructuras igual a la cantidad de redundantes ERd_i. Entonces, la armadura de este ejemplo es igual a EP más ERd_1, es decir, $ER = EP + ERd_1$.

La estructura primaria y su subsecuente (ERd_1) deben tener entre sí la misma geometría e idénticas condiciones de apoyo con la diferencia de que la segunda en vez de estar sometida a las cargas reales, únicamente soporta a la redundante elegida, o sea, R_{FY} (da igual que actué hacia la derecha o hacia la izquierda).



EP: Estructura primaria $\Longrightarrow N$

(b)



ERd_1: Estructura liberada con fuerza redundante R_{FX} aplicada

(c)

La armadura EP, contrariamente a la armadura real, experimenta un desplazamiento horizontal en el punto F igual a una cierta cantidad de $\Delta_{HF_{EP}} = d_1$. Por otra parte, en la armadura ERd_1, el desplazamiento horizontal del punto F es igual a una cierta cantidad de $\Delta_{HF_{ERd_1}} = R_{FX}(f_{11})$.

Planteamiento de la ecuación de compatibilidad geométrica

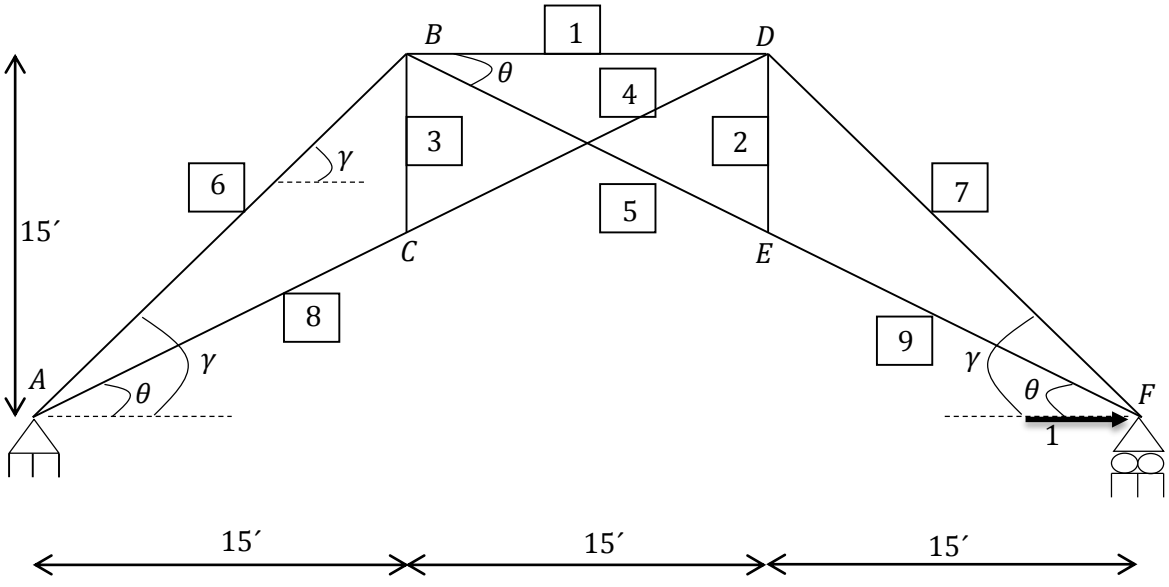
Para obtener una ecuación adicional que contribuya a la solución del problema hacemos uso del principio de superposición formulado anteriormente y tomamos en cuenta la compatibilidad del desplazamiento horizontal en el soporte de pasador F. Por lo tanto,

$$\Delta_{HF_{EP}} + \Delta_{HF_{ERd_1}} = \Delta_{HF_{ER}} - - - (1)$$

Como la armadura ER no experimenta desplazamiento horizontal en el punto F debido a que la reacción horizontal del pasador ahí situado lo impide, $\Delta_{HF_{ER}}$ es nulo. Realizando las sustituciones correspondientes, la ecuación de compatibilidad puede ser expresada como

$$d_1 + f_{11}R_{FX} = 0 - - - (2)$$

Si a la estructura liberada le aplicamos una unidad de carga horizontal en el punto F correspondiente a la fuerza redundante, el coeficiente de flexibilidad puede obtenerse directamente al calcular el desplazamiento horizontal en ese mismo punto, por lo que $\Delta_{HF_{ECu_1}} = f_{11}$.



ECu_1: Estructura liberada con fuerza horizontal unitaria aplicada en $F \Longrightarrow n$ (d)

Cálculo de las incompatibilidades geométricas y de los coeficientes de flexibilidad

En resumen, en las armaduras mostradas en las figuras 2-8b y 2-8d es necesario determinar el valor del desplazamiento horizontal en F ya que R_{FX} (fuerza reactiva horizontal en el pasador del punto F) fue suprimida.

Los desplazamientos requeridos pueden obtenerse con cualquiera de los métodos válidos del análisis estructural; aquí se empleará el método del trabajo virtual. Para asociar a las fuerzas internas (se calcularán empleando el método de los nodos) con las estructuras, le hemos denominado N a la primaria y n a la liberada con fuerza horizontal unitaria aplicada en F.

Obsérvese que la ecuación para determinar d_1 requiere de la combinación adecuada de las fuerzas en las barras N y n, mientras que la expresión para inferir f_{11} sólo involucra a las fuerzas n y ya no a las fuerzas N.

$$d_1 = \Delta_{HF_{EP}} = \sum \frac{NnL}{AE}$$

$$f_{11} = \Delta_{HF_{ECu_1}} = \sum \frac{nnL}{AE}$$

Se analiza la armadura EP, figura 2-8b.

Se calculan las reacciones en los apoyos al aplicar las ecuaciones de la estática.

$$\circlearrowleft + \sum MA = 0 \Rightarrow R_{FY}(45) - 15(15) - 5(15) = 0 \Rightarrow \therefore R_{FY} = 6.6667k \uparrow$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow R_{AY} - 15k + 6.6667k = 0 \Rightarrow \therefore R_{AY} = 8.3333k \uparrow$$

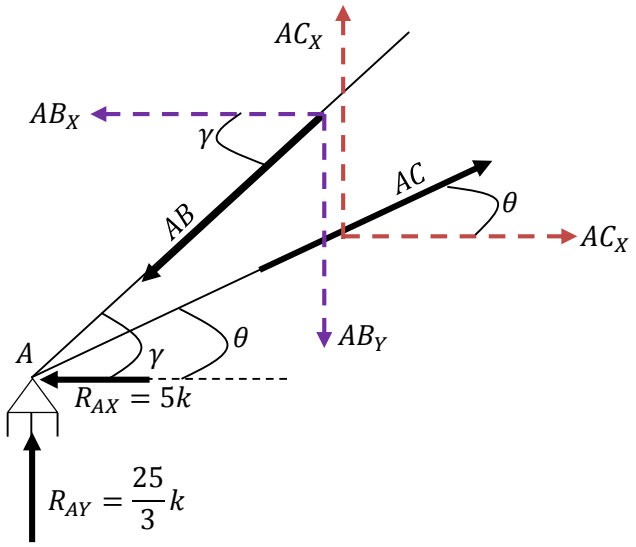
$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow 5 - R_{AX} = 0 \Rightarrow \therefore R_{AX} = 5k \leftarrow$$

Por trigonometría, de la figura 2-8b se deducen los siguientes ángulos:

$$\gamma = tan^{-1}\left(\frac{15}{15}\right) = 45° \qquad \theta = tan^{-1}\left(\frac{7.5}{15}\right) = 26.5650°$$

Enseguida se aplica el método de los nodos para determinar las fuerzas N en las barras.

Nodo A, figura 2-8e. El análisis puede comenzarse en este nodo, debido a que, como se observa en el diagrama de cargas, sólo se tienen dos incógnitas que corresponden a las fuerzas en las barras AB y AC.



(e)

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow AC_X - AB_X - 5 = 0 \Rightarrow AC(cos\theta) - AB(cos\gamma) = 5 - - - (1)$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow AC_Y - AB_Y + \frac{25}{3} = 0 \Rightarrow AC(sin\theta) - AB(sin\gamma) = -\frac{25}{3} - - - (2)$$

Resolvemos el sistema simultáneo de ecuaciones (1) y (2). Despejando AC de la ecuación (1), se obtiene

$$AC = \frac{5 + AB(cos\gamma)}{cos\theta} - - - (3)$$

Al sustituir la ecuación (3) en la ecuación (2), resulta

$$\left(\frac{5 + AB(cos\gamma)}{cos\theta}\right)(sin\theta) - AB(sin\gamma) = -\frac{25}{3} \Rightarrow 5(tan\theta) + AB(cos\gamma)(tan\theta) - AB(sin\gamma) = -\frac{25}{3}$$

$$AB = \frac{-\left(\frac{25}{3} + 5(tan\theta)\right)}{(cos\gamma)(tan\theta) - (sin\gamma)} = \frac{-\left(\frac{25}{3} + 5(tan26.5650°)\right)}{(cos45°)(tan26.5650°) - (sin45°)}$$

$$\therefore AB = 30.64129385k \quad (Compresión)$$

Reemplazando el valor obtenido de AB en la ecuación (3) da

$$AC = \frac{5 + AB(cos\gamma)}{cos\theta} = \frac{5 + (30.64129385)(cos45°)}{cos26.5650°}$$

$$\therefore AC = 29.8142397k \quad (Tensión)$$

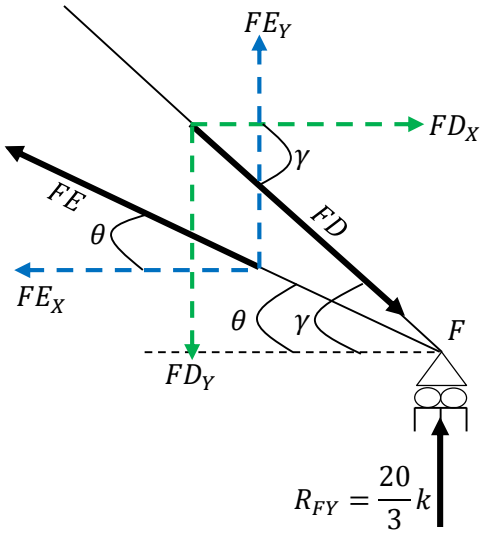
Nodo F, figura 2-8f.

$$+\longrightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow -FE_X + FD_X = 0$$

$$FE(cos\theta) = FD(cos\gamma) - - - (1')$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow FE_Y - FD_Y + \frac{20}{3} = 0$$

$$FE(sin\theta) - FD(sin\gamma) = -\frac{20}{3} - - - (2')$$



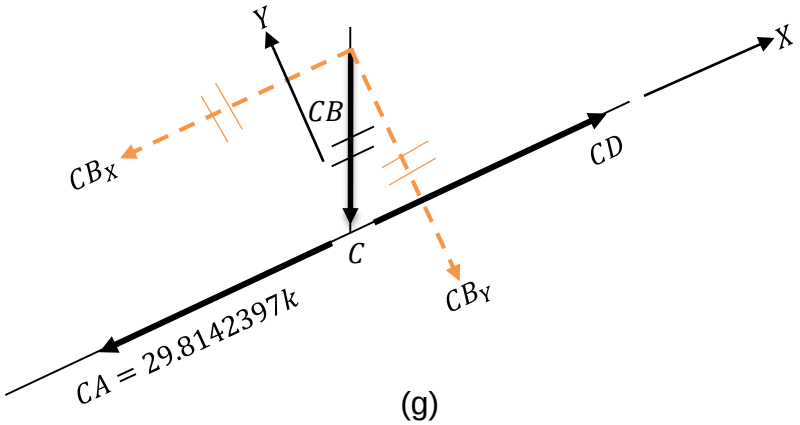
(f)

Se resuelve el sistema de ecuaciones $(1')$ y $(2')$.

$$\therefore FE = 14.90711985k \quad (Tensión)$$

$$\therefore FD = 18.85618033k \quad (Compresión)$$

Nodo C, figura 2-8g.



(g)

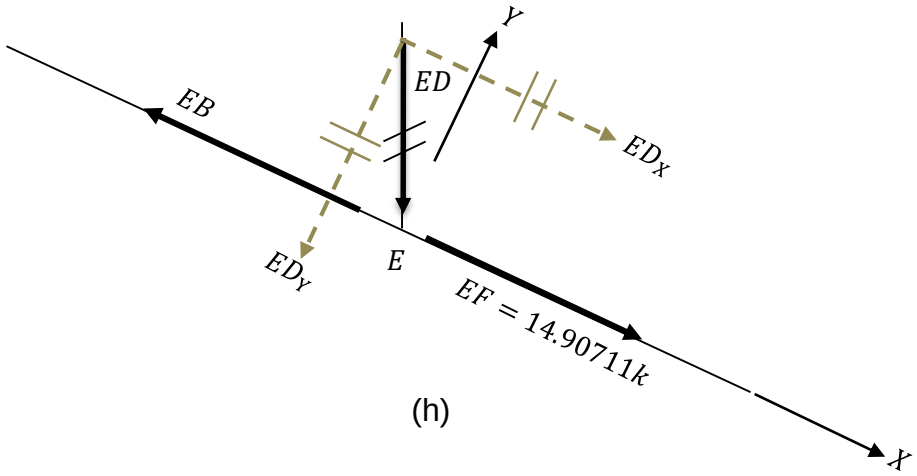
Se hace un cambio en la orientación de los ejes X y Y para evitar la solución simultánea de ecuaciones. Como la componente CB_Y es la única fuerza en la dirección Y, evidentemente tenemos

$$+\nwarrow \sum FY = 0 \Rightarrow \therefore CB = 0$$

Por otra parte,

$$\nearrow+\sum FX=0\Rightarrow -CA+CD-CB_X=0\Rightarrow\therefore CD=29.8142397k\quad(Tensión)$$

Nodo E, figura 2-8h.



(h)

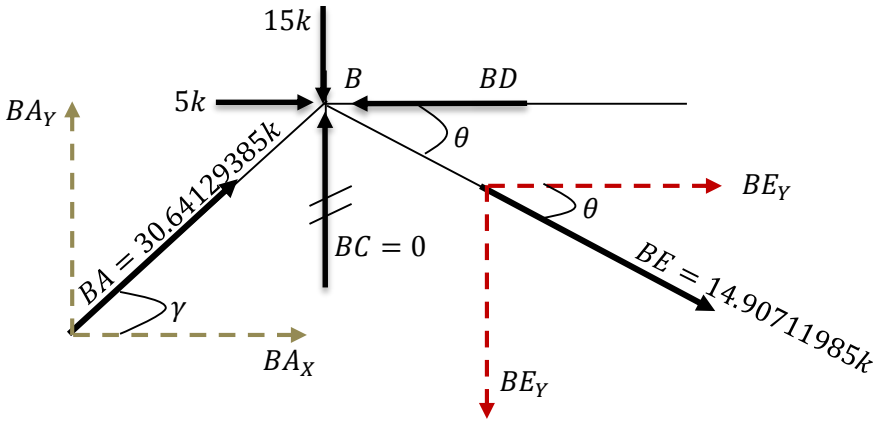
De forma análoga al nodo C, se tiene

$$\nearrow+\sum FY=0\Rightarrow -ED_Y=0\Rightarrow\therefore ED=0$$

$$\searrow+\sum FX=0\Rightarrow -EB+EF+ED_X=0\Rightarrow\therefore EB=14.90711985k\quad(Tensión)$$

Nodo B, figura 2-8i.

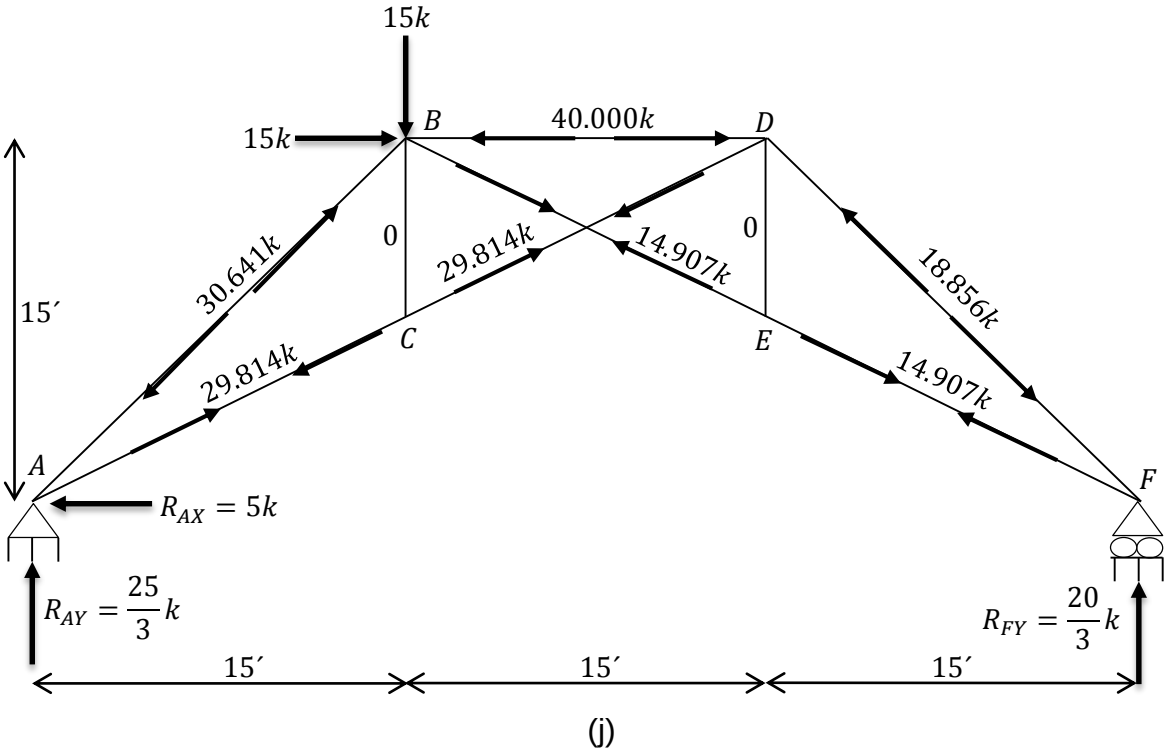
(i)



$$+\longrightarrow\sum FX=0\Rightarrow BA_X+5+BE_X-BD=0$$

$$BA(cos\gamma)+5+BE(cos\theta)-BD=0\Rightarrow\therefore BD=40k\quad(Compresión)$$

Los resultados obtenidos se muestran en la figura 2-8j.



(j)

Se analiza la armadura ECu_1, figura 2-8d.

Las reacciones en los soportes son

$$\circlearrowleft + \sum MA = 0 \Rightarrow R_{FY}(45) = 0 \Rightarrow \therefore R_{FY} = 0$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow \therefore R_{AY} = 0$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow 1 - R_{AX} = 0 \Rightarrow \therefore R_{AX} = 1 \leftarrow$$

Se presenta a detalle el cálculo de las fuerzas n en las barras, empleando el método de los nodos.

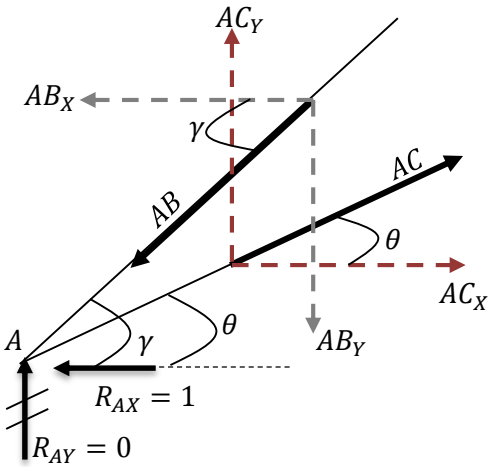
Nodo A, figura 2-8k.

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow AC_X - AB_X - 1 = 0$$

$$AC(cos\theta) - AB(cos\gamma) = 1 - - - (1'')$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow AC_Y - AB_Y = 0$$

$$AC(sin\theta) - AB(sin\gamma) = 0 - - - (2'')$$



(k)

Al resolver el sistema simultáneo de ecuaciones $(1'')$ y $(2'')$obtenemos

$$AB = 1.414213562 \quad (Compresión)$$

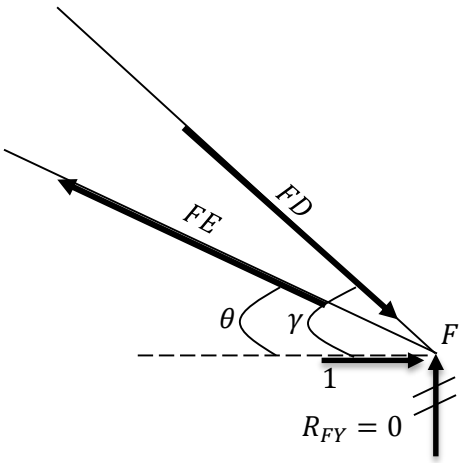
$$AC = 2.236067977 \quad (Tensión)$$

Nodo F, figura 2-8l.

De forma análoga al nodo A, se tiene

$$FE = 2.236067977 \quad (Tensión)$$

$$FD = 1.414213562 \quad (Compresión)$$



(l)

Nodo C, figura 2-8m.

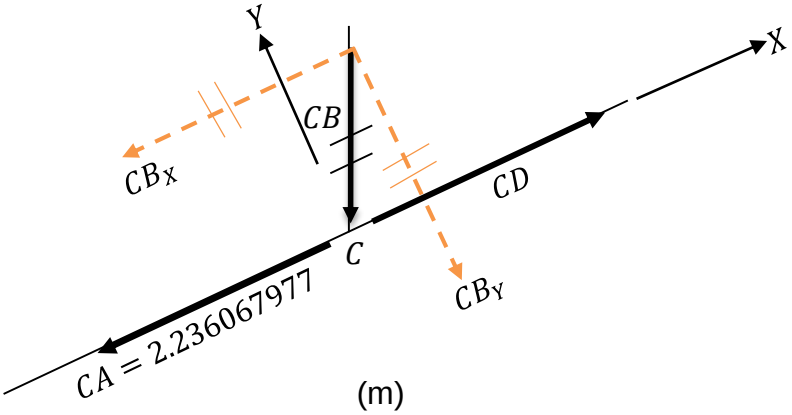
$$\nwarrow + \sum FY = 0$$

$$-CB_Y = 0 \Rightarrow \therefore CB = 0$$

$$\nearrow + \sum FX = 0$$

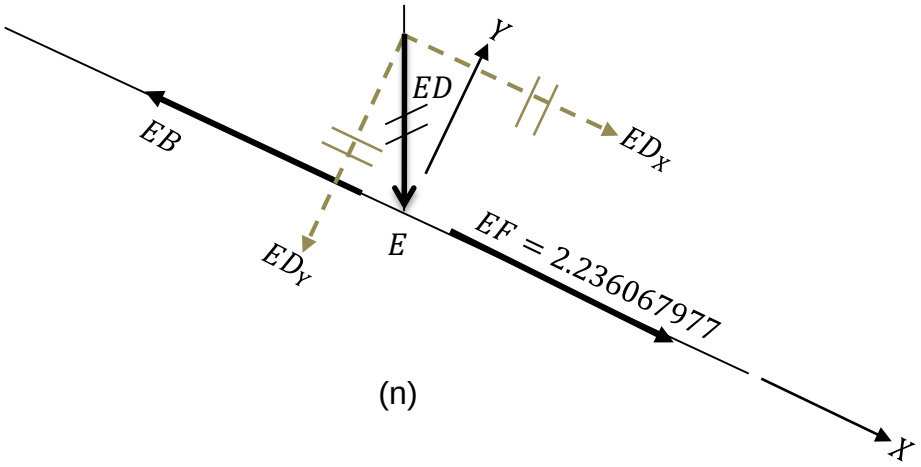
$$-CA + CD - CB_X = 0$$

$$\therefore CD = 2.236067977 \quad (Tensión)$$



(m)

Nodo E, figura 2-8n.



(n)

$$\nearrow + \sum FY = 0 \Rightarrow -ED_Y = 0 \Rightarrow \therefore ED = 0$$

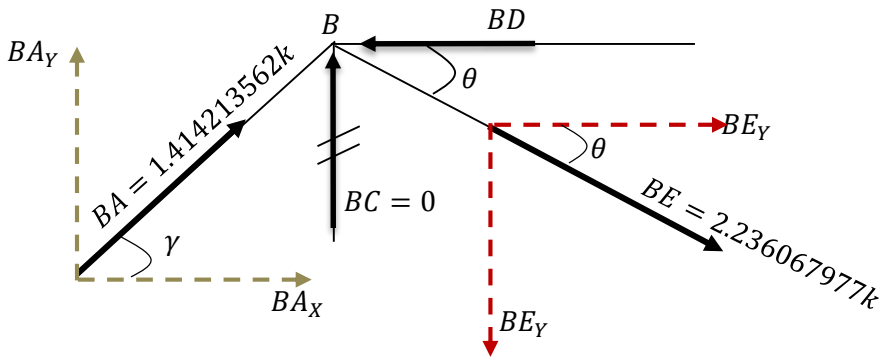
$$\searrow + \sum FX = 0$$

$$-EB + EF + ED_X = 0 \Rightarrow \therefore EB = 2.236067977 \quad (Tensión)$$

Nodo B, figura 2-8ñ.

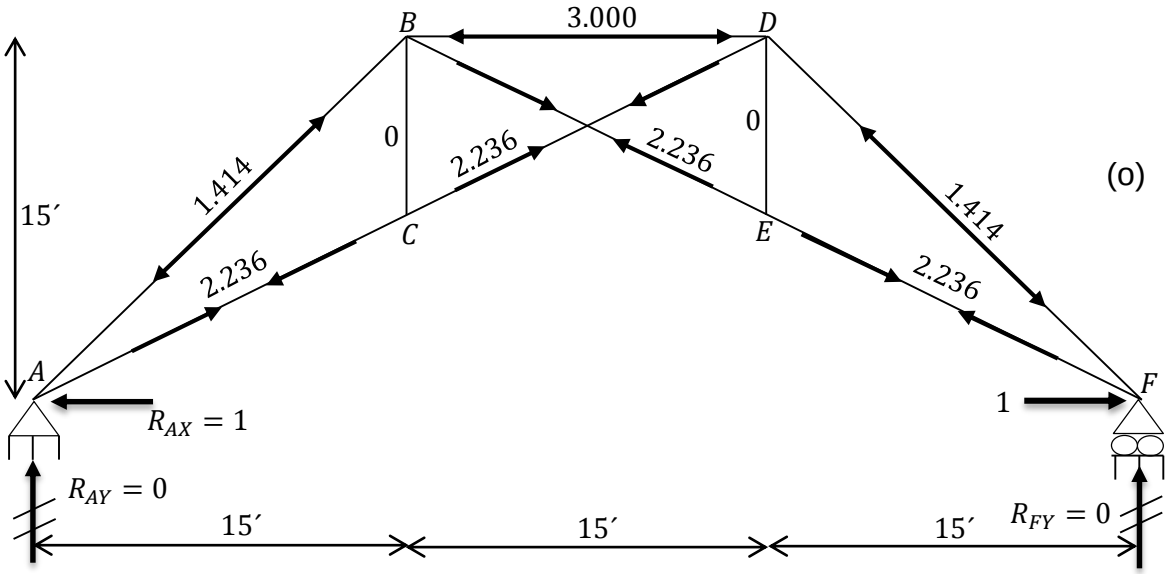
$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow BA_X + BE_X - BD = 0$$

$$BA(cos\gamma) + BE(cos\theta) = BD \Rightarrow BD = 3 \quad (Compresión)$$



(ñ)

Los resultados obtenidos se muestran en la figura 2-8o.



(o)

No de barra	N(k)	n	L (pies)	A (pies2)	E(k/pies2)	$\frac{NnL}{AE}$	$\frac{nnL}{AE}$
1	-40.0000	-3.0000	15.0000	0.0556	4320000	0.0075	0.0006
2	0.0000	0.0000	7.5000	0.0278	4320000	0.0000	0.0000
3	0.0000	0.0000	7.5000	0.0278	4320000	0.0000	0.0000
4	29.8142	2.2360	16.7705	0.0833	4320000	0.0031	0.0002
5	14.9071	2.2360	16.7705	0.0833	4320000	0.0016	0.0002
6	-30.6413	-1.4140	21.2132	0.0694	4320000	0.0031	0.0001
7	-18.8562	-1.4140	21.2132	0.0694	4320000	0.0019	0.0001
8	29.8142	2.2360	16.7705	0.0833	4320000	0.0031	0.0002
9	14.9071	2.2360	16.7705	0.0833	4320000	0.0016	0.0002
					$\sum =$	0.0218	0.0018

Tabla 2-2

Todos los datos obtenidos se colocan en la tabla 2-2. En las columnas $N(k)$ y n los números positivos indican fuerzas de tensión (jalan al nodo) y los números negativos indican fuerzas de compresión (empujan al nodo). Con base en la tabla citada, la incompatibilidad geométrica es

$$d_1 = \Delta_{HF_{AIF1}} = \sum \frac{NnL}{AE} = 0.0218$$

y el coeficiente de flexibilidad es

$$f_{11} = \Delta_{HF_{AIF2}} = \sum \frac{nnL}{AE} = 0.0018$$

Cálculo de la reacción redundante o fuerza correctiva

Para corregir la incompatibilidad geométrica, debe determinarse la fuerza correctiva, es decir, la redundante.

Al reemplazar los resultados precedentes en la expresión (2), tenemos

$$0.0218 + R_{FX}(0.0018) = 0 - - - (3)$$

Si despejamos la incógnita, resulta

$$R_{FX} = \frac{(-0.0218)}{(0.0018)} = -12.1111$$

El signo negativo indica que la fuerza redundante tiene un sentido opuesto al propuesto para su carga unitaria correspondiente.

$$\therefore R_{FX} = 12.1111k \leftarrow$$

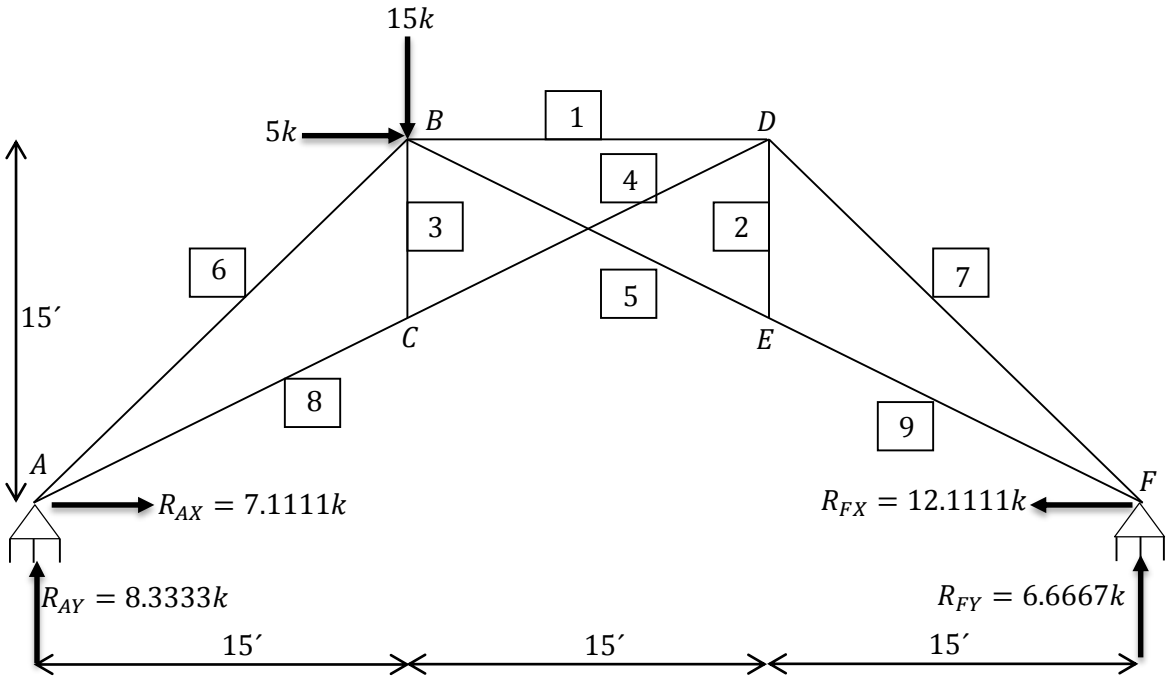
Ecuaciones de equilibrio

Se puede dibujar un diagrama de cuerpo libre colocando el valor de la reacción redundante que ha sido calculada y obtener las reacciones desconocidas faltantes al aplicar las ecuaciones de equilibrio, figura 2-8p.

$$+\circlearrowright \sum MA = 0 \Rightarrow -R_{FY}(45) + 15(15) + 5(15) = 0 \Rightarrow \therefore R_{FY} = 6.6667k \uparrow$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow R_{AY} - 15k + 6.6667k = 0 \Rightarrow \therefore R_{AY} = 8.3333k \uparrow$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow 5k - 12.1111k + R_{AX} = 0 \Rightarrow \therefore R_{AX} = 7.1111k \rightarrow$$

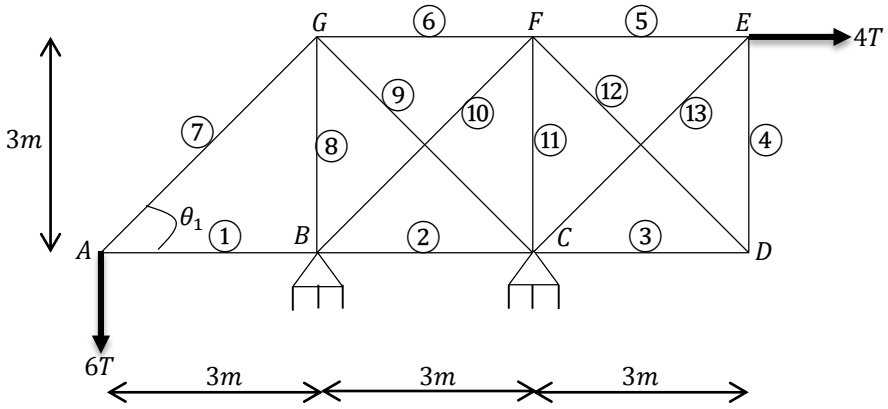


(p)

Una vez calculadas todas las reacciones en los soportes, es posible determinar las fuerzas internas con algún método como el de los nodos, por ejemplo.

Ejercicio 2.9 Resolución de una armadura con indeterminación externa e interna con el método de flexibilidades.

Instrucciones Encuentre los valores de las reacciones en los soportes y de las fuerzas internas en la armadura de la figura 2-9a. Se ha etiquetado arbitrariamente a cada barra con un número circulado adyacente. Considere AE como constante.



ER: Estructura real

(a)

Figura 2-9

SOLUCIÓN

Verificación del grado de indeterminación

Hay $n = 3(\sum FX; \sum FY; \sum M)$ ecuaciones de equilibrio y no existe ecuación de condición alguna. Por cada apoyo articulado se tienen dos incógnitas de reacción, una horizontal y una vertical, así que $r = 4(R_{BX}; R_{BY}; R_{CX}; R_{CY})$. En consecuencia, la armadura es estáticamente indeterminada externamente con un grado de $4 - 3 = 1$.

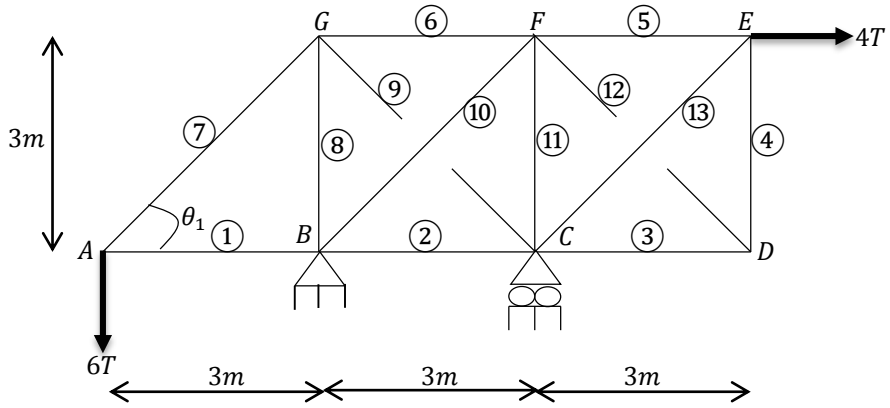
Por otra parte, el número de nodos es $j = 7(A; B; C; D; E; F; G)$ y el número de barras es $b = 13$, por lo que $r + b = 4 + 13 = 17$ y $2j = 2(7) = 14$.

Como $r + b > 2j$ ya que $17 > 14$ la armadura es estáticamente indeterminada con un grado total de $17 - 14 = 3$, en donde si un grado de hiperestaticidad es externo, entonces la indeterminación interna es de grado $3 - 1 = 2$.

De ese modo, a diferencia de la armadura del ejercicio 2.8, la armadura de la figura 2-9a tiene una indeterminación tanto externa como interna, por consiguiente, el proceso para su resolución se vuelve más complejo.

Elección de las redundantes y planteamiento de la estructura primaria

Deben elegirse una reacción de algún soporte, dada la hiperestaticidad externa de grado uno, y dos fuerzas de barra, debido a la hiperestaticidad interna de grado dos, como fuerzas sobrantes; R_{CX}, b_9 y b_{12} se considerarán como las redundantes, pero el lector puede hacer una selección diferente, siempre y cuando no se origine una armadura inestable. En consecuencia, para formular la estructura primaria, el apoyo articulado (pasador) en C se reemplaza por un rodillo (oscilador), puesto que éste último soporte no limitará al punto C en la dirección horizontal ya que se está eliminando la reacción R_{CX}. Además, las barras 9 y 12 se seccionan en algún punto, pues de ese modo no podrían resistir ninguna fuerza axial y se tomarían en cuenta sus deformaciones propias. Esta nueva estructura es isostática, estable y soporta las mismas cargas que la estáticamente indeterminada, figura 2-9b.



EP: Estructura primaria $\Longrightarrow N$

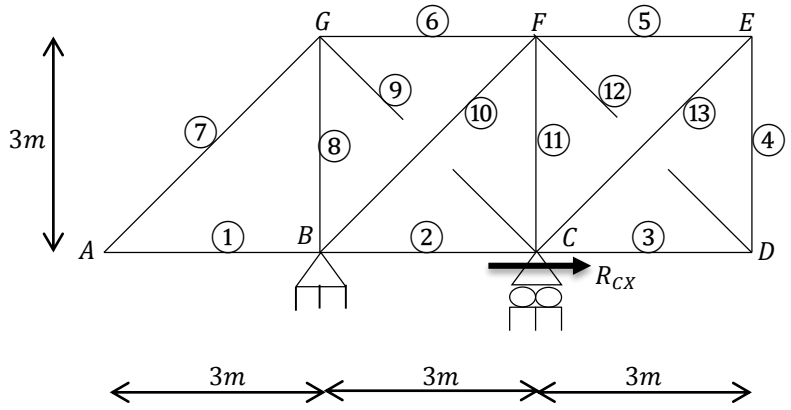
(b)

La armadura mostrada en la figura 2-9b, contrariamente a la armadura real, experimenta un desplazamiento horizontal en el punto C igual a alguna determinada cantidad de $\Delta_{HC_{EP}} = d_1$, un desplazamiento que ocurre entre las dos secciones C y G del corte de una cierta cantidad de $\Delta_{C-G_{EP}} = d_2$ y un desplazamiento entre las dos secciones D y F del otro corte equivalente a un determinado valor de $\Delta_{D-F_{EP}} = d_3$.

Principio de superposición

Como ya se ha citado, la estructura real puede ser igual a la suma de una serie de estructuras estáticamente determinadas; dicha serie está conformada por la

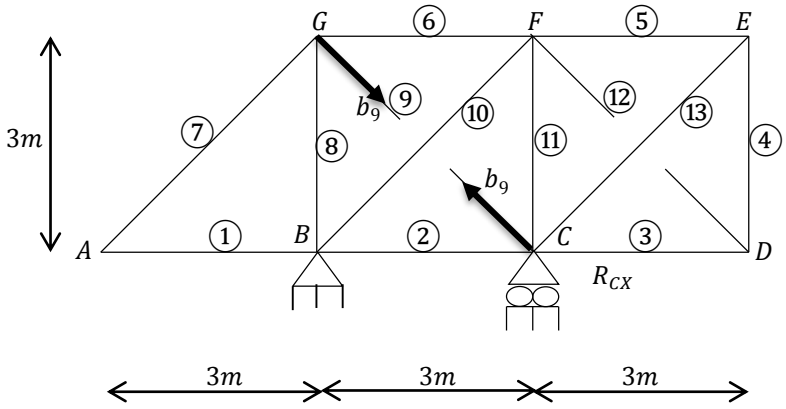
estructura primaria y otro número de estructuras igual a la cantidad de redundantes ERd_i. Entonces, la armadura de la figura 2-9a es igual a EP más otras tres armaduras (ERd_1, ERd_2 y ERd_3), es decir, $ER = EP + ERd_1 + ERd_2 + ERd_3$. Las últimas tres estructuras, que son subsecuentes a la primaria, soportan únicamente a las redundantes R_{CX}, b_9 y b_{12}, de manera respectiva.



ERd_1: Estructura liberada con fuerza redundante R_{CX} aplicada

(c)

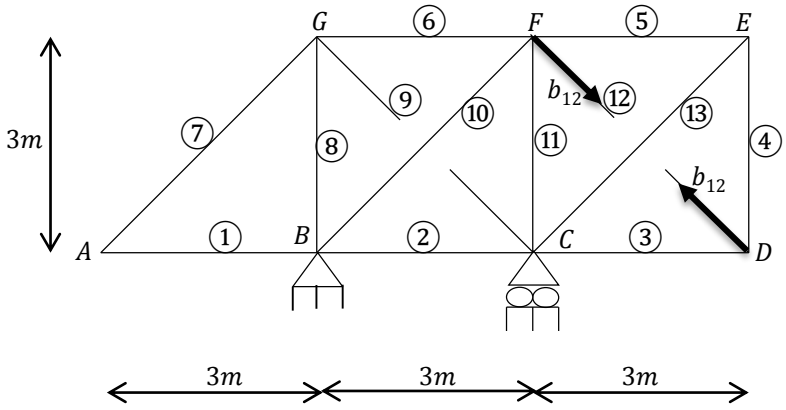
Para la armadura de la figura 2-9c, el desplazamiento horizontal en el punto C es igual a $\Delta_{HC_{ERd_1}} = R_{CX}(f_{11})$, el desplazamiento entre las dos secciones C y G equivale a $\Delta_{C-G_{ERd_1}} = R_{CX}(f_{21})$ y el desplazamiento entre las dos secciones D y F tiene un valor de $\Delta_{D-F_{ERd_1}} = R_{CX}(f_{31})$.



ERd_2: Estructura liberada con fuerza redundante b_9 aplicada a ambos lados del corte realizado en la barra 9

(d)

El punto C de la armadura que se muestra en la figura 2-9d experimenta un desplazamiento horizontal igual a $\Delta_{HC_{AERd_2}} = b_9(f_{12})$; además, entre las dos secciones C y G se presenta un desplazamiento equivalente a $\Delta_{C-G_{ERd_2}} = b_9(f_{22})$ y el desplazamiento entre las dos secciones D y F vale $\Delta_{D-F_{ERd_2}} = b_9(f_{32})$.



ERd_3: Estructura liberada con fuerza redundante b_{12} aplicada a ambos lados del corte realizado en la barra 12

(e)

En la armadura visualizada en la figura 2-9e, el desplazamiento horizontal en el punto C tiene un valor de $\Delta_{HC_{ERd_3}} = b_{12}(f_{13})$, el desplazamiento entre las dos secciones C y G del corte es equivalente a $\Delta_{C-G_{ERd_3}} = b_{12}(f_{23})$ y el desplazamiento entre las dos secciones D y F del otro corte es igual a $\Delta_{D-F_{ERd_3}} = b_{12}(f_{33})$.

Planteamiento del sistema de ecuaciones de compatibilidad geométrica

Para obtener ecuaciones adicionales que contribuyan a la solución del ejercicio planteado, se emplea el principio de superposición formulado previamente y se consideran las compatibilidades correspondientes. Por consiguiente,

$$\Delta_{HC_{EP}} + \Delta_{HC_{ERd_1}} + \Delta_{HC_{ERd_2}} + \Delta_{HC_{ERd_3}} = \Delta_{HC_{ER}} \quad ---(1)$$

$$\Delta_{C-G_{EP}} + \Delta_{C-G_{ERd_1}} + \Delta_{C-G_{ERd_2}} + \Delta_{C-G_{ERd_3}} = \Delta_{C-G_{ER}} \quad ---(2)$$

$$\Delta_{D-F_{EP}} + \Delta_{D-F_{ERd_1}} + \Delta_{D-F_{ERd_2}} + \Delta_{D-F_{ERd_3}} = \Delta_{D-F_{ER}} \quad ---(3)$$

En la armadura real, no ocurre desplazamiento horizontal en el punto C debido a que la reacción horizontal del pasador ahí situado lo impide, así que $\Delta_{HC_{ER}}$ es nulo;

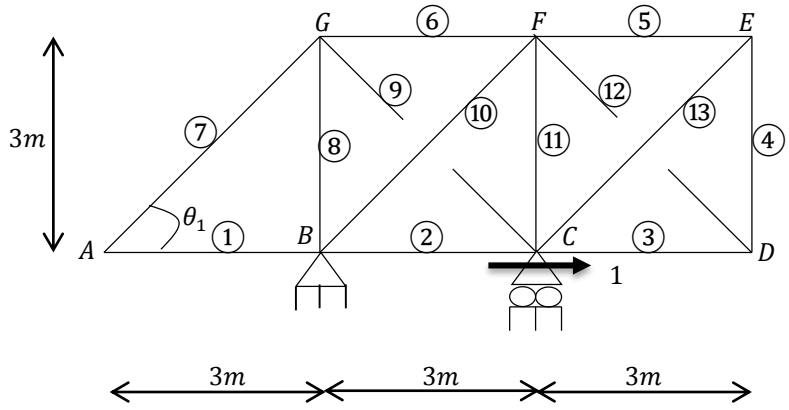
obsérvese que tampoco existen los desplazamientos $\Delta_{C-G_{ER}}$ y $\Delta_{D-F_{ER}}$ debido a que las barras 9 y 12 son continuas. Realizando las sustituciones correspondientes, el sistema de ecuaciones (1) hasta (3) puede escribirse como

$$d_1 + f_{11}R_{CX} + f_{12}b_9 + f_{13}b_{12} = 0 - - - (4)$$

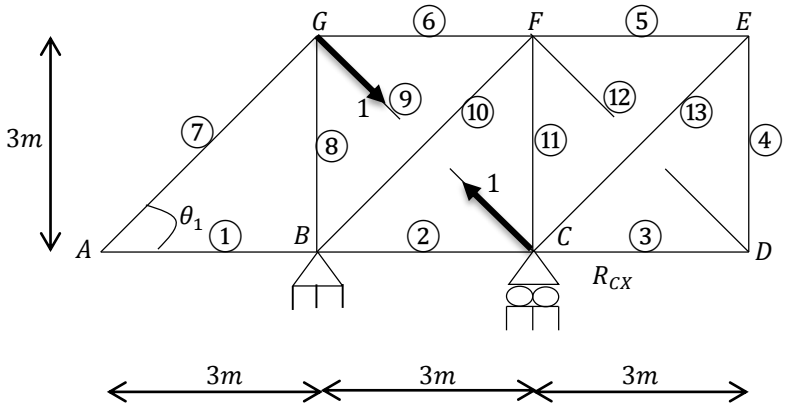
$$d_2 + f_{21}R_{CX} + f_{22}b_9 + f_{23}b_{12} = 0 - - - (5)$$

$$d_3 + f_{31}R_{CX} + f_{32}b_9 + f_{33}b_{12} = 0 - - - (6)$$

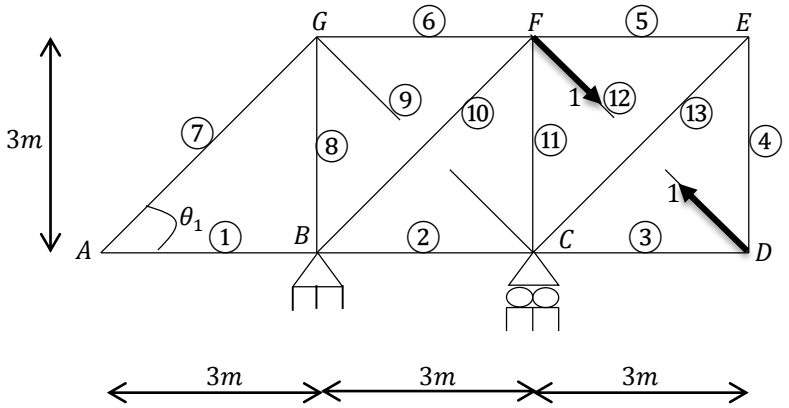
A continuación se aplican a la estructura liberada cargas unitarias correspondientes a sus fuerzas redundantes, figuras 2-9f, 2-9g y 2-9h. De ese modo los coeficientes de flexibilidad f_{ij} pueden obtenerse de forma más directa.



ECu_1: Estructura liberada con fuerza horizontal unitaria aplicada en $C \Longrightarrow n_1$
(f)



ECu_2: Estructura liberada con fuerza unitaria aplicada a ambos lados del corte realizado en la barra $9 \Longrightarrow n_2$
(g)



ECu_3: Estructura liberada con fuerza unitaria aplicada a ambos lados del corte realizado en la barra $12 \Longrightarrow n_3$
(h)

Para la armadura mostrada en la figura 2-9f, el desplazamiento horizontal en el punto C es igual a $\Delta_{HC_{ECu_1}} = f_{11}$, el desplazamiento entre las dos secciones C y G del corte equivale a $\Delta_{C-G_{ECu_1}} = f_{21}$ y el desplazamiento entre las dos secciones D y F del otro corte tiene un valor de $\Delta_{D-F_{ECu_1}} = f_{31}$.

Asimismo, en la armadura representada en la figura 2-9g, simplemente se tiene que $\Delta_{HC_{ECu_2}} = f_{12}$, $\Delta_{C-G_{ECu_2}} = f_{22}$ y $\Delta_{D-F_{ECu_2}} = f_{32}$. De forma análoga, para la armadura que se observa en la figura 2-7h, $\Delta_{HC_{AECu_3}} = f_{13}$, $\Delta_{C-G_{ECu_3}} = f_{23}$ y $\Delta_{D-F_{ECu_3}} = f_{33}$.

Cálculo de las incompatibilidades geométricas y de los coeficientes de flexibilidad

En resumen, para poder resolver el sistema de ecuaciones lineales $(4), (5)$ y (6), en las armaduras de las figuras 2-9b, 2-9f, 2-9g y 2-9h es necesario determinar los valores del desplazamiento horizontal en C ya que R_{CX} (fuerza reactiva horizontal en el pasador del punto C) fue suprimida, del desplazamiento entre las dos secciones C y G debido a que la barra 9 fue cortada en algún punto para no resistir b_9 y del desplazamiento entre las dos secciones D y F debido a que la barra 12 fue cortada en algún punto para no soportar b_{12}.

Se muestra el orden con el que se determinarán los desplazamientos requeridos utilizando el método del principio trabajo virtual.

$$d_1 = \Delta_{HC_{EP}} = \sum \frac{Nn_1L}{AE}; d_2 = \Delta_{C-G_{EP}} = \sum \frac{Nn_2L}{AE}; d_3 = \Delta_{D-F_{EP}} = \sum \frac{Nn_3L}{AE}$$

$$f_{11}=\Delta_{HC_{ECu_1}}=\sum\frac{n_1n_1L}{AE};f_{21}=\Delta_{C-G_{ECu_1}}=\sum\frac{n_1n_2L}{AE};f_{31}=\Delta_{D-F_{ECu_1}}=\sum\frac{n_1n_3L}{AE}$$

$$f_{12}=\Delta_{HC_{ECu_2}}=\sum\frac{n_2n_1L}{AE};f_{22}=\Delta_{C-G_{ECu_2}}=\sum\frac{n_2n_2L}{AE};f_{32}=\Delta_{D-F_{ECu_2}}=\sum\frac{n_2n_3L}{AE}$$

$$f_{13}=\Delta_{HC_{ECu_3}}=\sum\frac{n_3n_1L}{AE};f_{23}=\Delta_{C-G_{ECu_3}}=\sum\frac{n_3n_2L}{AE};f_{33}=\Delta_{D-F_{ECu_3}}=\sum\frac{n_3n_3L}{AE}$$

Se analiza la armadura EP, figura 2-9b.

Las reacciones en los soportes son

$$+\rightarrow\sum FX=0\Rightarrow 4-R_{BX}=0\Rightarrow\therefore R_{BX}=4T\leftarrow$$

$$\circlearrowleft+\sum MB=0\Rightarrow -6(3)+4(3)+R_{CY}(3)=0\Rightarrow\therefore R_{CY}=2T\uparrow$$

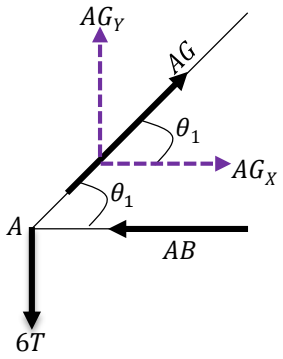
$$+\uparrow\sum FY=0\Rightarrow -6+R_{BY}-2=0\Rightarrow\therefore R_{BY}=8T\uparrow$$

Por trigonometría, de la figura 2-9a puede deducirse que

$$\cos\theta_1=\sin\theta_1=\frac{3}{3\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Se muestra el cálculo de las fuerzas N en las barras.

Nodo A, figura 2-9i.



(i)

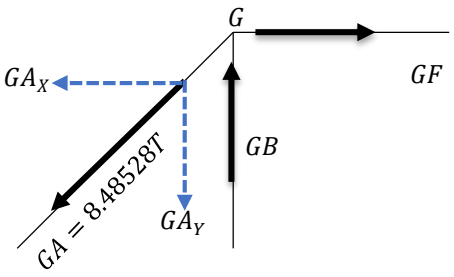
$$+\uparrow\sum FY=0\Rightarrow -6T+AG_Y=0\Rightarrow AG(\sin\theta_1)=6T$$

$$AG\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=6T\Rightarrow\therefore AG=8.48528T\ (Tensión)$$

$$+\rightarrow\sum FX=0\Rightarrow AG_X-AB=0\Rightarrow AB=AG(\cos\theta_1)$$

$$AB=8.48528T\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\Rightarrow\therefore AB=6T\ (Compresión)$$

Nodo G, figura 2-9j.



(j)

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow -GA_Y + GB = 0$$

$$GB = GA_Y \Rightarrow \therefore GB = 6T\ (Compresión)$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow -GA_X + GF = 0$$

$$GF = GA_X \Rightarrow \therefore GF = 6T\ (Tensión)$$

Nodo B, figura 2-9k.

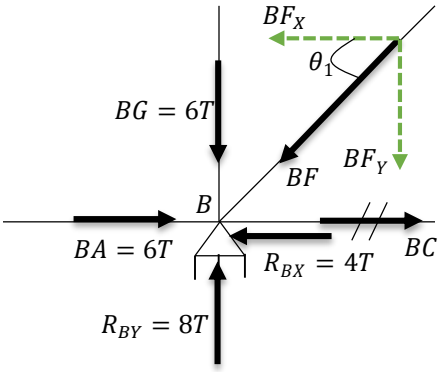
$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow 8T - 6T - BF_Y = 0 \Rightarrow BF_Y = 2T$$

$$BF(\sin\theta_1) = 2T \Rightarrow BF\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2T \Rightarrow \therefore BF = 2.82843T\ (Compresión)$$

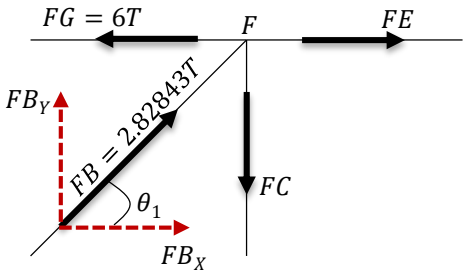
$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow 6T - 4T - BF_X + BC = 0$$

$$BC = BF_X - 2T \Rightarrow BC = BF(\cos\theta_1) - 2T$$

$$BC = 2T - 2T \Rightarrow \therefore BC = 0$$



(k)



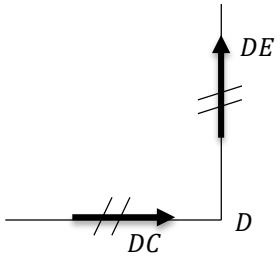
(l)

Nodo F, figura 2-9l.

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow FB_Y - FC = 0 \Rightarrow FC = FB_Y = FB(\sin\theta_1) \Rightarrow\therefore FC = 2T\ (Tensión)$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow FB_X - 6T + FE = 0 \Rightarrow FE = 6T - FB_X = 6T - 2T \Rightarrow\therefore FE = 4T\ (Tensión)$$

Nodo D, figura 2-9m. Al aplicar las ecuaciones de equilibrio en este diagrama de cuerpo libre, se concluye que las fuerzas de los elementos DC y DE son nulas, lo cual es bastante lógico debido a que los dos elementos del nodo D se conectan ortogonalmente y en el nodo D no hay alguna carga externa aplicada. Estos elementos reciben el nombre de elementos de fuerza cero y generalmente pueden ser detectados por simple inspección.



(m)

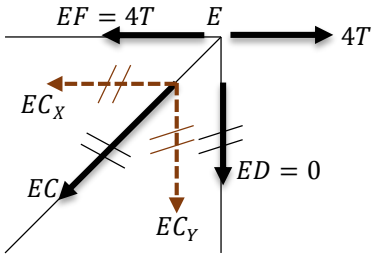
$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow\therefore DE = 0$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow\therefore DC = 0$$

Nodo E, figura 2-9n.

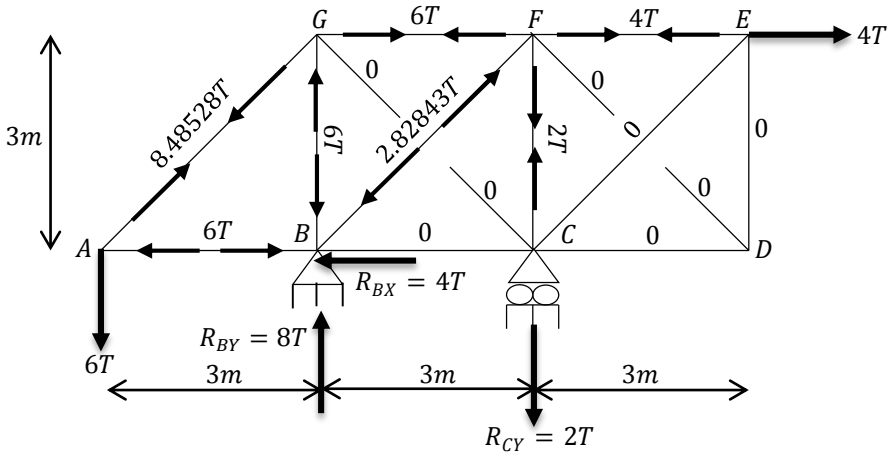
$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow EC_Y = 0 \Rightarrow\therefore EC = 0$$

$$+\rightarrow \sum FX \Rightarrow = -4T + 4T = 0\ \ ok$$



(n)

En la figura 2-9ñ se muestran los resultados para las reacciones y las fuerzas N en las barras de la armadura EP.



(ñ)

Se analiza la armadura ECu_1, figura 2-9f.

Las reacciones en los soportes son

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow -R_{BX} + 1 = 0 \Rightarrow \therefore R_{BX} = 1 \leftarrow$$

$$+\circlearrowright \sum MB = 0 \Rightarrow \therefore R_{CY} = 0 \qquad +\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow \therefore R_{BY} = 0$$

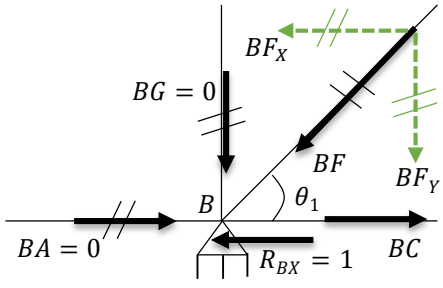
Se proporciona el cálculo de las fuerzas n_1 en las barras.

Si se analiza el nodo A, directamente se obtiene que las fuerzas AG y AB son nulas. Luego, si se hace un diagrama de cuerpo libre para el nodo G, al aplicar las ecuaciones de equilibrio resulta que las fuerzas GB y GF valen cero.

Nodo B, figura 2-9o.

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow BF_Y = 0 \Rightarrow \therefore BF = 0$$

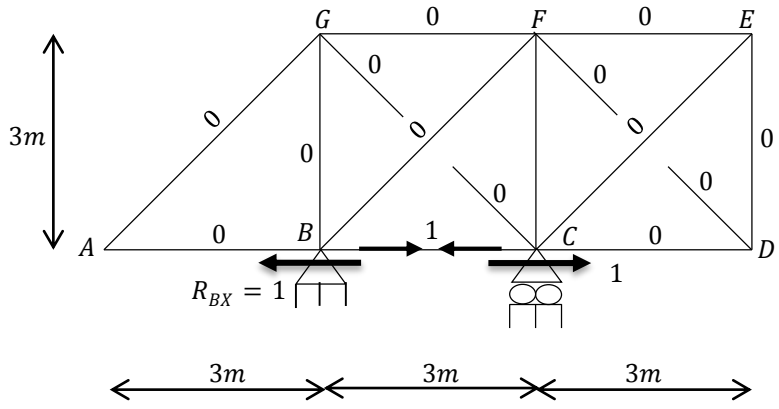
$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow \therefore BC = 1\ (Tensión)$$



(o)

Por inspección, se tiene que los siguientes elementos son de fuerza cero: FC y FE del nodo F, DE y DC con base en el nodo D, y EC a partir del nodo E.

Los resultados de las reacciones y las fuerzas n_1 en las barras de la armadura ECu_1, se visualizan en la figura 2-9p.



(p)

Se analiza la armadura ECu_2, figura 2-9g.

Como esta armadura no soporta cargas externas, todas las reacciones de los soportes equivalen a cero.

$$R_{BX} = R_{BY} = R_{CY} = 0$$

Enseguida se calculan las fuerzas n_2 en las barras.

A simple vista, del nodo A, se infiere que AG y AB son elementos de fuerza cero.

Nodo G, figura 2-9q.

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow GB - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow \therefore GB = 0.707107T\ (Compresión)$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} - GF = 0 \Rightarrow \therefore GF = 0.707107T\ (Compresión)$$

Nodo B, figura 2-9r.

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}} + BF_Y = 0 \Rightarrow BF(\sin\theta_1 =)\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow BF\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore BF = 1\ (Tensión)$$

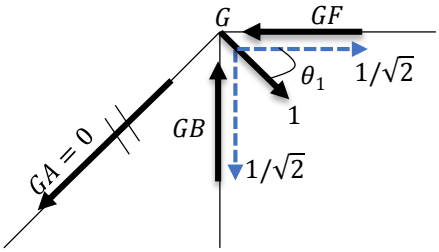
$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow -BC + BF_X = 0 \Rightarrow BC = BF(\cos\theta_1) \Rightarrow BC = 1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\therefore BC = 0.707107\ \ (Compresión)$$

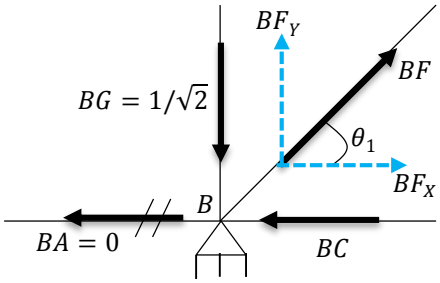
Nodo F, figura 2-9s.

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow -FB_Y + FC = 0 \Rightarrow FC = FB_Y \Rightarrow \therefore FC = 0.707107\ \ (Compresión)$$

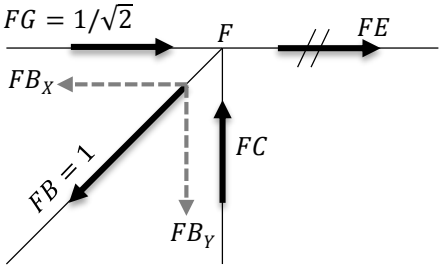
$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} - FB_X + FE = 0 \Rightarrow \therefore FE = 0$$



(q)



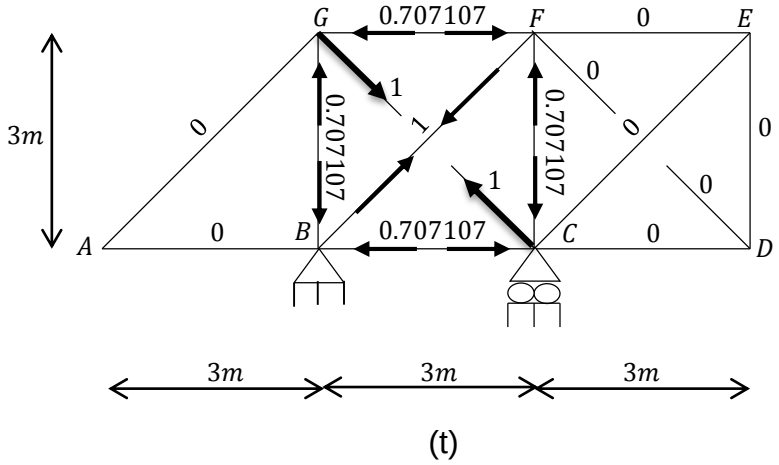
(r)



(s)

Con base en el nodo D, directamente se obtiene que DE y DC son elementos de fuerza cero. Asimismo, por inspección, del nodo E, la fuerza del elemento EC es nula.

En la figura 2-9t se muestran los resultados de las reacciones y las fuerzas n_2 en las barras de la armadura ECu_2.



(t)

Se analiza la armadura ECu_3, figura 2-9h.

Como esta armadura tampoco está sometida a cargas externas, se tiene

$$R_{BX} = R_{BY} = R_{CY} = 0$$

A continuación se calculan las fuerzas n_3 en las barras.

Sin la necesidad de hacer un análisis detallado, es fácil inferir que los siguientes elementos son de fuerza cero: AG y AB que se conectan al nodo A, GB y GF conectados entre sí en el nodo G, y BF y BC unidos en el nodo B.

Nodo F, figura 2-9u.

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow FC - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow \therefore FC = 0.707107 \ \ (Compresión)$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} - FE = 0 \Rightarrow \therefore FE = 0.707107 \ \ (Compresión)$$

Nodo D, figura 2-9v.

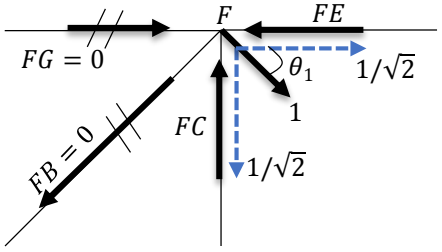
$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow -DE + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow \therefore DE = 0.707107 \ \ (Compresión)$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow DC - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow \therefore DC = 0.707107 \ \ (Compresión)$$

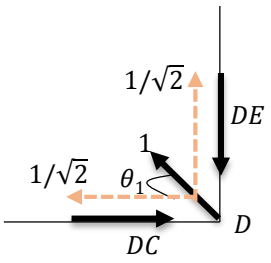
Nodo E, figura 2-9w.

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow -EC_X + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow EC(\cos\theta_1 =)\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow EC\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

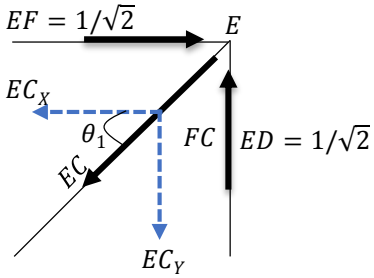
$$\therefore EC = 1\ (Tensión)$$



(u)

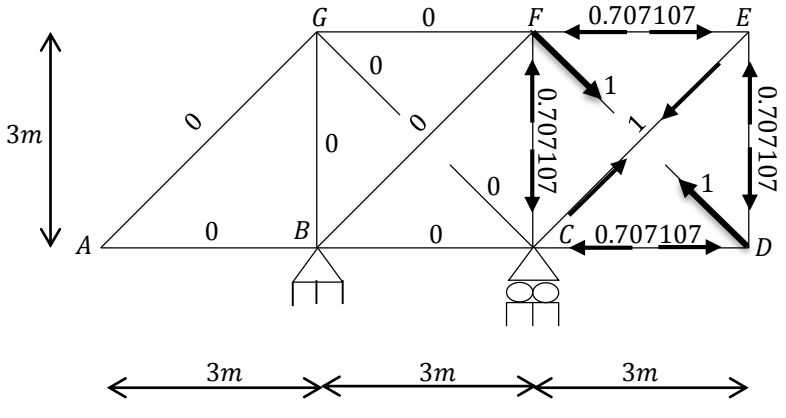


(v)



(w)

Las reacciones en los soportes y las fuerzas n_3 en las barras de la armadura ECu_3 se presentan esquemáticamente en la figura 2-9x.



(x)

En la tabla 2-3 se proporcionan los datos en forma tabular. Tome en cuenta que las fuerzas de tensión (jalan al nodo) se consideran positivas y las fuerzas de compresión (empujan al nodo) se consideran negativas. Se efectúan los productos requeridos para aplicar la ecuación del trabajo virtual. Se asume que $f_{ij} = f_{ij}$, lo cual es una consecuencia del Teorema de Maxwell de los desplazamientos recíprocos.

En consecuencia, las incompatibilidades geométricas son

$$d_1 = \sum \frac{Nn_1L}{AE} = \frac{0}{AE} = 0 \qquad d_2 = \sum \frac{Nn_2L}{AE} = \frac{-16.2426542}{AE}$$

$$d_3 = \sum \frac{Nn_3L}{AE} = \frac{-12.727926}{AE}$$

y los coeficientes de flexibilidad son

$$f_{11} = \sum \frac{n_1n_1L}{AE} = \frac{3}{AE} \qquad f_{21} = \sum \frac{n_1n_2L}{AE} = \frac{-2.121321}{AE}$$

$$f_{31} = \sum \frac{n_1n_3L}{AE} = \frac{0}{AE} = 0 \qquad f_{12} = f_{21} = \frac{-2.121321}{AE}$$

$$f_{22} = \sum \frac{n_2n_2L}{AE} = \frac{14.48528137}{AE} \qquad f_{32} = \sum \frac{n_2n_3L}{AE} = \frac{1.5}{AE}$$

$$f_{13} = f_{31} = \frac{0}{AE} = 0 \qquad f_{23} = f_{32} = \frac{1.5}{AE}$$

$$f_{33} = \sum \frac{n_3n_3L}{AE} = \frac{14.48528137}{AE}$$

Cálculo de las redundantes

El planteamiento matricial del sistema de ecuaciones (4), (5) y (6) de compatibilidad geométrica es

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_{CX} \\ b_9 \\ b_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{pmatrix} - - - (7)$$

Sustituyendo los resultados en la expresión (7) y despejando las incógnitas resulta

$$\begin{pmatrix} R_{CX} \\ b_9 \\ b_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2.121321 & 0 \\ -2.121321 & 14.48528137 & 1.5 \\ 0 & 1.5 & 14.48528137 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 16.2426542 \\ 12.727926 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.822553 \\ 1.16327 \\ 0.75822 \end{pmatrix}$$

No. Barra	L	N	n_1	n_2	n_3	Nn_1L	Nn_2L	Nn_3L	n_1n_1L	n_1n_2L	n_1n_3L	n_2n_2L	n_2n_3L	n_3n_3L
1	3	-6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	3	0	1	-0.707107	0	0	0	0	3	-2.121321	0	1.5	0	0
3	3	0	0	0	-0.707107	0	0	0	0	0	0	0	0	1.5
4	3	0	0	0	-0.707107	0	0	0	0	0	0	0	0	1.5
5	3	4	0	0	-0.707107	0	0	-8.485284	0	0	0	0	0	1.5
6	3	6	0	-0.707107	0	0	-12.727926	0	0	0	0	1.5	0	0
7	$3\sqrt{2}$	8.48528	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	3	-6	0	-0.707107	0	0	12.727926	0	0	0	0	1.5	0	0
9	$3\sqrt{2}$	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	$3\sqrt{2}$	0	0
10	$3\sqrt{2}$	-2.82843	0	1	0	0	-12.0000122	0	0	0	0	$3\sqrt{2}$	0	0
11	3	2	0	-0.707107	-0.707107	0	-4.242642	-4.242642	0	0	0	1.5	1.5	1.5
12	$3\sqrt{2}$	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	$3\sqrt{2}$
13	$3\sqrt{2}$	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	$3\sqrt{2}$
					$\sum$ =	0	-16.2426542	-12.727926	3	-2.121321	0	14.4852814	1.5	14.4852814

Tabla 2-3

Los signos positivos obtenidos para las redundantes indican que estas actúan en el mismo sentido que el propuesto para sus cargas unitarias correspondientes. Por lo tanto,

$$R_{CX} = 0.82255T \longrightarrow \qquad b_9 = 1.16327T\ (Tensión) \qquad b_{12} = 0.75822T\ \ (Tensión)$$

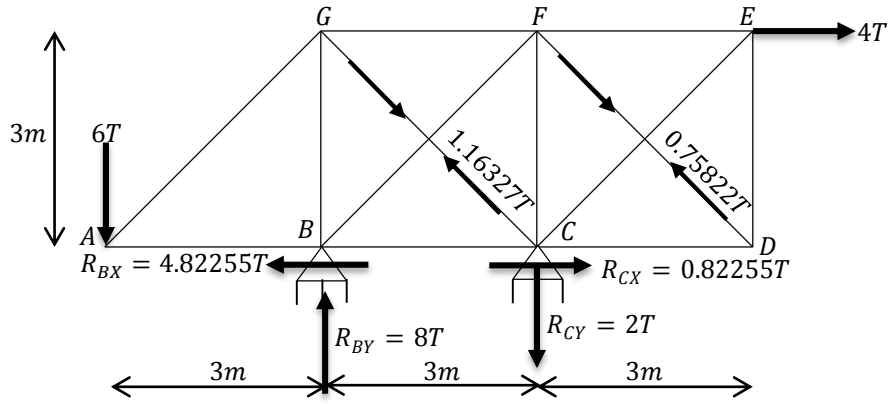
Ecuaciones de equilibrio

Ya que se han calculado las redundantes, se dibuja un diagrama de cuerpo libre y se determinan las reacciones restantes desconocidas a partir de las ecuaciones de equilibrio, figura 2-9y.

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow -R_{BX} + 4T + 0.822553T = 0 \Rightarrow \therefore R_{BX} = 4.82255T \leftarrow$$

$$+\circlearrowleft \sum MB = 0 \Rightarrow -6(3) + 4(3) + R_{CY}(3) = 0 \Rightarrow \therefore R_{CY} = 2T \downarrow$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow -6T + R_{BY} - 2T = 0 \Rightarrow \therefore R_{BY} = 8T \uparrow$$



(y)

Con base en el diagrama de la figura 2-9y, se calculan las fuerzas internas faltantes a través del método de los nodos.

Nodo A, figura 2-9z.

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow -6T + AG_Y = 0 \Rightarrow AG(\sin\theta_1) = 6T \Rightarrow AG\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 6T$$

$$\therefore AG = 8.48528T\ (Tensión)$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow AG_X - AB = 0 \Rightarrow AB = AG(\cos\theta_1)$$

$$AB = 8.48528T\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow\therefore AB = 6T\ (Compresión)$$

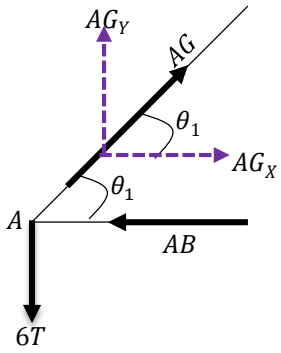
Nodo G, figura 2-9a´.

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow -GA_Y + GB - GC_Y = 0 \Rightarrow GB = GA_Y + GC_Y$$

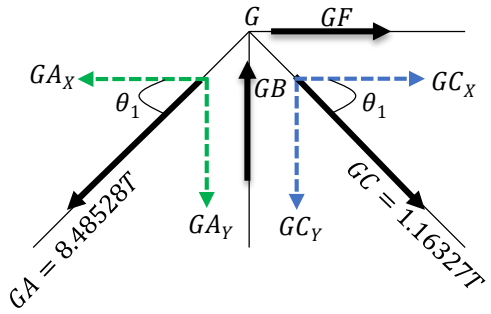
$$GB = 8.48528T\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow +1.16327T\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow\therefore GB = 6.82256T\ (Compresión)$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow -GA_X + GF + GC_X = 0 \Rightarrow GF = GA_X - GC_X$$

$$GF = 8.48528T\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 1.16327T\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow\therefore GF = 5.17744T\ (Tensión)$$



(z)



(a´)

Nodo B, figura 2-9b´.

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow 8T - 6.82256T - BF_Y = 0$$

$$BF = \frac{8T - 6.82256T}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \Rightarrow\therefore BF = 1.66515T\ (Compresión)$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow 6T - 4.822553T - BF_X + BC = 0$$

$$6T - 4.82255T - 1.66515T\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + BC = 0 \Rightarrow\therefore BC = 0$$

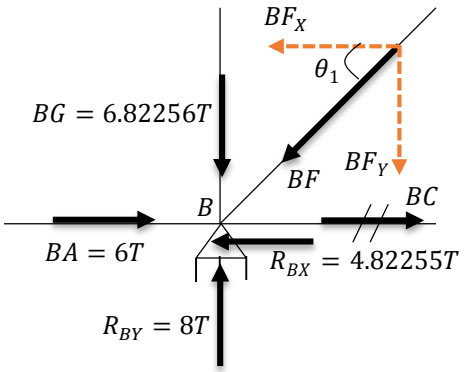
Nodo F, figura 2-9c´.

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow FB_Y - FC - FD_Y = 0 \Rightarrow FC = FB_Y - FD_Y$$

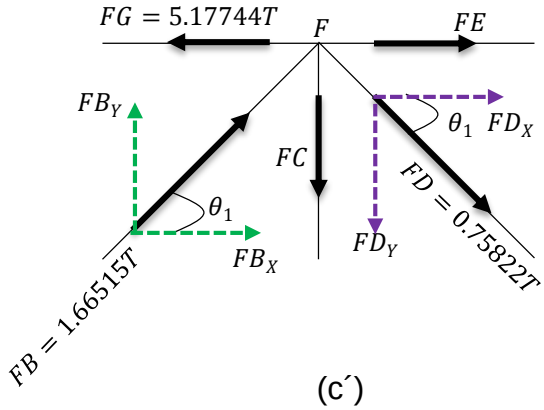
$$FC = 1.66515T\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 0.75822T\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow \therefore FC = 0.6413T \ \ (Tensión)$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow FB_X + FD_X + FE - 5.17744T = 0$$

$$FE = 5.17744T - 1.66515T\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 0.75822T\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow \therefore FE = 3.46385T \ \ (Tensión)$$



(b´)



(c´)

Nodo D, figura 2-9d´.

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow DF_Y - DE = 0 \Rightarrow DE = 0.75822T\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\therefore DE = 0.53614T \ \ (Compresión)$$

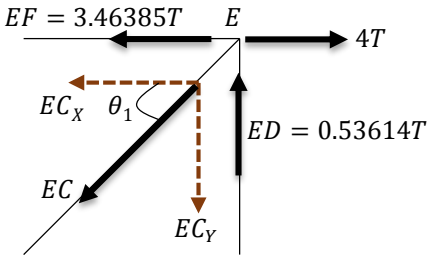
$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow -DF_X + DC = 0 \Rightarrow DC = 0.75822T\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\therefore DC = 0.53614T \ \ (Compresión)$$

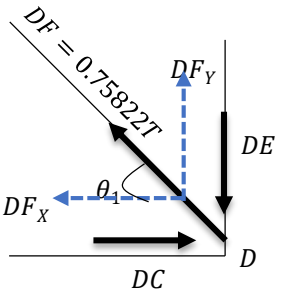
Nodo E, figura 2-9e´.

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow -3.46385T + 4T - EC_X = 0$$

$$EC = \frac{4T - 3.46385T}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \Rightarrow \therefore EC = 0.75822T\ (Tensión)$$

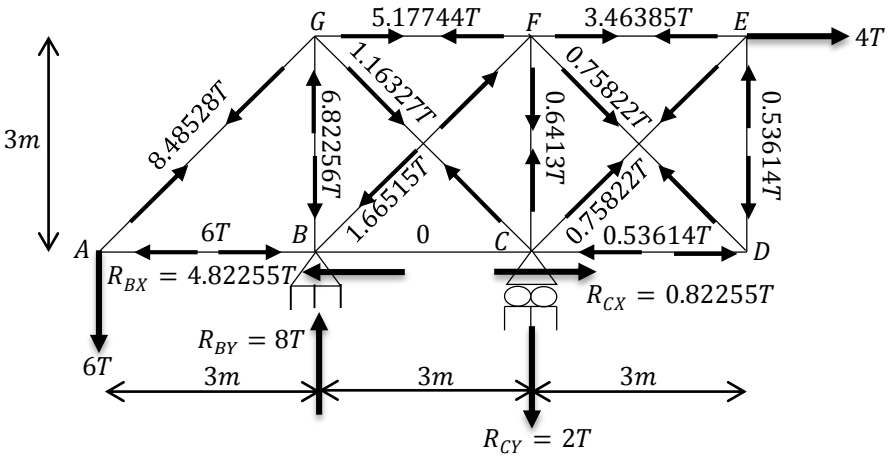


(e´)



(d´)

En la figura 2-9f´ se representa el diagrama de la armadura real en el que se visualizan todas las reacciones en los soportes y las fuerzas en las barras.

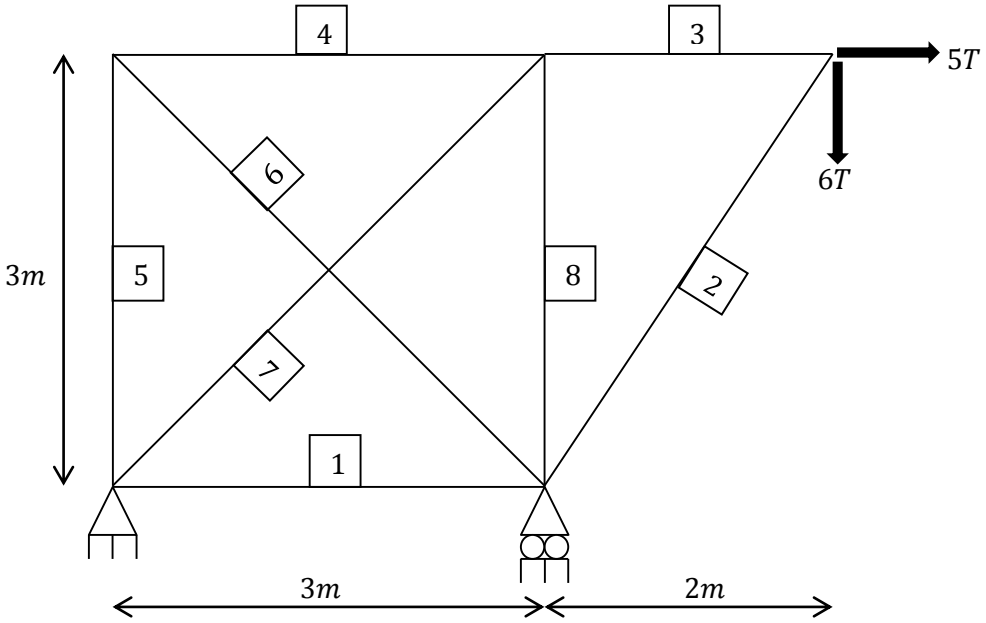


(f´)

Luego, es posible determinar el desplazamiento en algún punto de la armadura hiperestática, aplicando los mismos métodos que se emplean en las estructuras isostáticas, tales como el teorema de Castigliano o el principio del trabajo virtual.

Ejercicio 2.10 Método de la rigidez matricial aplicado a una armadura en 2D.

Instrucciones Empleando el método de la rigidez matricial, calcule las reacciones en los soportes y la fuerza en cada uno de los elementos de la armadura mostrada en la figura 2-10a. La sección transversal de los elementos $1, 2, 3, 4$ y 5 es rectangular con un ancho de $30cm$ y una altura de $40cm$, mientras que la sección transversal de los elementos $6, 7$ y 8 es cuadrada de $40cm$ por lado. El módulo de elasticidad para todas las barras es el de las maderas duras, es decir, $2.1 \cdot 10^6 \frac{T}{m^2}$.



(a)

Figura 2-10

SOLUCIÓN

Notación

Cuando una estructura se va a analizar empleando el método matricial de la rigidez, se requiere de la subdivisión de esta en una serie de elementos finitos discretos e identificar sus puntos extremos como nodos. Si se trata de una armadura, las barras o elementos que la componen representan los elementos finitos y los nodos son equivalentes a las juntas.

Cada elemento y cada nodo se identifican arbitrariamente mediante un número encerrado en un cuadrado y un número dentro de un círculo respectivamente, y los extremos lejano F (del inglés Far) y cercano N (del inglés Near) de cada elemento se simbolizan en forma arbitraria con una flecha a lo largo del mismo cuya punta o cabeza se dirige hacia el extremo alejado. Se establece un sistema de coordenadas globales con un origen que puede situarse en cualquier punto; generalmente se usan los ejes x (horizontal) y y (vertical) cuya dirección positiva tiene un sentido hacia la derecha y hacia arriba de forma respectiva.

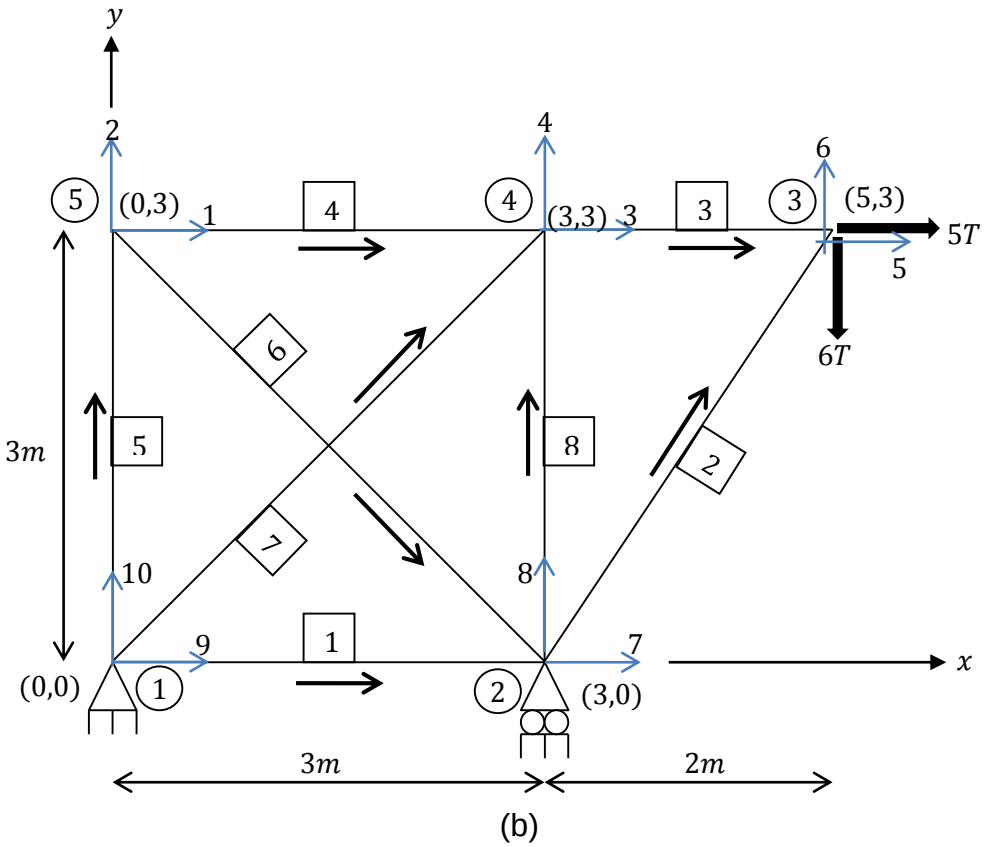
Hay dos grados de libertad o dos posibles desplazamientos por nodo de armadura, los cuales individualmente se especificarán a través de un número de código y serán referenciados mediante una flecha de color azul orientada en su dirección coordenada global positiva.

Los desplazamientos incógnita deben codificarse numéricamente primero, puesto que, como se verá más adelante, cuando se formule la matriz de rigidez de la estructura y se seccione, esto nos proporcionará la manera más directa para hallar sus valores. En general, en un nodo donde no haya algún soporte, los desplazamientos horizontal y vertical son desconocidos. Por su parte, en un apoyo simple o rodillo sólo se genera una reacción que es una fuerza que actúa perpendicularmente a la superficie en el punto de contacto, así que tal tipo de soporte es capaz de no permitir el desplazamiento en la dirección de su reacción, pero incapaz de impedir el desplazamiento perpendicular a la dirección de su fuerza reactiva en su nodo de aplicación. En tanto, un apoyo articulado, pasador o bisagra no permite los desplazamientos horizontal y vertical en su nodo de ubicación debido a las fuerzas reactivas surgidas en tales direcciones. Cabe mencionar que los argumentos para el apoyo en turno son válidos si a este no se le impone un desplazamiento inicial como lo puede ser un asentamiento.

Ahora se aplica el algoritmo anterior a este ejercicio. Nótese en la figura 2-10b que la armadura se compone de ocho elementos y se ha usado la numeración predeterminada en ellos, aunque bien pudo haberse utilizado otro orden al numerarlos. Se han trazado flechas a lo largo de los ocho elementos para nombrar

a los nodos cercano N y lejano F del elemento; desde luego, esta asignación se hizo arbitrariamente, por lo que el lector puede elegir un sentido opuesto en alguna, algunas e incluso todas estas flechas.

Dado que hay cinco nodos en la armadura (numerados también en un orden indistinto, el lector puede usar otra numeración), se tienen diez desplazamientos posibles a los que se les han destinado códigos del 1 al 10; los codificados desde el 1 hasta el 7 representan desplazamientos cuyo valor se desconoce puesto que no están restringidos o están permitidos, mientras que del 8 al 10 representan desplazamientos que se sabe con exactitud cuánto valen ya que están restringidos; dadas las restricciones de los soportes, estos últimos tres desplazamientos están impedidos. El origen de los ejes x, y se asocia en ①, debido a que de ese modo todos los nodos tendrán coordenadas positivas.



(b)

A continuación se analiza la secuencia en la que se numeraron los grados de libertad. Nodo a nodo fue observado con detenimiento. En las juntas ③, ④ y ⑤, al haber ausencia de soporte, las dos componentes de desplazamiento son incógnitas. Luego, debido a que en ② se posiciona un apoyo simple y por la forma en la que está orientado dicho apoyo, en ese nodo el desplazamiento horizontal se desconoce y el desplazamiento vertical se sabe que es nulo. Por último, la presencia de un

apoyo articulado en ① hace que tal nodo esté limitado por el desplazamiento. Una vez que se detectaron los desplazamientos desconocidos, se numeraron al azar. En seguida, los desplazamientos conocidos también fueron numerados con un orden indistinto, posterior a su debida identificación.

Finalmente, las coordenadas x, y de cada nodo se referencian por números entre paréntesis adyacentes a los mismos.

Cosenos directores y matriz de rigidez global para cada elemento

Como ya se mencionó, para el sistema de coordenadas globales se considera la x positiva hacia la derecha y la y positiva hacia arriba. Por otra parte, cada elemento tiene un sistema coordenado propio o local, el cual se usa para especificar el sentido de sus desplazamientos y sus cargas internas. Este sistema es definido a través de los ejes x', y' con el origen en el nodo cercano N y el eje x' coincidiendo con el eje longitudinal del elemento y señalando hacia el extremo alejado F.

La matriz de rigidez en coordenadas locales k'_i de un elemento i puede determinarse con esta ecuación:

$$k'_i = \frac{AE}{L}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (2-1)$$

donde

$A =$ área de la sección transversal del elemento.

$E =$ módulo de elasticidad del elemento.

$L =$ longitud del elemento.

Los cuatro elementos que conforman la matriz anterior se denominan coeficientes de influencia de la rigidez del elemento.

Para hacer compatibles las matrices de rigidez de los elementos, estas deben transformarse del sistema local al global, lo cual significa que la ecuación $2-1$ no se ocupará a la hora de la resolución del ejercicio.

Los ángulos más pequeños entre los ejes x, y globales positivos y el eje local x' positivo se designan como θ_x y θ_y. Los cosenos de esos ángulos se denominan cosenos directores y se evalúan con las siguientes ecuaciones:

$$\lambda_x = cos\theta_x = \frac{x_F - x_N}{L} = \frac{x_F - x_N}{\sqrt{(x_F - x_N)^2 + (y_F - y_N)^2}} \qquad (2-2)$$

$$\lambda_y = cos\theta_y = \frac{y_F - y_N}{L} = \frac{y_F - y_N}{\sqrt{(x_F - x_N)^2 + (y_F - y_N)^2}} \qquad (2-3)$$

donde

$x_N,\ y_N =$ coordenadas x, y del extremo cercano N del elemento en turno.

$x_F,\ y_F =$ coordenadas x, y del extremo lejano F del elemento en turno.

$L =$ longitud del elemento.

La expresión matemática para calcular la matriz de rigidez en coordenadas globales k_i de un elemento i, la cual tiene la propiedad de ser simétrica, es

$$k_i = \frac{AE}{L}\begin{matrix} \\ N_x \\ N_y \\ F_x \\ F_y \end{matrix}\begin{matrix} \begin{matrix} N_x & N_y & F_x & F_y \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} \lambda_x^2 & \lambda_x\lambda_y & -\lambda_x^2 & -\lambda_x\lambda_y \\ \lambda_x\lambda_y & \lambda_y^2 & -\lambda_x\lambda_y & -\lambda_y^2 \\ -\lambda_x^2 & -\lambda_x\lambda_y & \lambda_x^2 & \lambda_x\lambda_y \\ -\lambda_x\lambda_y & -\lambda_y^2 & \lambda_x\lambda_y & \lambda_y^2 \end{pmatrix} \end{matrix} \qquad (2-4)$$

donde

$A =$ área de la sección transversal del elemento.

$E =$ módulo de elasticidad del elemento.

$L =$ longitud del elemento.

$N_x,\ N_y =$ número de código del grado de libertad global asociado con el extremo cercano N en las direcciones x y y respectivamente del elemento en turno.

$F_x,\ F_y =$ número de código del grado de libertad global asociado con el extremo lejano F en las direcciones x y y respectivamente del elemento en turno.

$\lambda_x,\ \lambda_y =$ cosenos directores.

Como el enfoque de este libro es la solución detallada de los ejercicios, en este caso armaduras, se recomienda al lector remitirse a algún otro texto en caso de desear comprender la deducción matemática del método de rigidez matricial íntegramente. La obra titulada “Análisis Estructural” escrita por R. C. Hibbeler, octava edición, es una gran alternativa.

De acuerdo a la información proporcionada al inicio del problema, para los elementos 1 hasta 5 se tiene

$$A = (0.3m)(0.4m) = 0.12m^2 \qquad AE = (0.12m^2)\left(2.1 \cdot 10^6\, {}^{T}/_{m^2}\right) = 252000\, T$$

y para los elementos 6, 7 y 8 se sabe que

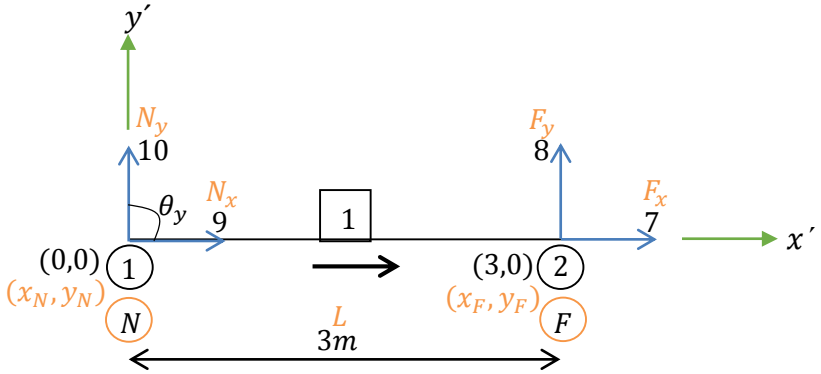
$$A = (0.4m)(0.4m) = 0.16m^2 \qquad AE = (0.16m^2)\left(2.1 \cdot 10^6\, {}^{T}/_{m^2}\right) = 336000\, T$$

Se aislará cada elemento de la armadura, figuras 2-10c hasta 2-10j, con el objetivo de visualizar con mayor facilidad individualmente su longitud y número, así como sus nodos N y F con sus correspondientes coordenadas globales x_N, y_N y x_F, y_F, y sus debidos números de código de grado de libertad N_x, N_y y F_x, F_y. Además, con el único fin de esclarecer quienes son los cosenos directores de las barras, se coloca el sistema local x', y', y se identifican los ángulos θ_x y θ_y; si el lector lo cree conveniente, puede ignorar éste último sistema y los ángulos mencionados en las figuras citadas, debido a que los cosenos directores en este texto se infieren empleando coordenadas.
Paralelamente a cada aislamiento, se van aplicando las ecuaciones $2-2$, $2-3$ y $2-4$.

Elemento 1. De acuerdo a la figura 2-10c, ① es el extremo cercano y ② es el extremo lejano. Por lo tanto,

$$L = 3m \qquad \lambda_x = \frac{3-0}{3} = 1 \qquad \lambda_y = \frac{0-0}{3} = 0$$

$$k_1 = \begin{array}{c} \begin{matrix} 9 & 10 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 84000 & 0 & -84000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -84000 & 0 & 84000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 9 \\ 10 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} \end{array}$$

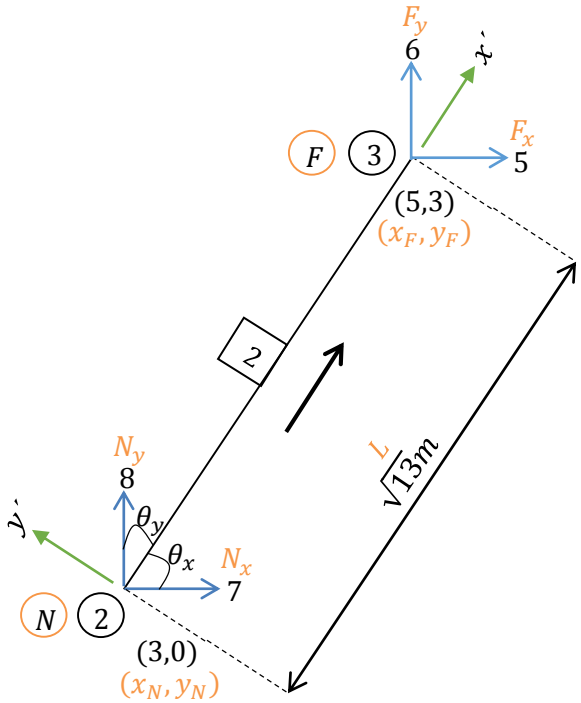


(c)

Elemento 2. Debido a que el extremo cercano es ② y el extremo lejano es ③, figura 2-10d, obtenemos

$$L = \sqrt{(2m)^2 + (3m)^2} = \sqrt{13}m \qquad \lambda_x = \frac{5-3}{\sqrt{13}} = 0.5547 \qquad \lambda_y = \frac{3-0}{\sqrt{13}} = 0.8321$$

$$k_2 = \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} 7 & 8 & 5 & 6 \end{matrix} \begin{pmatrix} 21505.8375 & 32262.2509 & -21505.8375 & -32262.2509 \\ 32262.2509 & 48393.3764 & -32262.2509 & -48393.3764 \\ -21505.8375 & -32262.2509 & 21505.8375 & 32262.2509 \\ -32262.2509 & -48393.3764 & 32262.2509 & 48393.3764 \end{pmatrix} \begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

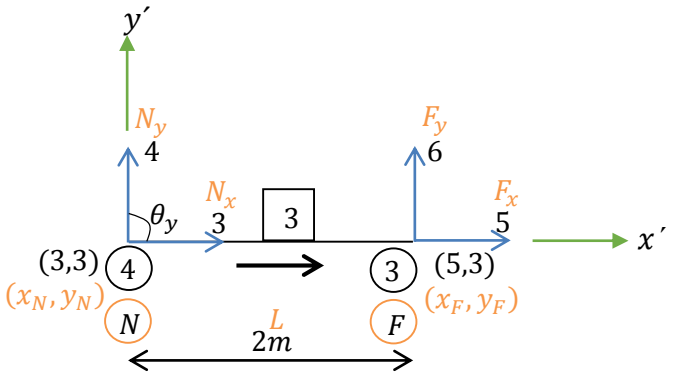


(d)

Elemento 3. Puesto que el extremo cercano es ④ y el extremo lejano es ③, figura 2-10e, se tiene

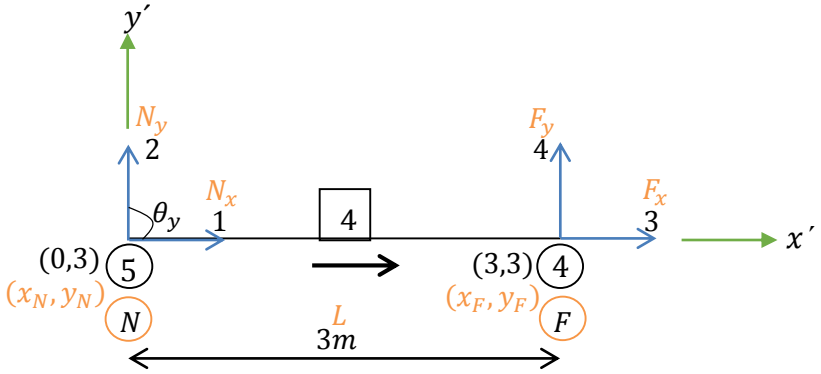
$$L = 2m \qquad \lambda_x = \frac{5-3}{2} = 1 \qquad \lambda_y = \frac{3-3}{2} = 0$$

$$k_3 = \begin{matrix} \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 126000 & 0 & -126000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -126000 & 0 & 126000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$



(e)

Elemento 4. Dado que el extremo cercano es ⑤ y el extremo lejano es ④, figura 2-10f, se infiere



(f)

$$L = 3m \qquad \lambda_x = \frac{3-0}{3} = 1 \qquad \lambda_y = \frac{3-3}{3} = 0$$

$$k_4 = \begin{matrix} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 84000 & 0 & -84000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -84000 & 0 & 84000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

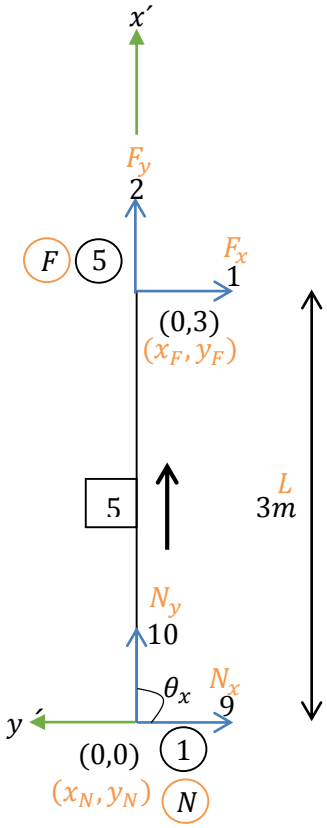
Elemento 5. Como ① es el extremo cercano y ⑤ es el extremo lejano, figura 2-10g, se deduce

$$L = 3m \qquad \lambda_x = \frac{0-0}{3} = 0 \qquad \lambda_y = \frac{3-0}{3} = 1$$

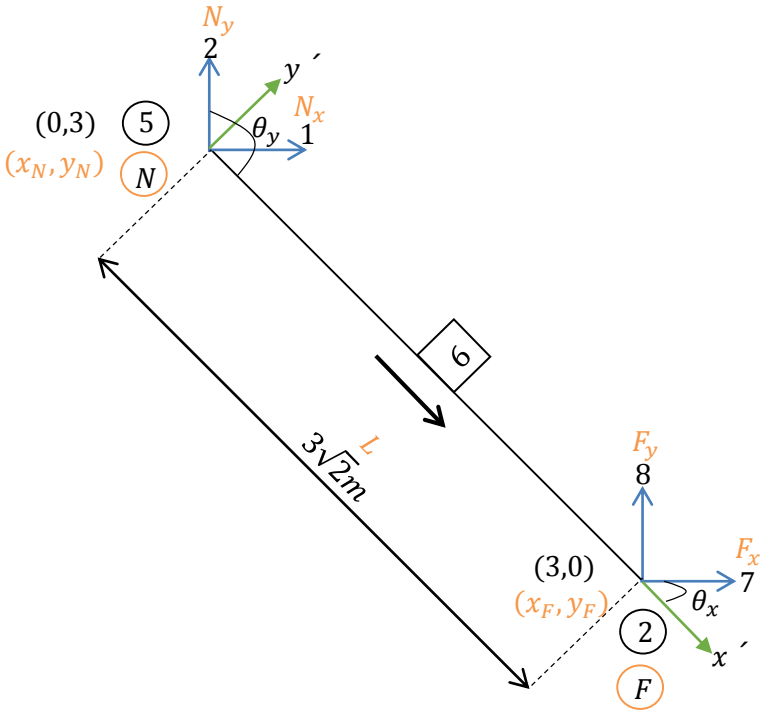
$$k_5 = \begin{matrix} \\ 9 \\ 10 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} 9 & 10 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 84000 & 0 & -84000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -84000 & 0 & 84000 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Elemento 6. Como el extremo cercano es ⑤ y el extremo lejano es ②, figura 2-10h, resulta

$$L = \sqrt{(3m)^2 + (3m)^2} = 3\sqrt{2}m \qquad \lambda_x = \frac{3-0}{3\sqrt{2}} = 0.7071 \qquad \lambda_y = \frac{0-3}{3\sqrt{2}} = -0.7071$$



(g)



(h)

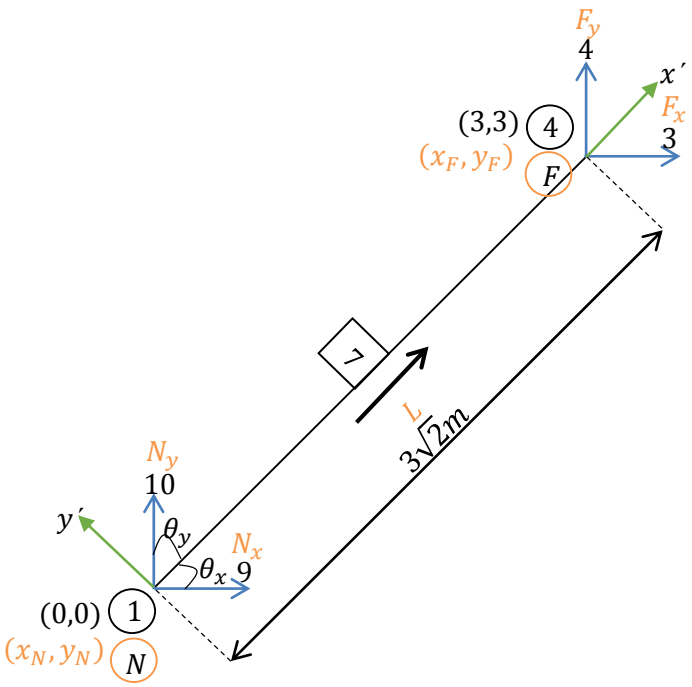
$$k_6 = \begin{matrix} \\ 1 \\ 2 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} 1 & 2 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 39597.9798 & -39597.9798 & -39597.9798 & 39597.9798 \\ -39597.9798 & 39597.9798 & 39597.9798 & -39597.9798 \\ -39597.9798 & 39597.9798 & 39597.9798 & -39597.9798 \\ 39597.9798 & -39597.9798 & -39597.9798 & 39597.9798 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Elemento 7. Debido a que el extremo cercano es ① y el extremo lejano es ④, figura 2-10i, se obtiene

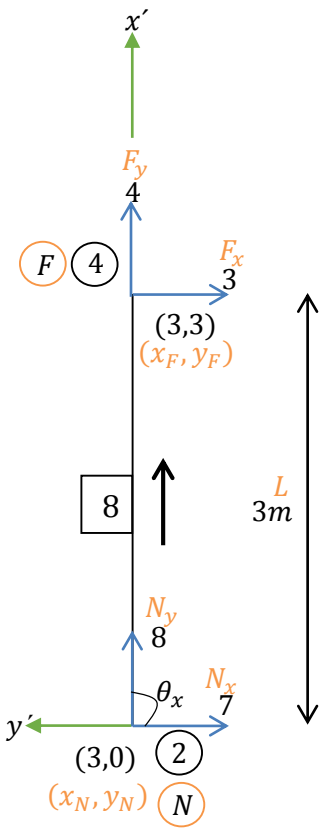
$$L = 3\sqrt{2}m \qquad \lambda_x = \frac{3-0}{3\sqrt{2}} = 0.7071 \qquad \lambda_y = \frac{3-0}{3\sqrt{2}} = 0.7071$$

$$k_7 = \begin{matrix} \\ 9 \\ 10 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} 9 & 10 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 39597.9798 & 39597.9798 & -39597.9798 & -39597.9798 \\ 39597.9798 & 39597.9798 & -39597.9798 & -39597.9798 \\ -39597.9798 & -39597.9798 & 39597.9798 & 39597.9798 \\ -39597.9798 & -39597.9798 & 39597.9798 & 39597.9798 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Elemento 8. Puesto que el extremo cercano es ② y el extremo lejano es ④, figura 2-10j, tenemos



(i)



(j)

$$L = 3m \qquad \lambda_x = \frac{3-3}{3} = 0 \qquad \lambda_y = \frac{3-0}{3} = 1$$

$$k_8 = \begin{matrix} \\ 7 \\ 8 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} 7 & 8 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 112000 & 0 & -112000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -112000 & 0 & 112000 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Matriz de rigidez de la estructura

Como se designaron diez grados de libertad para la armadura, figura 2-10b, la matriz de rigidez tiene un orden de $10\ X\ 10$ y se obtiene al sumar algebraicamente los elementos correspondientes a las ocho matrices anteriores. Para visualizar el proceso de ensamble con mayor facilidad, se expanden con ceros las filas y columnas numéricas faltantes en cada k_i. Los valores calculados previamente cuando se empleó la ecuación $2-4$ aparecen de color azul con la finalidad de distinguirlos.

$$k_1 = \begin{matrix} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 84000 & 0 & -84000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -84000 & 0 & 84000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$k_2 = \begin{matrix} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 21505.8375 & 32262.2509 & -21505.8375 & -32262.2509 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 32262.2509 & 48393.3764 & -32262.2509 & -48393.3764 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -21505.8375 & -32262.2509 & 21505.8375 & 32262.2509 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -32262.2509 & -48393.3764 & 32262.2509 & 48393.3764 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$k_3 = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 126000 & 0 & -126000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -126000 & 0 & 126000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix} \end{array}$$

$$k_4 = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 84000 & 0 & -84000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -84000 & 0 & 84000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix} \end{array}$$

$$k_5 = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 84000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -84000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -84000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 84000 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix} \end{array}$$

$$k_6 = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 39597.9798 & -39597.9798 & 0 & 0 & 0 & 0 & -39597.9798 & 39597.9798 & 0 & 0 \\ -39597.9798 & 39597.9798 & 0 & 0 & 0 & 0 & 39597.9798 & -39597.9798 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -39597.9798 & 39597.9798 & 0 & 0 & 0 & 0 & 39597.9798 & -39597.9798 & 0 & 0 \\ 39597.9798 & -39597.9798 & 0 & 0 & 0 & 0 & -39597.9798 & 39597.9798 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix} \end{array}$$

$$k_7 = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 39597.9798 & 39597.9798 & 0 & 0 & 0 & 0 & -39597.9798 & -39597.9798 \\ 0 & 0 & 39597.9798 & 39597.9798 & 0 & 0 & 0 & 0 & -39597.9798 & -39597.9798 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -39597.9798 & -39597.9798 & 0 & 0 & 0 & 0 & 39597.9798 & 39597.9798 \\ 0 & 0 & -39597.9798 & -39597.9798 & 0 & 0 & 0 & 0 & 39597.9798 & 39597.9798 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix}$$

$$k_8 = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 112000 & 0 & 0 & 0 & -112000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -112000 & 0 & 0 & 0 & 112000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix}$$

Una vez efectuado el procedimiento de expansión en todas las k_i, estas se suman. Por consiguiente,

$$K = k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 + k_6 + k_7 + k_8$$

$$K = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{cccccc|cccc} 123597.9798 & -39597.9798 & -84000 & 0 & 0 & 0 & -39597.9798 & 39597.9798 & 0 & 0 \\ -39597.9798 & 123597.9798 & 0 & 0 & 0 & 0 & 39597.9798 & -39597.9798 & 0 & -84000 \\ -84000 & 0 & 249597.9798 & 39597.9798 & -126000 & 0 & 0 & 0 & -39597.9798 & -39597.9798 \\ 0 & 0 & 39597.9798 & 151597.9798 & 0 & 0 & 0 & -112000 & -39597.9798 & -39597.9798 \\ 0 & 0 & -126000 & 0 & 147505.8357 & 32262.2509 & -21505.8375 & -32262.2509 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 32262.2509 & 48393.3764 & -32262.2509 & -48393.3764 & 0 & 0 \\ \hline -39597.9798 & 39597.9798 & 0 & 0 & -21505.8375 & -32262.2509 & 145103.8173 & -7335.7289 & -84000 & 0 \\ 39597.9798 & -39597.9798 & 0 & -112000 & -32262.2509 & -48393.3764 & -7335.7289 & 199991.3562 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -39597.9798 & -39597.9798 & 0 & 0 & -84000 & 0 & 123597.9798 & 39597.9798 \\ 0 & -84000 & -39597.9798 & -39597.9798 & 0 & 0 & 0 & 0 & 39597.9798 & 123597.9798 \end{array}\right) \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix}$$

Para no realizar el proceso de ensamble anterior, obsérvese como puede calcularse cada entrada de la matriz de rigidez de la estructura. Por ejemplo, para obtener $K_{1,1}$, es decir, la entrada de K correspondiente a la fila 1 y columna 1, se detectan todas las entradas 1,1 que son visibles en las matrices k_i sin expandir, en este caso, de

los elementos 4,5 y 6 se tiene $(k_{1,1})_4 = 84000$, $(k_{1,1})_5 = 0$ y $(k_{1,1})_6 = 39597.9798$. Luego, es obvio que las k_i sin expandir restantes almacenan valores nulos en sus respectivas entradas 1,1 al no ser visibles, así que, $(k_{1,1})_1 = (k_{1,1})_2 = (k_{1,1})_3 = (k_{1,1})_7, (k_{1,1})_8 = 0$, por lo que podemos ignorarlos. En consecuencia, $K_{1,1} = 84000 + 0 + 39597.9798 = 123597.9798$. Se debe efectuar un procedimiento análogo para las demás entradas hasta obtener K en su totalidad.

Ya que siete desplazamientos fueron identificados como desconocidos en la armadura, la matriz de rigidez de la estructura se seccionó de tal forma que en la parte izquierda quedaran siete columnas y en la porción superior se tuvieran siete filas; esta partición se efectuó con el fin de que sea compatible con las particiones de los vectores de desplazamientos y de cargas que en el próximo apartado se formularán. Entonces, K quedó dividida en cuatro submatrices que tienen la siguiente nomenclatura:

$$K = \left(\begin{array}{c|c} K_{11} & K_{12} \\ \hline K_{21} & K_{22} \end{array}\right) \qquad (2-5)$$

Vectores de desplazamientos y de cargas

Se plantea el vector total de desplazamientos externos D y se divide en dos vectores: el de desplazamientos desconocidos D_D y el de desplazamientos conocidos D_C. Como ya se había comentado en el apartado de notación, los desplazamientos codificados del 1 al 7 son desconocidos, por lo que D_D comprende desde D_1 hasta D_7, en tanto, los desplazamientos codificados del 8 al 10 corresponden a los conocidos, así que evidentemente D_C abarca D_8, D_9 y D_{10}.

Para denotar un desplazamiento en la dirección horizontal se usa Δ_H, mientras que para significar un desplazamiento vertical se emplea δ_V; en ambos símbolos aparece también como subíndice un número que indica el nodo donde ocurre el desplazamiento.
Siendo así y con base en la figura 2-10b, obsérvese como, por ejemplo, el desplazamiento codificado con 1 es el desplazamiento horizontal en el nodo ⑤, es decir, $D_1 = \Delta_{H5}$, o bien, el desplazamiento 2 es el vertical del nodo ⑤, o sea, $D_2 = \delta_{V5}$. A su vez, recordemos que los desplazamientos codificados con 8,9 y 10 son nulos debido a que los soportes ② y ① los impiden de manera respectiva, dado que a esos apoyos no se les ha impuesto un desplazamiento, en consecuencia, $D_8 = D_9 = D_{10} = 0$.

$$D = \begin{pmatrix} D_D \\ \hline D_C \end{pmatrix} \qquad (2-6)$$

$$D = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ \hline D_7 \\ D_8 \\ D_9 \\ D_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_{H5} \\ \delta_{V5} \\ \Delta_{H4} \\ \delta_{V4} \\ \Delta_{H3} \\ \delta_{V3} \\ \hline \Delta_{H2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix}$$

Se procede a plantear el vector total de cargas externas C, el cual se secciona dando origen al vector de cargas conocidas C_C y al vector de cargas desconocidas C_D. De la figura 2-10, nótese que las cargas externas en las direcciones 5 y 6 son de $5T$ y y $6T$ actuando en las direccciones x positiva y y negativa respectivamente, por consiguiente, $C_5 = 5T$ y $C_6 = -6T$. También vease como no hay cargas externas aplicadas en las direcciones $1, 2, 3, 4$ y 7, de ahí que $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_7 = 0$. Así mismo, por inspección, se puede apreciar que en las direcciones $8, 9$ y 10 se presentan las reacciones en y del soporte ②, y en x y y del soporte ①; como se desconoce la magnitud y el sentido de ellas, estas fuerzas deben proponerse en el vector como positivas, es por eso que $C_8 = R_{2y}$, $C_9 = R_{1x}$ y $C_{10} = R_{1y}$.

$$C = \begin{pmatrix} C_C \\ \hline C_D \end{pmatrix} \qquad (2-7)$$

$$C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ \hline C_7 \\ C_8 \\ C_9 \\ C_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ -6 \\ \hline 0 \\ R_{2y} \\ R_{1x} \\ R_{1y} \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix}$$

Cálculo de los desplazamientos incógnita y las reacciones en los soportes

Luego de haber construido la matriz de rigidez de la estructura, las componentes de la carga global C que actúan sobre la armadura se vinculan con sus desplazamientos globales D por medio de la ecuación de rigidez de la estructura que es

$$C = KD \qquad (2-8)$$

Combinando las ecuaciones $2-5$, $2-6$ y $2-7$ con la ecuación $2-8$ da

$$\left(\frac{C_C}{C_D}\right) = \left(\frac{K_{11}}{K_{21}} \middle| \frac{K_{12}}{K_{22}}\right)\left(\frac{D_D}{D_C}\right) \qquad (2-9)$$

Ahora se infiere como este sistema de ecuaciones tiene la propiedad de que puede descomponerse en dos subsistemas de ecuaciones: el primero de estos sistemas relaciona únicamente los desplazamientos incógnita con las fuerzas conocidas y los desplazamientos conocidos, y constituye un sistema compatible determinado, mientras que el segundo subsistema contiene las reacciones incógnita y una vez resuelto el primer subsistema es de resolución trivial.

Expandiendo la ecuación $2-9$ se tiene

$$C_C = K_{11}D_D + K_{12}D_C \qquad (2-10)$$

$$C_D = K_{21}D_D + K_{22}D_C \qquad (2-11)$$

Atendemos al subsistema 1. Puesto que para esta armadura el vector de desplazamientos conocidos es un vector nulo dado que los soportes no se desplazan, $D_C = 0$. De ese modo, la ecuación $1-10$ se reduce notablemente a

$$C_C = K_{11}D_D \qquad (2-12)$$

Despejando D_D de la ecuación $2-12$, se obtienen evidentemente los desplazamientos incógnita directamente.

$$D_D = (K_{11})^{-1}C_C \qquad (2-13)$$

De inmediato nos ocupamos del subsistema 2. La ecuación $2-11$ también se simplifica notoriamente por el hecho de que D_C es nulo. Por lo tanto, las reacciones en los soportes se infieren con la siguiente expresión:

$$C_D = K_{21}D_D \qquad (2-14)$$

Al plantear la ecuación $2-8$ (o la ecuación $2-9$) para esta armadura resulta

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ -6 \\ 0 \\ \hline R_{2y} \\ R_{1x} \\ R_{1y} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cccccccc|ccc} 123597.9798 & -39597.9798 & -84000 & 0 & 0 & 0 & -39597.9798 & 39597.9798 & 0 & 0 \\ -39597.9798 & 123597.9798 & 0 & 0 & 0 & 0 & 39597.9798 & -39597.9798 & 0 & -84000 \\ -84000 & 0 & 249597.9798 & 39597.9798 & -126000 & 0 & 0 & 0 & -39597.9798 & -39597.9798 \\ 0 & 0 & 39597.9798 & 151597.9798 & 0 & 0 & 0 & -112000 & -39597.9798 & -39597.9798 \\ 0 & 0 & -126000 & 0 & 147505.8357 & 32262.2509 & -21505.8375 & -32262.2509 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 32262.2509 & 48393.3764 & -32262.2509 & -48393.3764 & 0 & 0 \\ -39597.9798 & 39597.9798 & 0 & 0 & -21505.8375 & -32262.2509 & 145103.8173 & -7335.7289 & -84000 & 0 \\ \hline 39597.9798 & -39597.9798 & 0 & -112000 & -32262.2509 & -48393.3764 & -7335.7289 & 199991.3562 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -39597.9798 & -39597.9798 & 0 & 0 & -84000 & 0 & 123597.9798 & 39597.9798 \\ 0 & -84000 & -39597.9798 & -39597.9798 & 0 & 0 & 0 & 0 & 39597.9798 & 123597.9798 \end{array}\right)\begin{pmatrix} \Delta_{H5} \\ \delta_{V5} \\ \Delta_{H4} \\ \delta_{V4} \\ \Delta_{H3} \\ \delta_{V3} \\ \Delta_{H2} \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se extrae el primer subsistema y se resuelve. Puede verse que la ecuación resultante es como la ecuación $2-12$ y el despeje de la misma tiene la forma de la ecuación $2-13$.

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\5\\-6\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}123597.9798 & -39597.9798 & -84000 & 0 & 0 & 0 & -39597.9798\\ -39597.9798 & 123597.9798 & 0 & 0 & 0 & 0 & 39597.9798\\ -84000 & 0 & 249597.9798 & 39597.9798 & -126000 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 39597.9798 & 151597.9798 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -126000 & 0 & 147505.8357 & 32262.2509 & -21505.8375\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 32262.2509 & 48393.3764 & -32262.2509\\ -39597.9798 & 39597.9798 & 0 & 0 & -21505.8375 & -32262.2509 & 145103.8173\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta_{H5}\\ \delta_{V5}\\ \Delta_{H4}\\ \delta_{V4}\\ \Delta_{H3}\\ \delta_{V3}\\ \Delta_{H2}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\Delta_{H5}\\ \delta_{V5}\\ \Delta_{H4}\\ \delta_{V4}\\ \Delta_{H3}\\ \delta_{V3}\\ \Delta_{H2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}123597.9798 & -39597.9798 & -84000 & 0 & 0 & 0 & -39597.9798\\ -39597.9798 & 123597.9798 & 0 & 0 & 0 & 0 & 39597.9798\\ -84000 & 0 & 249597.9798 & 39597.9798 & -126000 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 39597.9798 & 151597.9798 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -126000 & 0 & 147505.8357 & 32262.2509 & -21505.8375\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 32262.2509 & 48393.3764 & -32262.2509\\ -39597.9798 & 39597.9798 & 0 & 0 & -21505.8375 & -32262.2509 & 145103.8173\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\5\\-6\\0\end{pmatrix}$$

Al llevar a cabo el producto matricial señalado, dan los siguientes resultados para los desplazamientos horizontales y verticales en los nodos considerados:

$$\begin{pmatrix}\Delta_{H5}\\ \delta_{V5}\\ \Delta_{H4}\\ \delta_{V4}\\ \Delta_{H3}\\ \delta_{V3}\\ \Delta_{H2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.000135574\,m\\ 4.4452\cdot10^{-5}\,m\\ 0.000180026\,m\\ -4.7024\cdot10^{-5}\,m\\ 0.000251459\,m\\ -0.000293739\,m\\ -3.1742\cdot10^{-6}\,m\end{pmatrix}$$

Note como el nodo ⑤ se desplaza horizontalmente hacia la derecha $0.000135574\,m$ y verticalmente hacia arriba $4.4452\cdot10^{-5}\,m$, o percátese de la ocurrencia de un movimiento hacia la derecha y hacia abajo del nodo ④ de $0.000180026\,m$ y $4.7024\cdot10^{-5}\,m$. También, vea como el nodo ③ tiene componentes horizontal y vertical de desplazamiento de $0.000251459\,m$ hacia la derecha y de $0.000293739\,m$ hacia abajo. Por su parte, el nodo ② se desplaza $3.1742\cdot10^{-6}\,m$ hacia la izquierda.

Se escribe el segundo subsistema y se le da solución. Visualice como la ecuación originada que posee el aspecto de la ecuación $2-14$ se simplifica sencillamente al realizar la multiplicación de matrices correspondiente y con ello se llega a los valores de las fuerzas reactivas en los soportes ① y ②.

$$\begin{pmatrix}R_{2y}\\ R_{1x}\\ R_{2y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}39597.9798 & -39597.9798 & 0 & -112000 & -32262.2509 & -48393.3764 & -7335.7289\\ 0 & 0 & -39597.9798 & -39597.9798 & 0 & 0 & -84000\\ 0 & -84000 & -39597.9798 & -39597.9798 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.000135574\\ 4.4452\cdot10^{-5}\\ 0.000180026\\ -4.7024\cdot10^{-5}\\ 0.000251459\\ -0.000293739\\ -3.1742\cdot10^{-6}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15T\\ -5T\\ -9T\end{pmatrix}$$

Los signos negativos de R_{1X} y R_{1Y} indican que estas reacciones actúan en las direcciones x negativa y y negativa respectivamente. Por consiguiente,

$$R_{2y} = 15T\uparrow \qquad R_{1x} = 5T\leftarrow \qquad R_{1y} = 9T\downarrow$$

Cálculo de las fuerzas en los elementos

Para determinar la fuerza de tensión q de un elemento i, se utiliza la ecuación que se muestra a continuación:

$$q_i = \frac{AE}{L}(-\lambda_x \quad -\lambda_y \quad \lambda_x \quad \lambda_y)\begin{pmatrix} D_{Nx} \\ D_{Ny} \\ D_{Fx} \\ D_{Fy} \end{pmatrix} \qquad (2-15)$$

donde

$A =$ área de la sección transversal del elemento.

$E =$ módulo de elasticidad del elemento.

$L =$ longitud del elemento.

$\lambda_x,\ \lambda_y =$ cosenos directores.

$D_{Nx},\ D_{Ny} =$ desplazamientos horizontal y vertical del nodo N del elemento en turno.

$D_{Fx},\ D_{Fy} =$ desplazamientos horizontal y vertical del nodo F del elemento en turno.

Finalmente se aplica la expresión $2-15$ en cada elemento. Si se obtiene un resultado negativo, entonces el elemento está en compresión.

Elemento 1:

$$AE = 252000\,T,\ L = 3m,\ \lambda_x = 1,\ \lambda_y = 0,\ \begin{pmatrix} D_{Nx} \\ D_{Ny} \\ D_{Fx} \\ D_{Fy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_9 \\ D_{10} \\ D_7 \\ D_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta_{H2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$q_1 = 84000(-1 \quad 0 \quad 1 \quad 0)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3.1742 \cdot 10^{-6} \\ 0 \end{pmatrix} = -0.266633T\ (Compresión)$$

Elemento 2:

$$AE = 252000\,T,\ L = \sqrt{13}m,\ \lambda_x = 0.5547,\ \lambda_y = 0.8321,\ \begin{pmatrix} D_{Nx} \\ D_{Ny} \\ D_{Fx} \\ D_{Fy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_7 \\ D_8 \\ D_5 \\ D_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_{H2} \\ 0 \\ \Delta_{H3} \\ \delta_{V3} \end{pmatrix}$$

$$q_2 = 69892.2247(-0.5547 \quad -0.8321 \quad 0.5547 \quad 0.8321)\begin{pmatrix} -3.1742 \cdot 10^{-6} \\ 0 \\ 0.000251459 \\ -0.000293739 \end{pmatrix}$$

$$= -7.21114T\ (Compresión)$$

Elemento 3:

$$AE = 252000\,T,\ L = 2m,\ \lambda_x = 1,\ \lambda_y = 0,\ \begin{pmatrix} D_{Nx} \\ D_{Ny} \\ D_{Fx} \\ D_{Fy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_{H4} \\ \delta_{V4} \\ \Delta_{H3} \\ \delta_{V3} \end{pmatrix}$$

$$q_3 = 126000(-1 \quad 0 \quad 1 \quad 0)\begin{pmatrix} 0.000180026 \\ -4.7024 \cdot 10^{-5} \\ 0.000251459 \\ -0.000293739 \end{pmatrix} = 9.00056T\ (Tensión)$$

Elemento 4:

$$AE = 252000\,T,\ L = 3m,\ \lambda_x = 1,\ \lambda_y = 0,\ \begin{pmatrix} D_{Nx} \\ D_{Ny} \\ D_{Fx} \\ D_{Fy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_{H5} \\ \delta_{V5} \\ \Delta_{H4} \\ \delta_{V4} \end{pmatrix}$$

$$q_4 = 84000(-1 \quad 0 \quad 1 \quad 0)\begin{pmatrix} 0.000135574 \\ 4.4452 \cdot 10^{-5} \\ 0.000180026 \\ -4.7024 \cdot 10^{-5} \end{pmatrix} = 3.73397T\ (Tensión)$$

Elemento 5:

$$AE = 252000\,T,\ L = 3m,\ \lambda_x = 0,\ \lambda_y = 1,\ \begin{pmatrix} D_{Nx} \\ D_{Ny} \\ D_{Fx} \\ D_{Fy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_9 \\ D_{10} \\ D_1 \\ D_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta_{H5} \\ \delta_{V5} \end{pmatrix}$$

$$q_5 = 84000(0 \quad -1 \quad 0 \quad 1)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.000135574 \\ 4.4452 \cdot 10^{-5} \end{pmatrix} = 3.73397T\ (Tensión)$$

Elemento 6:

$$AE = 336000\,T,\ L = 3\sqrt{2}m,\ \lambda_x = 0.7071,\ \lambda_y = -0.7071,\ \begin{pmatrix} D_{Nx} \\ D_{Ny} \\ D_{Fx} \\ D_{Fy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_7 \\ D_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_{H5} \\ \delta_{V5} \\ \Delta_{H2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$q_6 = 79195.9595(-0.7071 \quad 0.7071 \quad 0.7071 \quad -0.7071)\begin{pmatrix} 0.000135574 \\ 4.4452 \cdot 10^{-5} \\ -3.1742 \cdot 10^{-6} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= -5.28054T\ (Compresión)$$

Elemento 7:

$$AE = 336000\,T,\ L = 3\sqrt{2}m,\ \lambda_x = 0.7071,\ \lambda_y = 0.7071,\ \begin{pmatrix} D_{Nx} \\ D_{Ny} \\ D_{Fx} \\ D_{Fy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_9 \\ D_{10} \\ D_3 \\ D_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta_{H4} \\ \delta_{V4} \end{pmatrix}$$

$$q_7 = 79195.9595(-0.7071 \quad -0.7071 \quad 0.7071 \quad 0.7071)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.000180026 \\ -4.7024 \cdot 10^{-5} \end{pmatrix}$$

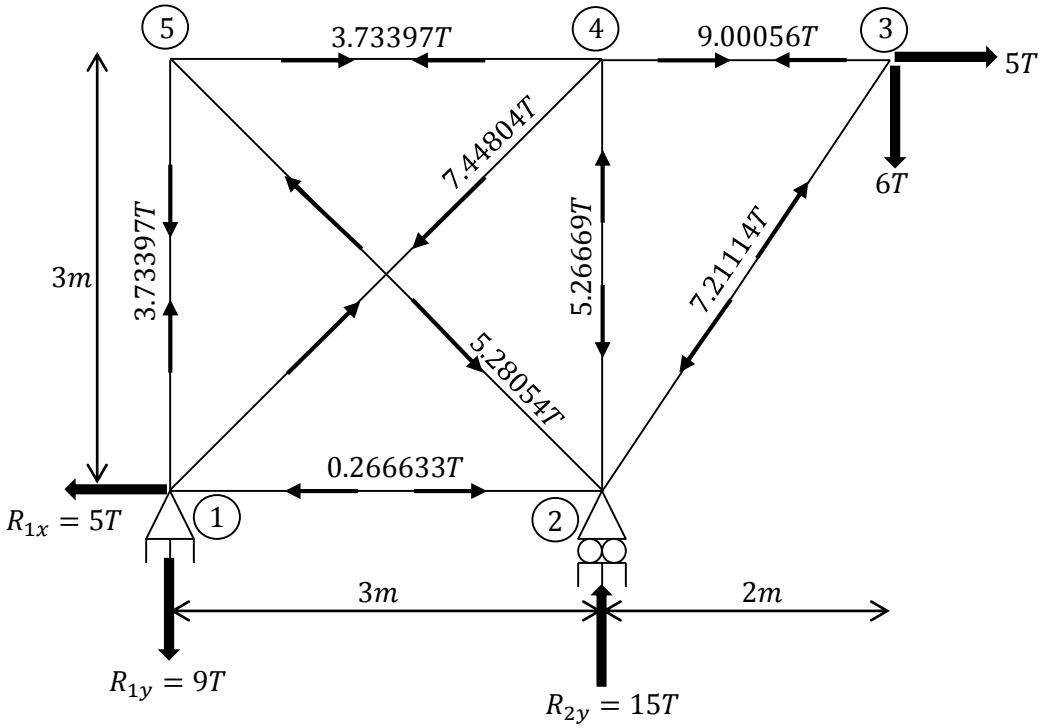
$$= 7.44804T\ (Tensión)$$

Elemento 8:

$$AE = 336000\,T,\ L = 3m,\ \lambda_x = 0,\ \lambda_y = 1,\ \begin{pmatrix} D_{Nx} \\ D_{Ny} \\ D_{Fx} \\ D_{Fy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_7 \\ D_8 \\ D_3 \\ D_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_{H2} \\ 0 \\ \Delta_{H4} \\ \delta_{V4} \end{pmatrix}$$

$$q_8 = 112000(0 \quad -1 \quad 0 \quad 1)\begin{pmatrix} -3.1742 \cdot 10^{-6} \\ 0 \\ 0.000180026 \\ -4.7024 \cdot 10^{-5} \end{pmatrix} = -5.26669T\ (Compresión)$$

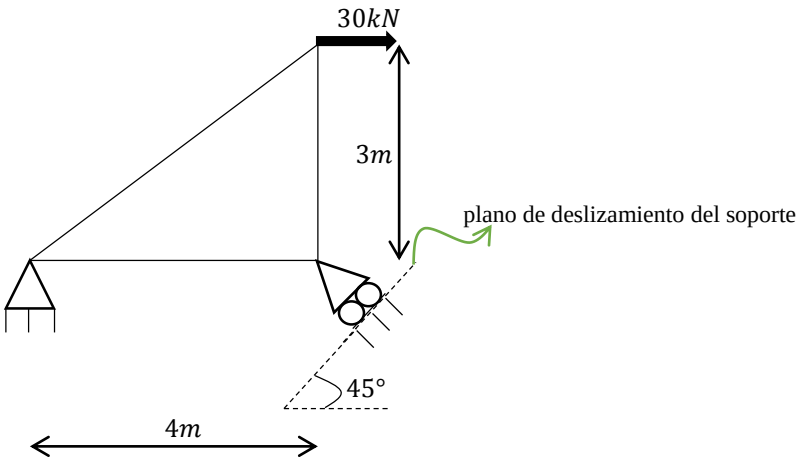
En la figura 2-10k se aprecian los resultados obtenidos para las reacciones en los soportes y las fuerzas internas de la armadura. Recuerde que un elemento en compresión “empuja” a la junta y un elemento en tensión “jala” a la junta.



(k)

Ejercicio 2.11 Análisis de una armadura con un rodillo en un plano inclinado empleando el método de la rigidez matricial.

Instrucciones Use el análisis matricial de la rigidez para determinar las reacciones en los soportes y las fuerzas internas de la armadura que se muestra en la figura 2-11a cuyo apoyo simple tiene un plano de deslizamiento inclinado a 45° respecto a la horizontal. Considere AE como constante.



(a)

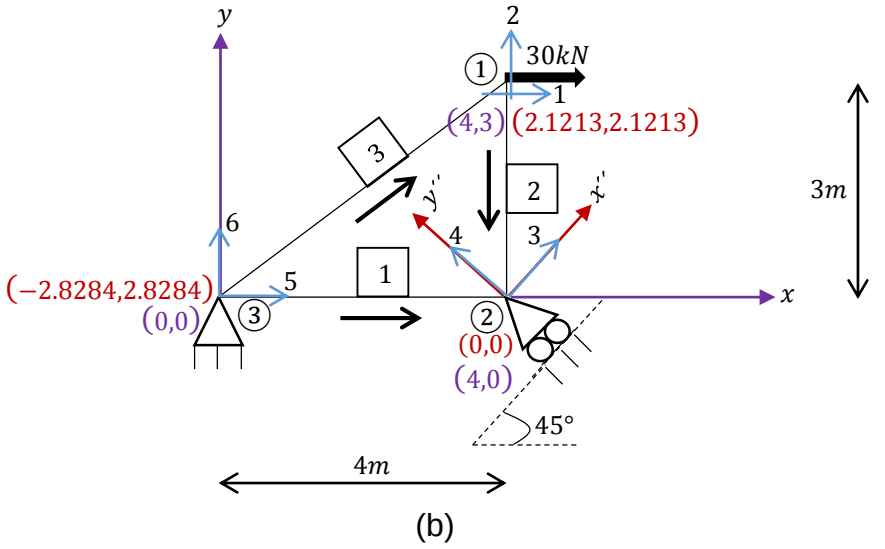
Figura 2-11

SOLUCIÓN

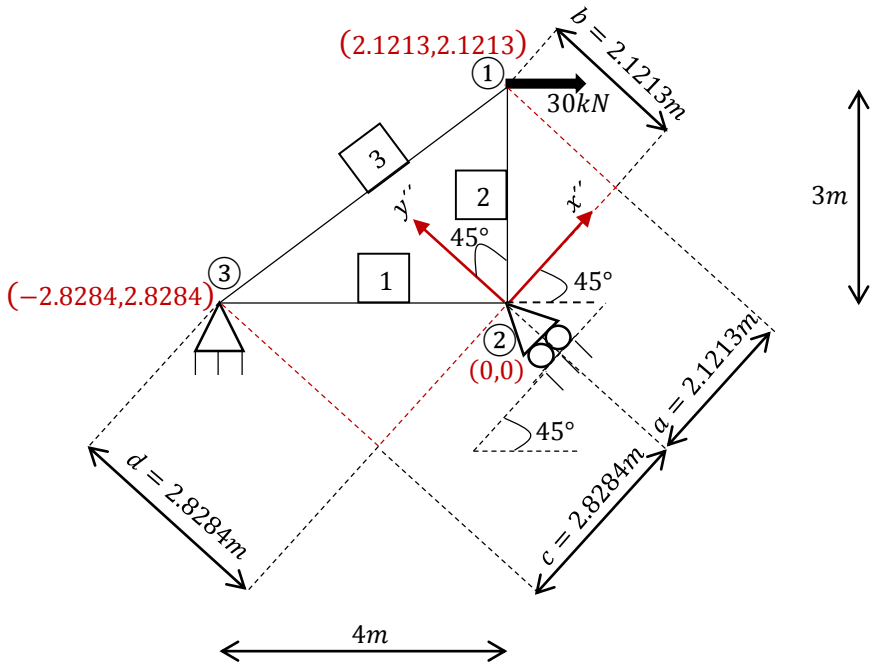
Notación

Se numeran los nodos y los elementos con un orden indistinto. Recuerde que la punta de la flecha en cada elemento está dirigida hacia el extremo alejado F, por lo que el extremo contrario es el cercano N, del mismo. En los elementos 1 y 2, el extremo lejano tiene que ser forzosamente el nodo ②, ya que es ahí donde está el soporte girado, figura 2-11b. Por conveniencia, se establece el origen de las coordenadas globales x, y en el nodo ③. Como el soporte en rodillos ② se

encuentra sobre un plano inclinado, en este nodo se emplean ejes nodales x'',y''. Evidentemente la dirección x'' debe coincidir con el plano de deslizamiento del soporte inclinado y y'' es perpendicular a x''. Se codifican los desplazamientos de tal modo que primero estén los desconocidos o no restringidos y después los conocidos o restringidos; puesto que la línea de acción de la fuerza reactiva del soporte ② se dirige hacia y'', el desplazamiento codificado como 4 está restringido y es nulo. Los números entre paréntesis de color morado son alusivos a las coordenadas x, y del nodo, mientras que los de color rojo indican las coordenadas x'', y''.



(b)



(c)

Las coordenadas en los ejes $x´´, y´´$ para los nodos ① y ③ pueden obtenerse por trigonometría con base en la figura 2-11c.

$$a = 3m(cos45°) = 2.1213m \qquad b = 3m(sin45°) = 2.1213m$$

$$c = 4m(cos45°) = 2.8284m \qquad d = 4m(sin45°) = 2.8284m$$

Cosenos directores y matriz de rigidez global para cada elemento

Figúrese que un elemento de armadura está conectado a un rodillo inclinado en su extremo F. Al tener un sistema de coordenadas globales x, y en el nodo cercano N, y un sistema de coordenadas nodales $x´´, y´´$ en el nodo lejano F, deben calcularse cosenos directores para ambos sistemas de coordenadas. Evidentemente, los cosenos directores λ_x y λ_y del primer sistema se siguen evaluando con las ecuaciones $2-2$ y $2-3$. En tanto, los correspondientes al segundo sistema se determinan como sigue:

$$\lambda_{x´´} = cos\theta_{x´´} = \frac{x´´_F - x´´_N}{L} = \frac{x´´_F - x´´_N}{\sqrt{(x´´_F - x´´_N)^2 + \left(y´´_F - y´´_N\right)^2}} \qquad (2-16)$$

$$\lambda_{y´´} = cos\theta_{y´´} = \frac{y´´_F - y´´_N}{L} = \frac{y´´_F - y´´_N}{\sqrt{(x´´_F - x´´_N)^2 + \left(y´´_F - y´´_N\right)^2}} \qquad (2-17)$$

donde

$\theta_{x´´}$, $\theta_{y´´}$ = ángulos más pequeños entre los ejes $x´´$, $y´´$ globales positivos y el eje local $x´$ positivo.

$x´´_N$, $y´´_N$ = coordenadas $x´´, y´´$ del extremo cercano N del elemento en turno.

$x´´_F$, $y´´_F$ = coordenadas $x´´, y´´$ del extremo lejano F del elemento en turno.

L = longitud del elemento.

Luego, la matriz de rigidez en coordenadas globales de un elemento i bajo estas condiciones es

$$k_i = \frac{AE}{L}\begin{matrix}\\ N_x \\ N_y \\ F_{x´´} \\ F_{y´´}\end{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix} N_x & N_y & F_{x´´} & F_{y´´}\end{matrix}\\ \begin{pmatrix} \lambda_x^2 & \lambda_x\lambda_y & -\lambda_x\lambda_{x´´} & -\lambda_x\lambda_{y´´} \\ \lambda_x\lambda_y & \lambda_y^2 & -\lambda_y\lambda_{x´´} & -\lambda_y\lambda_{y´´} \\ -\lambda_x\lambda_{x´´} & -\lambda_y\lambda_{x´´} & \lambda_{x´´}^2 & \lambda_{x´´}\lambda_{y´´} \\ -\lambda_x\lambda_{y´´} & -\lambda_y\lambda_{y´´} & \lambda_{x´´}\lambda_{y´´} & \lambda_{y´´}^2 \end{pmatrix}\end{matrix} \qquad (2-18)$$

donde

$A =$ área de la sección transversal del elemento.

$E =$ módulo de elasticidad del elemento.

$L =$ longitud del elemento.

$N_x,\ N_y =$ número de código del grado de libertad global asociado con el extremo cercano N en las direcciones x y y respectivamente del elemento en turno.

$F_{x''}, F_{y''} =$ número de código del grado de libertad nodal asociado con el extremo lejano F en las direcciones x'' y y'' respectivamente del elemento en turno.

$\lambda_x,\ \lambda_y =$ cosenos de θ_x y θ_y respectivamente.

$\lambda_{x''},\ \lambda_{y''} =$ cosenos de $\theta_{x''}$ y $\theta_{y''}$ respectivamente.

Debido a que los elementos 1 y 2 están conectados a un soporte inclinado, tienen números de código en la dirección de los ejes globales y nodales, en consecuencia, se aplican las expresiones $2-2, 2-3, 2-16$ y $2-17$ para obtener sus cosenos directores en ambos sistemas coordenados, y la matriz de rigidez de cada uno de ellos se calcula empleando la ecuación $2-18$. Por otra parte, el elemento 3 sólo tiene cosenos directores λ_x y λ_y, así que su matriz de rigidez global se desarrolla de la forma habitual, es decir, mediante la ecuación $2-4$.

A partir de la figura 2-11b y de la información proporcionada al inicio del problema se tienen los datos de las tablas 2-4, 2-5 y 2-6.

Elemento	Nodo		A	E	$L\ (m)$
	N	F			
1	3	2	A	E	4
2	1	2	A	E	3
3	3	1	A	E	5

Tabla 2-4

Elemento	Numeración de los grados de libertad					
	N_x	N_y	$F_{x''}$	$F_{y''}$	F_x	F_y
1	5	6	3	4		
2	1	2	3	4		
3	5	6			1	2

Tabla 2-5

Elemento	Coordenadas de los extremos cercano N y lejano F							
	x_N	y_N	x_F	y_F	x''_N	y''_N	x''_F	y''_F
1	0	0	4	0	-2.8284	2.8284	0	0
2	4	3	4	0	2.1213	2.1213	0	0
3	0	0	4	3				

Tabla 2-6

Por consiguiente,

Elemento 1:

$$\lambda_x = \frac{4-0}{4} = 1 \qquad \lambda_y = \frac{0-0}{4} = 0$$

$$\lambda_{x''} = \frac{0-(-2.8284)}{4} = 0.7071 \qquad \lambda_{y''} = \frac{0-2.8284}{4} = -0.7071$$

$$k_1 = AE \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} 5 & 6 & 3 & 4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0.2500 & 0 & -0.1768 & 0.1768 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1768 & 0 & 0.1250 & -0.1250 \\ 0.1768 & 0 & -0.1250 & 0.1250 \end{pmatrix} \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

Elemento 2:

$$\lambda_x = \frac{4-4}{3} = 0 \qquad \lambda_y = \frac{0-3}{3} = -1$$

$$\lambda_{x''} = \frac{0-2.1213}{3} = -0.7071 \qquad \lambda_{y''} = \frac{0-2.1213}{3} = -0.7071$$

$$k_2 = AE \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3333 & -0.2357 & -0.2357 \\ 0 & -0.2357 & 0.1667 & 0.1667 \\ 0 & -0.2357 & 0.1667 & 0.1667 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

Elemento 3:

$$\lambda_x = \frac{4-0}{5} = 0.8 \qquad \lambda_y = \frac{3-0}{5} = 0.6$$

$$k_3 = AE \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} 5 & 6 & 1 & 2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0.1280 & 0.0960 & -0.1280 & -0.0960 \\ 0.0960 & 0.0720 & -0.0960 & -0.0720 \\ -0.1280 & -0.0960 & 0.1280 & 0.0960 \\ -0.0960 & -0.0720 & 0.0960 & 0.0720 \end{pmatrix} \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

Matriz de rigidez de la estructura

Para obtener la matriz de rigidez de la estructura, se ensamblan las tres matrices anteriores siguiendo el procedimiento acostumbrado. Puede verse que K tiene un orden de $6\,X\,6$ debido a que seis grados de libertad fueron identificados en la armadura, además, la partición en ella se efectúa como siempre.

$$K = AE \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 0.1280 & 0.0960 & 0 & 0 & -0.1280 & -0.0960 \\ 0.0960 & 0.4053 & -0.2357 & -0.2357 & -0.0960 & -0.0720 \\ 0 & -0.2357 & 0.2917 & 0.0417 & -0.1768 & 0 \\ 0 & -0.2357 & 0.0417 & 0.2917 & 0.1768 & 0 \\ -0.1280 & -0.0960 & -0.1768 & 0.1768 & 0.3780 & 0.0960 \\ -0.0960 & -0.0720 & 0 & 0 & 0.0960 & 0.0720 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}$$

Vectores de desplazamientos y de cargas

De la figura 2-11b, se observa que los desplazamientos codificados con 1 y 2 corresponden a las componentes horizontal y vertical del desplazamiento en el nodo ①, así que $D_1 = \Delta_{H1}$ y $D_2 = \delta_{V1}$; también puede verse que el desplazamiento 3 viene siendo el desplazamiento resultante del nodo ②, por lo que $D_3 = \Delta_2$. Dadas las restricciones de los soportes ② y ③, los desplazamientos con códigos $4, 5$ y 6 son inexistentes, entonces, $D_4 = D_5 = D_6 = 0$.

Por otro lado, en la dirección 1 se encuentra aplicada una carga de $30kN$ en el sentido positivo de x, de modo que $C_1 = 30kN$, mientras que en las direcciones 2 y 3 no hay cargas externas, de ahí que $C_2 = C_3 = 0$. Además, en la dirección 4 se presenta la fuerza reactiva resultante del soporte ②, es por eso que $C_4 = R_2$, y en las direcciones 5 y 6 ocurren las reacciones en x y y del soporte ③, en consecuencia, $C_5 = R_{3x}$ y $C_6 = R_{3y}$.

Siendo así, las matrices D y C son, respectivamente

$$D = \begin{pmatrix} D_D \\ \hline D_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ \hline D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_{H1} \\ \delta_{V1} \\ \Delta_2 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \qquad C = \begin{pmatrix} C_C \\ \hline C_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ \hline C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \\ \hline R_2 \\ R_{3x} \\ R_{3y} \end{pmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}$$

Cálculo de los desplazamientos incógnita y las reacciones en los soportes

Aquí, $C = KD$ (ecuación $2-8$) resulta en

$$\left(\begin{array}{c} 30 \\ 0 \\ 0 \\ \hline R_2 \\ R_{3x} \\ R_{3y} \end{array}\right) = AE \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0.1280 & 0.0960 & 0 & 0 & -0.1280 & -0.0960 \\ 0.0960 & 0.4053 & -0.2357 & -0.2357 & -0.0960 & -0.0720 \\ 0 & -0.2357 & 0.2917 & 0.0417 & -0.1768 & 0 \\ \hline 0 & -0.2357 & 0.0417 & 0.2917 & 0.1768 & 0 \\ -0.1280 & -0.0960 & -0.1768 & 0.1768 & 0.3780 & 0.0960 \\ -0.0960 & -0.0720 & 0 & 0 & 0.0960 & 0.0720 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} \Delta_{H1} \\ \delta_{V1} \\ \Delta_2 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right)$$

Al desarrollar la solución para los desplazamientos como en la ecuación $1-12$, se tiene

$$\begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = AE \begin{pmatrix} 0.1280 & 0.0960 & 0 \\ 0.0960 & 0.4053 & -0.2357 \\ 0 & -0.2357 & 0.2917 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_{H1} \\ \delta_{V1} \\ \Delta_2 \end{pmatrix}$$

Si se resuelve el sistema, despejando las incógnitas de manera afín a la ecuación $2-13$ y expandiendo, se obtiene

$$\begin{pmatrix} \Delta_{H1} \\ \delta_{V1} \\ \Delta_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{AE} \begin{pmatrix} 0.1280 & 0.0960 & 0 \\ 0.0960 & 0.4053 & -0.2357 \\ 0 & -0.2357 & 0.2917 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{AE} \begin{pmatrix} 352.5000 \\ -157.5000 \\ -127.2804 \end{pmatrix}$$

Las reacciones en los soportes se hallan efectuando el producto matricial correspondiente a la partición inferior, es decir, con la ecuación $2-14$. Al emplear los desplazamientos calculados previamente da

$$\begin{pmatrix} R_2 \\ R_{3x} \\ R_{3y} \end{pmatrix} = AE \begin{pmatrix} 0 & -0.2357 & 0.0417 \\ -0.1280 & -0.0960 & -0.1768 \\ -0.0960 & -0.0720 & 0 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{AE}\right) \begin{pmatrix} 352.5000 \\ -157.5000 \\ -127.2804 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31.8195kN \\ -7.5000kN \\ -22.5000kN \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

$$R_2 = 31.8195kN \nwarrow \qquad R_{3x} = 7.5kN \leftarrow \qquad R_{3y} = 22.5kN \downarrow$$

Cálculo de las fuerzas en los elementos

Para determinar la fuerza de tensión q de un elemento i conectado a un soporte inclinado en el nodo lejano F, se emplea la siguiente ecuación:

$$q_i = \frac{AE}{L}(-\lambda_x \quad -\lambda_y \quad \lambda_{x''} \quad \lambda_{y''}) \begin{pmatrix} D_{Nx} \\ D_{Ny} \\ D_{Fx''} \\ D_{Fy''} \end{pmatrix} \qquad (2-19)$$

donde

$A =$ área de la sección transversal del elemento.

$E =$ módulo de elasticidad del elemento.

$L =$ longitud del elemento.

$\lambda_x,\ \lambda_y =$ cosenos de θ_x y θ_y respectivamente.

$\lambda_{x''},\ \lambda_{y''} =$ cosenos de $\theta_{x''}$ y $\theta_{y''}$ respectivamente.

$D_{Nx},\ D_{Ny} =$ desplazamientos horizontal y vertical del nodo N del elemento en turno.

$D_{Fx''}, D_{Fy''} =$ desplazamientos en las direcciones x'', y'' del nodo F del elemento en turno.

Por consiguiente, para conocer el valor de las fuerzas en los elementos 1 y 2 aplicamos la ecuación $2-19$, mientras que la fuerza del elemento 3 se encuentra con base en la ecuación $2-15$.

Elemento 1:

$$q_1 = \left(\frac{AE}{4}\right)(-1 \quad -0 \quad 0.7071 \quad -0.7071)\left(\frac{1}{AE}\right)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -127.2804 \\ 0 \end{pmatrix} = -22.5kN\ (Compresión)$$

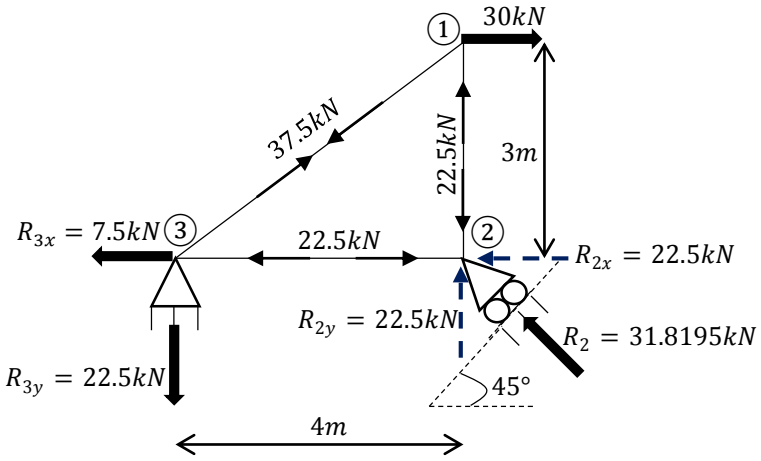
Elemento 2:

$$q_2 = \left(\frac{AE}{3}\right)(-0 \quad -(-1) \quad -0.7071 \quad -0.7071)\left(\frac{1}{AE}\right)\begin{pmatrix} 352.5 \\ -157.5 \\ -127.2804 \\ 0 \end{pmatrix} = -22.5kN\ (Compresión)$$

Elemento 3:

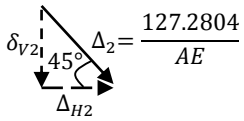
$$q_3 = \left(\frac{AE}{5}\right)(-0.8 \quad -0.6 \quad 0.8 \quad 0.6)\left(\frac{1}{AE}\right)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 352.5 \\ -157.5 \end{pmatrix} = 37.5kN\ (Tensión)$$

Se muestran los resultados obtenidos en el diagrama de la figura 2-11d.



(d)

Con base en la figura 2-11e, se calculan las componentes horizontal y vertical del desplazamiento resultante en el nodo ②, el cual ocurre en la dirección x'' negativa por haber resultado de magnitud negativa.



(e)

$$\Delta_{H2} = \Delta_2(\cos 45°) = \left(\frac{127.2804}{AE}\right)(\cos 45°) = \frac{90.0008}{AE}$$

$$\delta_{V2} = \Delta_2(\sin 45°) = \left(\frac{127.2804}{AE}\right)(\sin 45°) = \frac{90.0008}{AE}$$

Como Δ_{H2} y δ_{V2} actúan en las direcciones x positiva y y negativa, las magnitudes definitivas serían $90.0008/AE$ y $-90.0008/AE$ de forma respectiva.

Finalmente, se comprueba el equilibrio externo de la estructura; para ello, la fuerza resultante R_2 se descompone en sus componentes horizontal y vertical.

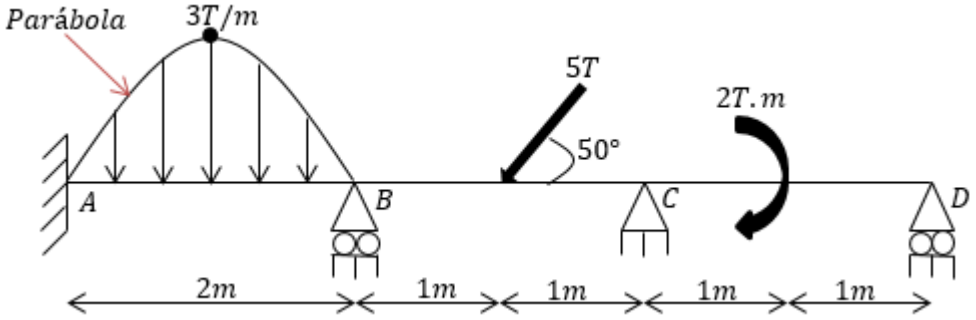
$$+\uparrow \sum Fy = -22.5 + 22.5 = 0 \quad ok$$

$$+\rightarrow \sum Fx = -7.5 - 22.5 + 30 = 0 \quad ok$$

$$+\circlearrowleft \sum MA = 30(3) - 22.5(4) = 0 \quad ok$$

Ejercicio 2.12 Resolución de una viga con el uso del método de la rigidez directa.

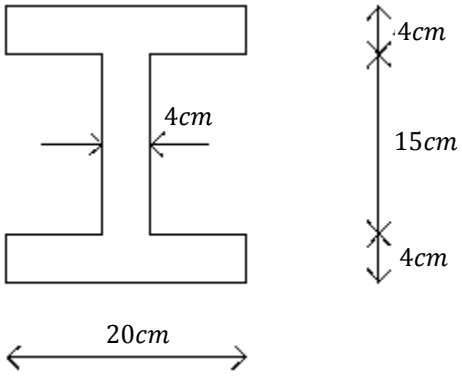
Instrucciones Use el análisis matricial de la rigidez para calcular las reacciones en los apoyos de la viga de tres claros que se muestra en la figura 2-12a. Después, emplee los resultados obtenidos para verificar el equilibrio externo de la estructura.



(a)

Figura 2-12

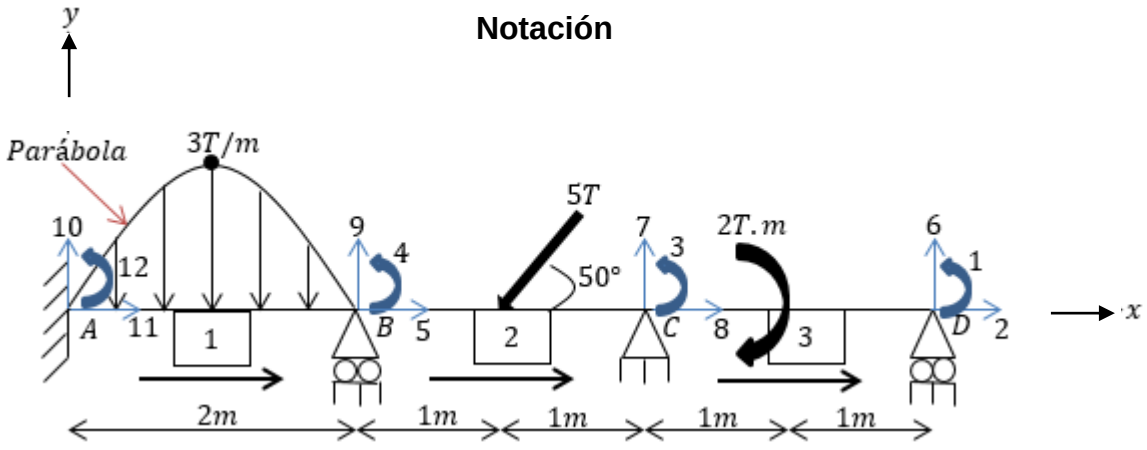
Considere el módulo de elasticidad del acero y una sección transversal tipo I con las siguientes dimensiones observadas en la figura 2-12b.



(b)

SOLUCIÓN.

Notación



(c)

Se divide la viga en elementos finitos. Por conveniencia, se opta porque cada elemento se extienda entre apoyos. Los elementos se identifican arbitrariamente usando un número inscrito en un cuadrado. Sin importar que los nodos estén o no predeterminados en el problema, de manera opcional se puede identificar cada uno de ellos usando un número dentro de un círculo. Para esta viga continua en particular, se tienen tres elementos y cuatro nodos que desde el inicio han sido definidos por A, B, C y D, figura 2-12c.

Los extremos cercano N y lejano F de cada elemento se especifican simbólicamente con una flecha a lo largo del elemento cuya punta se dirige hacia el extremo alejado. El sistema de coordenadas globales x, y, z tiene su origen en A con la finalidad de que los nodos restantes tengan coordenadas positivas. Tales ejes tienen su dirección positiva hacia la derecha, hacia arriba y en el sentido antihorario.

Dado que la viga está sometida a al menos una carga horizontal (es obvio que la carga puntual de $5T$ tiene componentes horizontal y vertical), tienen que tomarse en cuenta los efectos de la flexión, la fuerza cortante y la fuerza axial. En consecuencia, en cada nodo hay tres grados de libertad, los cuales corresponden a un desplazamiento horizontal (Δ_H), un desplazamiento vertical (δ_V), y una rotación (θ), y que deben ser codificados numéricamente de tal forma que los números más bajos de código representen los desplazamientos desconocidos (grados de libertad no restringidos), mientras que los números más altos indiquen desplazamientos conocidos (grados de libertad restringidos).

Como recordatorio, un empotramiento restringe los tres grados de libertad mencionados, un soporte articulado sólo permite la rotación y un apoyo simple únicamente impide el desplazamiento vertical, en sus correspondientes puntos de ubicación. Si en algún nodo hay ausencia de soporte, entonces los tres grados de libertad son incógnitas.

De los doce grados de libertad en la viga, los codificados del 1 al 5 representan desplazamientos cuyo su valor se desconoce, en tanto, los números de código del 8 al 10 referencian desplazamientos conocidos, que en este caso son todos iguales a cero.

Las coordenadas de los nodos ya no se identifican por una razón que más adelante se explicará.

Vector de desplazamientos

Al igual que en las armaduras, para las vigas se formula un vector de desplazamientos D que se secciona dando origen a dos vectores: el de

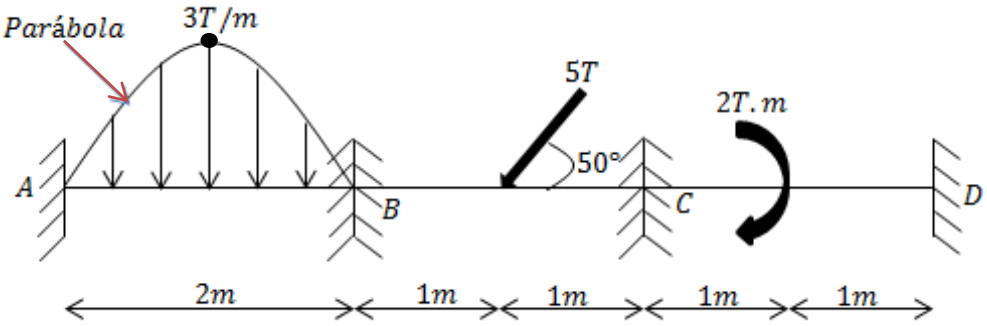
desplazamientos desconocidos D_D y el de desplazamientos conocidos D_C. Por las condiciones de apoyo en el problema se tiene

$$D = \begin{pmatrix} D_D \\ \hline D_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ \hline D_6 \\ D_7 \\ D_8 \\ D_9 \\ D_{10} \\ D_{11} \\ D_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_D \\ \Delta_{HD} \\ \theta_C \\ \theta_B \\ \Delta_{HB} \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ \hline 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix}$$

Vector de cargas

Obsérvese que sobre la longitud del elemento 1 se extiende una carga distribuida tipo parabólica, y que los elementos 2 y 3 soportan a la mitad de su claro y de forma respectiva, una carga puntual inclinada y un momento de par. El análisis matricial de la rigidez requiere que la carga externa se aplique en los nodos debido a que la matriz de rigidez del elemento que más adelante se presentará ha sido deducida para cargas aplicadas en sus extremos.

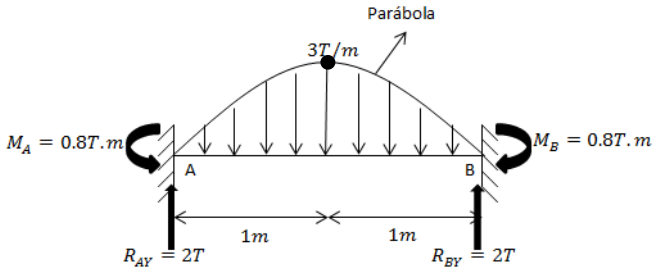
Para atender esta situación, se usa el principio de superposición. Suponemos que cada nodo está restringido de movimiento, motivo por el cual se les impone un empotramiento, figura 2-12d.



(d)

A continuación se calculan las fuerzas de fijación y momentos de empotramiento perfecto asociadas a cada elemento, figuras 2-12e, 2-12f y 2-12g. Para ello remítase al formulario realizado por este mismo autor, o bien, dedúzcalas empleando algún método válido como lo puede ser el de flexibilidades.

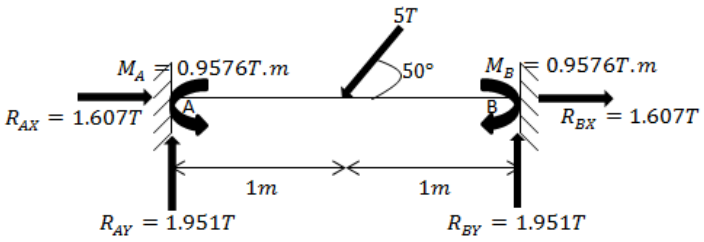
Elemento 1.



(e)

$$R_{AY} = R_{BY} = \frac{WL}{3} = \frac{(3T/m)(2m)}{3} = 2\ T\uparrow \qquad M_A = M_B = \frac{WL^2}{15} = \frac{(3T/m)(2m)^2}{15} = 0.8\ T\cdot m\circlearrowleft$$

Elemento 2.



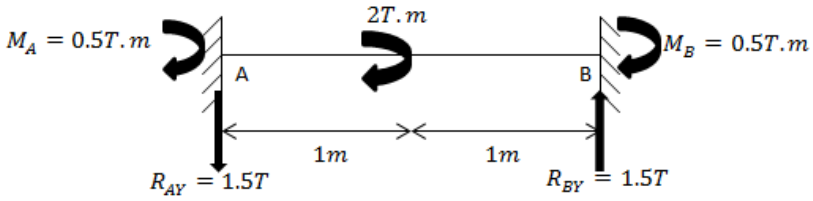
(f)

$$R_{AY} = R_{BY} = \frac{P\sin\alpha}{2} = \frac{(5T)(\sin(50°))}{2} = 1.9151\ T\uparrow$$

$$R_{AX} = R_{BX} = \frac{P\cos\alpha}{2} = \frac{(5T)(\cos(50°))}{2} = 1.6070\ T\rightarrow$$

$$M_A = M_B = \frac{PL\cdot\sin\alpha}{8} = \frac{(5T)(2m)(\sin(50°))}{8} = 0.9576\ T\cdot m\circlearrowleft$$

Elemento 3.

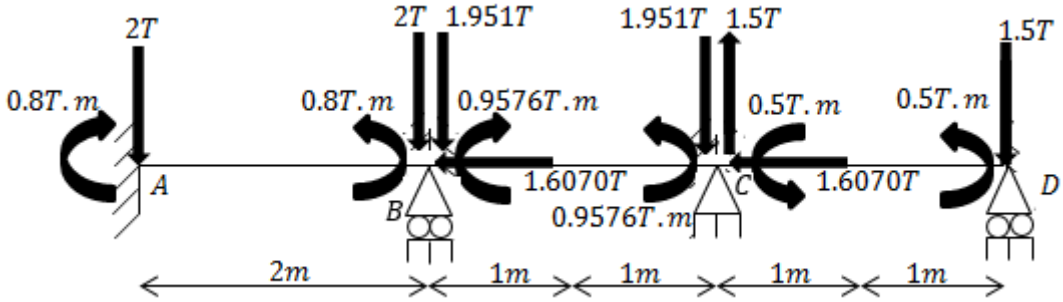


(g)

$$R_{AY} = R_{BY} = \frac{3M}{2L} = \frac{(3)(2T\cdot m)}{(2)(2m)} = 1.5\ T\uparrow\downarrow \qquad M_A = M_B = \frac{M}{4} = \frac{2T\cdot m}{4} = 0.5\ T\cdot m\circlearrowleft$$

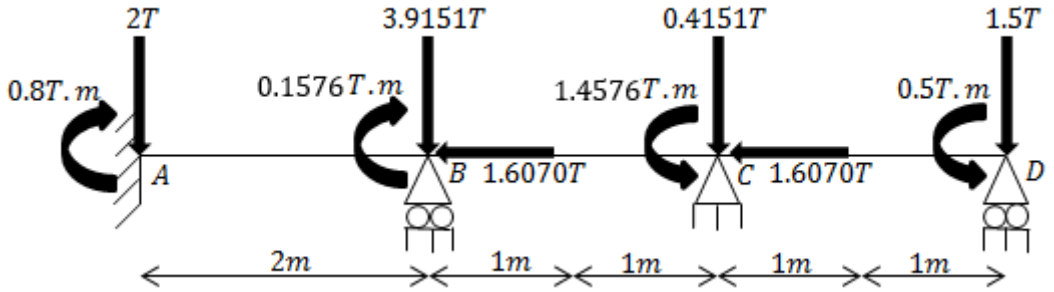
Las fuerzas de fijación y momentos de empotramiento calculados existirían si restringiéramos de movimiento a todos los nodos, algo que a decir verdad no ocurre. En consecuencia, las fuerzas y momentos elásticos o efectivos actúan sobre los

nodos en sentido contrario al que definimos, figura 2-12h, por lo que para fines de análisis estas son las fuerzas que aparecen



(h)

Al hacer la suma algebraica de las fuerzas y momentos en cada nodo se obtiene la viga cargada que se analizará con el método de la rigidez, figura 2-12i.



(i)

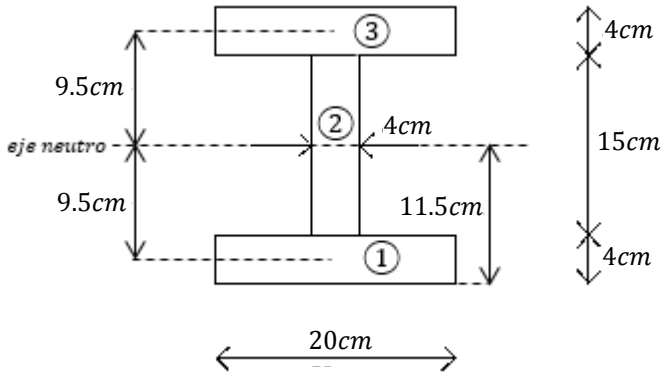
Se hace un cotejo entre las figuras 2-12i y 2-12c para plantear el vector de cargas C, el cual debe dividirse en un vector de cargas conocidas C_C y un vector de cargas desconocidas C_D.

$$C = \begin{pmatrix} C_C \\ C_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ \hline C_6 \\ C_7 \\ C_8 \\ C_9 \\ C_{10} \\ C_{11} \\ C_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 1.4576 \\ -0.1576 \\ -1.6070 \\ \hline R_{Dy} - 1.5 \\ R_{Cy} - 0.4151 \\ R_{Cx} - 1.6070 \\ R_{By} - 3.9151 \\ R_{Ay} - 2 \\ R_{Ax} \\ M_A - 0.8 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ \hline 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix}$$

Por la superposición, los resultados del análisis matricial para las cargas de la última figura se modificarán posteriormente con la viga sujeta a la carga real y a las reacciones fijamente apoyadas.

Matriz de rigidez global para cada elemento

El sistema de coordenadas globales ya ha sido identificado con los ejes x, y, z. Luego hacemos que las coordenadas locales x', y', z' tengan su origen en el extremo cercano de cada elemento, y que el eje positivo x' se dirija hacia el extremo lejano. Bajo esas circunstancias, para cada componente de la viga los ejes x y x' serán colineales dado que las coordenadas globales y del elemento serán todas paralelas. Por esta razón, a diferencia del caso de las armaduras, no es necesario desarrollar matrices de transformación entre estos dos sistemas de coordenadas. En resumen, aquí las matrices de rigidez global y local para un elemento de viga serán las mismas; ello explica que las coordenadas de los nodos no fueran identificadas al inicio del problema, puesto que lógicamente, el cálculo de los cosenos directores ya no es necesario. Para determinar el momento de inercia con respecto al eje neutro (pasando a través del centroide de la sección transversal), usamos la tabla 2-7. Por la simetría del perfil I, el centroide está a $11.5cm$ de la parte inferior, figura 2-12j.



(j)

Tabla 2-7

Bloque	$I_o\ (cm^4)$	$A\ (cm^2)$	$d\ (cm)$	$Ad^2\ (cm^4)$
1	$\left(\frac{1}{12}\right)(20)(4^3) = 106.6667$	$(20)(4) = 80$	9.5	7220
2	$\left(\frac{1}{12}\right)(4)(15^3) = 1125$	$(4)(15) = 60$	0	0
3	$\left(\frac{1}{12}\right)(20)(4^3) = 106.6667$	$(20)(4) = 80$	9.5	7220
$\sum$	1338.3334	220		14440

Aplicando el teorema de los ejes paralelos se tiene

$$I = \sum Io + \sum Ad^2 = 1338.3334 + 14440 = 15778.3334\ cm^4 = 0.000157783\ m^4$$

El área de la sección transversal y el módulo de elasticidad del acero son

$$A = 220cm^2 = 0.022m^2 \qquad E = 2.1 \cdot 10^7 \ {}^{T}/_{m^2}$$

Se calcula la matriz de rigidez global para cada elemento con la ecuación $2-20$. Los números de código para cada columna y fila de estas matrices, que tienen la peculiaridad de ser siempre simétricas, deben establecerse apropiadamente.

$$k_i = \begin{array}{c} \begin{matrix} N_x & N_y & N_z & F_x & F_y & F_z \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix} \begin{matrix} N_x \\ N_y \\ N_z \\ F_x \\ F_y \\ F_z \end{matrix} \end{array} \qquad 2-20$$

Elemento 1:

$$k_1 = 10^5 \begin{array}{c} \begin{matrix} 11 & 10 & 12 & 5 & 9 & 4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2.31 & 0 & 0 & -2.31 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0497 & 0.0497 & 0 & -0.0497 & 0.0497 \\ 0 & 0.0497 & 0.0663 & 0 & -0.0497 & 0.0331 \\ -2.31 & 0 & 0 & 2.31 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0497 & -0.0497 & 0 & 0.0497 & -0.0497 \\ 0 & 0.0497 & 0.0331 & 0 & -0.0497 & 0.0663 \end{pmatrix} \begin{matrix} 11 \\ 10 \\ 12 \\ 5 \\ 9 \\ 4 \end{matrix} \end{array}$$

Elemento 2:

$$k_2 = 10^5 \begin{array}{c} \begin{matrix} 5 & 9 & 4 & 8 & 7 & 3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2.31 & 0 & 0 & -2.31 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0497 & 0.0497 & 0 & -0.0497 & 0.0497 \\ 0 & 0.0497 & 0.0663 & 0 & -0.0497 & 0.0331 \\ -2.31 & 0 & 0 & 2.31 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0497 & -0.0497 & 0 & 0.0497 & -0.0497 \\ 0 & 0.0497 & 0.0331 & 0 & -0.0497 & 0.0663 \end{pmatrix} \begin{matrix} 5 \\ 9 \\ 4 \\ 8 \\ 7 \\ 3 \end{matrix} \end{array}$$

Elemento 3:

$$k_3 = 10^5 \begin{array}{c} \begin{matrix} 8 & 7 & 3 & 2 & 6 & 1 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2.31 & 0 & 0 & -2.31 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0497 & 0.0497 & 0 & -0.0497 & 0.0497 \\ 0 & 0.0497 & 0.0663 & 0 & -0.0497 & 0.0331 \\ -2.31 & 0 & 0 & 2.31 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0497 & -0.0497 & 0 & 0.0497 & -0.0497 \\ 0 & 0.0497 & 0.0331 & 0 & -0.0497 & 0.0663 \end{pmatrix} \begin{matrix} 8 \\ 7 \\ 3 \\ 2 \\ 6 \\ 1 \end{matrix} \end{array}$$

Matriz de rigidez de la estructura

Ya que las matrices de rigidez de todos los elementos fueron determinadas, se ensamblan para calcular K, la cual también debe ser simétrica y tiene un orden de $12\ X\ 12$ debido a que doce grados de libertad fueron designados para la viga.

$$K = 10^5 \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccccc|ccccccc} 0.0663 & 0 & 0.0331 & 0 & 0 & -0.0497 & 0.0497 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.31 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2.31 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0331 & 0 & 0.1325 & 0.0331 & 0 & -0.0497 & 0 & 0 & 0.0497 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0331 & 0.1325 & 0 & 0 & -0.0497 & 0 & 0 & 0.0497 & 0 & 0.0331 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4.62 & 0 & 0 & -2.31 & 0 & 0 & -2.31 & 0 \\ \hline -0.0497 & 0 & -0.0497 & 0 & 0 & 0.0497 & -0.0497 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0497 & 0 & 0 & -0.0497 & 0 & -0.0497 & 0.0497 & 0 & -0.0497 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2.31 & 0 & 0 & -2.31 & 0 & 0 & 4.62 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0497 & 0 & 0 & 0 & -0.0497 & 0 & 0.0994 & -0.0497 & 0 & -0.0497 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0497 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0497 & 0.0497 & 0 & 0.0497 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2.31 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.31 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0331 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0497 & 0.0497 & 0 & 0.0663 \end{array}\right) \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix} \end{array}$$

Dado que hay cinco incógnitas de desplazamiento, la matriz de rigidez de la estructura se secciona de tal forma que en la parte izquierda haya 5 columnas y en la porción superior haya 5 filas. Se sigue usando la misma nomenclatura que en las armaduras para cada una de las submatrices, ecuación $2-5$.

$$K = \left(\begin{array}{c|c} K_{11} & K_{12} \\ \hline K_{21} & K_{22} \end{array}\right) \qquad (2-5)$$

Cálculo de las incógnitas

Al hacer $C = KD$, ecuación $2-8$, se tiene

$$\left(\begin{array}{c} 0.5 \\ 0 \\ 1.4576 \\ -0.1576 \\ -1.6070 \\ \hline R_{Dy} - 1.5 \\ R_{Cy} - 0.4151 \\ R_{Cx} - 1.6070 \\ R_{By} - 3.9151 \\ R_{Ay} - 2 \\ R_{Ax} \\ M_A - 0.8 \end{array}\right) = 10^5 \left(\begin{array}{ccccc|ccccccc} 0.0663 & 0 & 0.0331 & 0 & 0 & -0.0497 & 0.0497 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.31 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2.31 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0331 & 0 & 0.1325 & 0.0331 & 0 & -0.0497 & 0 & 0 & 0.0497 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0331 & 0.1325 & 0 & 0 & -0.0497 & 0 & 0 & 0.0497 & 0 & 0.0331 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4.62 & 0 & 0 & -2.31 & 0 & 0 & -2.31 & 0 \\ \hline -0.0497 & 0 & -0.0497 & 0 & 0 & 0.0497 & -0.0497 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0497 & 0 & 0 & -0.0497 & 0 & -0.0497 & 0.0497 & 0 & -0.0497 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2.31 & 0 & 0 & -2.31 & 0 & 0 & 4.62 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0497 & 0 & 0 & 0 & -0.0497 & 0 & 0.0994 & -0.0497 & 0 & -0.0497 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0497 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0497 & 0.0497 & 0 & 0.0497 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2.31 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.31 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0331 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0497 & 0.0497 & 0 & 0.0663 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} \theta_D \\ \Delta_{HD} \\ \theta_C \\ \theta_B \\ \Delta_{HB} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right)$$

El sistema matricial anterior es equivalente a la ecuación $2-9$.

$$\left(\frac{C_C}{C_D}\right)=\left(\begin{array}{c|c} K_{11} & K_{12} \\ \hline K_{21} & K_{22} \end{array}\right)\left(\frac{D_D}{D_C}\right) \qquad (2-9)$$

Se calculan los desplazamientos desconocidos al extraer y resolver un primer subsistema que en seguida se reescribe.

$$C_C = K_{11}D_D + K_{12}D_C \qquad (2-10)$$

Igual que en las armaduras, como D_C vale cero, la ecuación anterior pasa a ser

$$C_C = K_{11}D_D \qquad (2-12)$$

Por lo tanto,

$$\begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 1.4576 \\ -0.1576 \\ -1.6070 \end{pmatrix} = 10^5 \begin{pmatrix} 0.0663 & 0 & 0.0331 & 0 & 0 \\ 0 & 2.31 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0331 & 0 & 0.1325 & 0.0331 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0331 & 0.1325 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4.62 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_D \\ \Delta_{HD} \\ \theta_C \\ \theta_B \\ \Delta_{HB} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \theta_D \\ \Delta_{HD} \\ \theta_C \\ \theta_B \\ \Delta_{HB} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0000176\, rad \\ 0 \\ 0.0001158\, rad \\ -0.0000408\, rad \\ -0.0000035\, m \end{pmatrix}$$

Se puede hacer un análisis de los resultados; por ejemplo, note como el nodo D experimenta una rotación antihoraria de $0.0000176\ rad$ y en realidad no se desplaza horizontalmente.

Las reacciones se obtienen de resolver un segundo subsistema que fue citado en las armaduras.

$$C_D = K_{21}D_D + K_{22}D_C \qquad (2-11)$$

Como ya se mencionó, $D_C = 0$, así que nuevamente de la ecuación $2-14$, $C_D = K_{21}D_D$, y al usar los desplazamientos calculados se tiene

$$\begin{pmatrix} R_{Dy} - 1.5 \\ R_{Cy} - 0.4151 \\ R_{Cx} - 1.6070 \\ R_{By} - 3.9151 \\ R_{Ay} - 2 \\ R_{Ax} \\ M_A - 0.8 \end{pmatrix} = 10^5 \begin{pmatrix} -0.0497 & 0 & -0.0497 & 0 & 0 \\ 0.0497 & 0 & 0 & -0.0497 & 0 \\ 0 & -2.31 & 0 & 0 & -2.31 \\ 0 & 0 & 0.0497 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0497 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2.31 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0331 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.0000176 \\ 0 \\ 0.0001158 \\ -0.0000408 \\ -0.0000035 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.6628 \\ 0.2902 \\ 0.8035 \\ 0.5755 \\ -0.2030 \\ 0.8035 \\ -0.1353 \end{pmatrix}$$

En consecuencia,

$$R_{Dy} - 1.5 = -0.6628 \Rightarrow R_{Dy} = -0.6628 + 1.5 = 0.8372T \Rightarrow \therefore R_{Dy} = 0.8372T \uparrow$$

$$R_{Cy} - 0.4151 = 0.2902 \Rightarrow R_{Cy} = 0.2902 + 0.4151 = 0.7053T \Rightarrow \therefore R_{Cy} = 0.7053T \uparrow$$

$$R_{Cx} - 1.6070 = 0.8035 \Rightarrow R_{Cx} = 0.8035 + 1.6070 = 2.4105T \Rightarrow \therefore R_{Cx} = 2.4105T \rightarrow$$

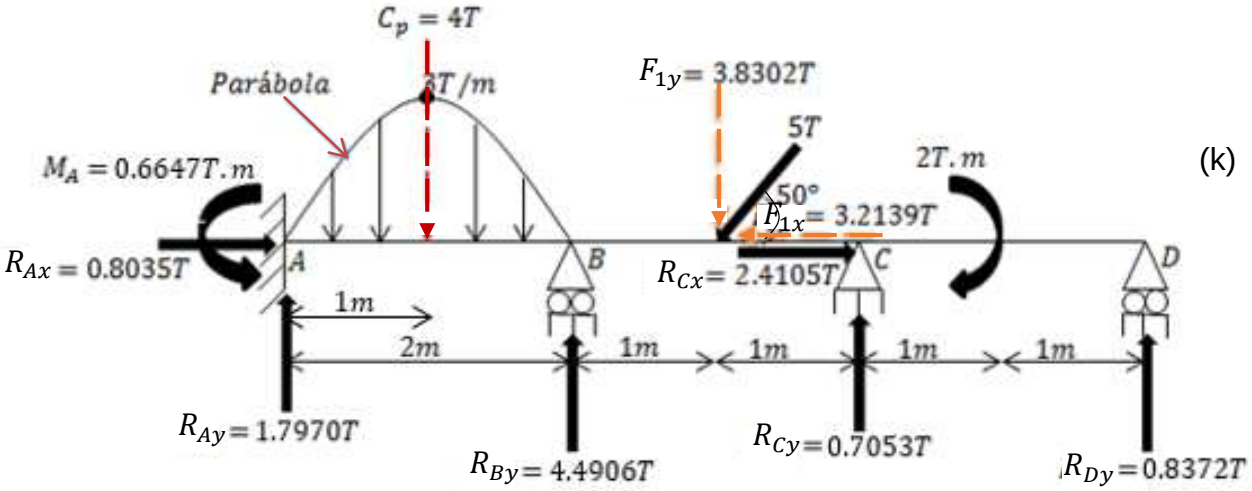
$$R_{By} - 3.9151 = 0.5755 \Rightarrow R_{By} = 0.5755 + 3.9151 = 4.4906T \Rightarrow \therefore R_{By} = 4.4906T \uparrow$$

$$R_{Ay} - 2 = -0.2030 \Rightarrow R_{Ay} = -0.2030 + 2 = 1.7970T \Rightarrow \therefore R_{Ay} = 1.7970T \uparrow$$

$$R_{Ax} = 0.8035 \Rightarrow \therefore R_{Ax} = 0.8035T \rightarrow$$

$$M_A - 0.8 = -0.1353 \rightarrow M_A = -0.1353 + 0.8 = 0.6647\ T.m \Rightarrow \therefore M_A = 0.6647T \cdot m \circlearrowleft$$

Se muestran los resultados obtenidos en el diagrama de la figura 2-12k.



(k)

Se comprueba el equilibrio externo de la viga. Se resuelve la fuerza de $5T$ en sus componentes x y y, y se determina la fuerza resultante de la carga distribuida y su punto de aplicación de la carga parabólica.

$$F_{1x} = 5 \cdot \sin 50° = 3.8302T \qquad F_{1x} = 5 \cdot \cos 50° = 3.2139T$$

$$C_P = \left(\frac{2}{3}\right)\left(3\,{}^{T}/_{m}\right)(2m) = 4T \qquad \bar{x} = 1m$$

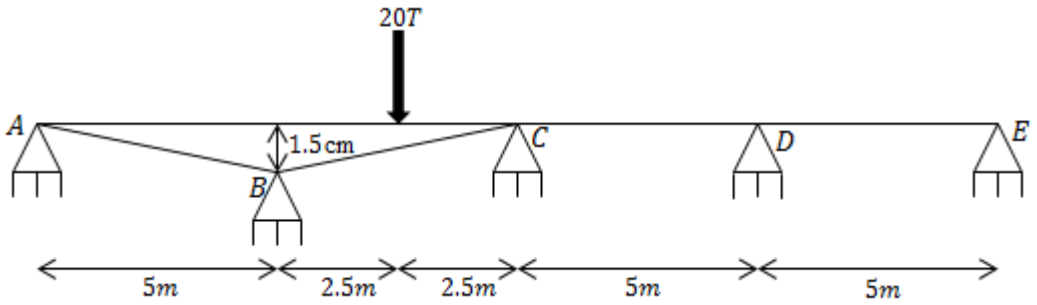
$$+\uparrow \sum Fy = 1.7970 - 4 + 4.4906 - 3.8302 + 0.7053 + 0.8372 = 0 \quad ok$$

$$+\rightarrow \sum Fx = 0.8035 - 3.2139 + 2.4105 \cong 0 \quad ok$$

$$+\circlearrowleft \sum MA = -0.6647 + 4(1) - 4.4906(2) + 3.8302(3) - 0.7053(4) + 2 - 0.8372(6) \cong 0 \quad ok$$

Ejercicio 2.13 Solución de una viga con asentamiento en un apoyo por medio del método de la rigidez matricial.

Instrucciones Determine las reacciones en los soportes de la viga mostrada en la figura 2-13a que está sometida a una carga puntual de $20T$ aplicada a la mitad del claro $B-C$, si el soporte B se asienta $1.5cm$. Considere que $E = 2 \cdot 10^7 T/m^2$ y que $I = 0.00171m^4$, es decir, $EI = 3.42 \cdot 10^4\, T \cdot m^2$.



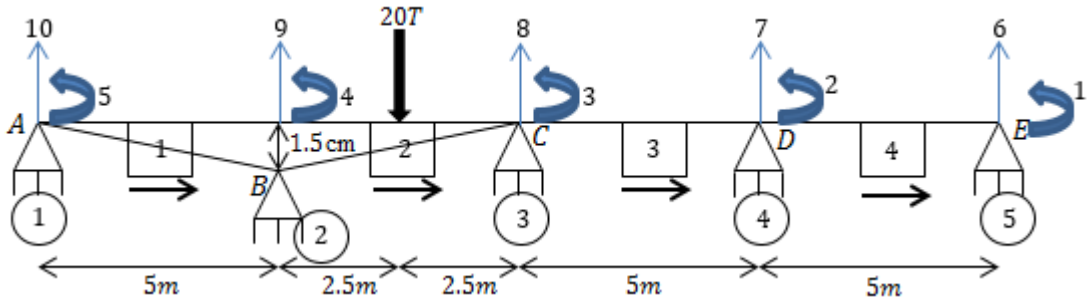
(a)

Figura 2-8

SOLUCIÓN

Notación

La viga tiene cuatro elementos y cinco nodos, los cuales son identificados de forma respectiva por números dentro de un cuadrado y dentro de un círculo. De los diez grados de libertad, cinco son desconocidos y como siempre se codifican numéricamente en primer lugar, figura 2-13b.



(b)

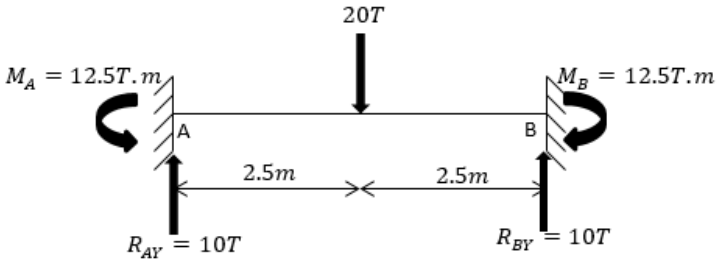
Vector de desplazamientos

Aunque el soporte articulado B impide la deflexión en ese punto, hay un desplazamiento impuesto de $1.5cm$, el cual aparece en el vector D con magnitud negativa porque se presenta en la dirección x negativa, es decir, hacia abajo, y debe convertirse en metros para manejar una congruencia de unidades. Como en los soportes A hasta E, la pendiente o rotación (θ) es desconocida, entonces,

$$D = \begin{pmatrix} D_D \\ \hline D_C \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ \hline D_6 \\ D_7 \\ D_8 \\ D_9 \\ D_{10} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} \theta_A \\ \theta_B \\ \theta_C \\ \theta_D \\ \theta_E \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.015 \\ 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ \hline 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{array}$$

Vector de cargas

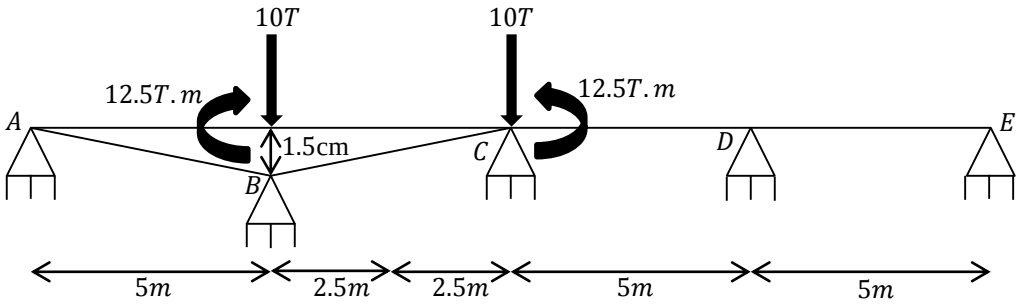
Se hace la suposición de que cada nodo impide todo tipo de grado de libertad. El elemento 2 es el único que está cargado, así que solamente se tienen las fuerzas de fijación y momentos de empotramiento perfecto siguientes, figura 2-13c.



(c)

$$R_{AY} = R_{BY} = \frac{P}{2} = \frac{20T}{2} = 10T \uparrow \qquad M_A = M_B = \frac{PL}{8} = \frac{20T(5m)}{8} = 12.5\ T \cdot m \circlearrowright$$

Las acciones anteriores actúan realmente en sentido opuesto. Se representa la viga con cargas nodales, figura 2-13d.



(d)

Por lo tanto, la matriz de cargas es

$$C = \begin{pmatrix} C_C \\ \hline C_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ \hline C_6 \\ C_7 \\ C_8 \\ C_9 \\ C_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12.5 \\ -12.5 \\ 0 \\ \hline R_{Ey} \\ R_{Dy} \\ R_{Cy} - 10 \\ R_{By} - 10 \\ R_{Ay} \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix}$$

Matriz de rigidez global para cada elemento

La matriz de rigidez global para un elemento de viga con eje longitudinal en x puede reducirse a la forma de la ecuación $2-21$, en caso de que no se presente carga axial en ella y se desprecie la deformación axial.

$$k_i = \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} N_y & N_z & F_y & F_z \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix} \begin{matrix} N_y \\ N_z \\ F_y \\ F_z \end{matrix} \qquad (2-21)$$

Entonces, la matriz de rigidez de cada elemento se determina mediante la ecuación $2-21$. De acuerdo con los números de código y las direcciones de los elementos se tiene

Elemento 1:

$$k_1 = 3.42 \cdot 10^4 \begin{matrix} \\ 10 \\ 5 \\ 9 \\ 4 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} 10 & 5 & 9 & 4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0.0960 & 0.2400 & -0.0960 & 0.2400 \\ 0.2400 & 0.8000 & -0.2400 & 0.4000 \\ -0.0960 & -0.2400 & 0.0960 & -0.2400 \\ 0.2400 & 0.4000 & -0.2400 & 0.8000 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Elemento 2:

$$k_2 = 3.42 \cdot 10^4 \begin{matrix} \\ 9 \\ 4 \\ 8 \\ 3 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} 9 & 4 & 8 & 3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0.0960 & 0.2400 & -0.0960 & 0.2400 \\ 0.2400 & 0.8000 & -0.2400 & 0.4000 \\ -0.0960 & -0.2400 & 0.0960 & -0.2400 \\ 0.2400 & 0.4000 & -0.2400 & 0.8000 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Elemento 3:

$$k_3 = 3.42 \cdot 10^4 \begin{matrix} \\ 8 \\ 3 \\ 7 \\ 2 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} 8 & 3 & 7 & 2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0.0960 & 0.2400 & -0.0960 & 0.2400 \\ 0.2400 & 0.8000 & -0.2400 & 0.4000 \\ -0.0960 & -0.2400 & 0.0960 & -0.2400 \\ 0.2400 & 0.4000 & -0.2400 & 0.8000 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Elemento 4:

$$k_4 = 3.42 \cdot 10^4 \begin{matrix} \\ 7 \\ 2 \\ 6 \\ 1 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} 7 & 2 & 6 & 1 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0.0960 & 0.2400 & -0.0960 & 0.2400 \\ 0.2400 & 0.8000 & -0.2400 & 0.4000 \\ -0.0960 & -0.2400 & 0.0960 & -0.2400 \\ 0.2400 & 0.4000 & -0.2400 & 0.8000 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Matriz de rigidez de la estructura

Se forma la matriz de rigidez de la estructura al ensamblar los elementos de las matrices de rigidez anteriores y se le efectúa la partición adecuada. Entonces,

$$K = 3.42 \cdot 10^4 \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccccc:ccccc} 0.8000 & 0.4000 & 0 & 0 & 0 & -0.2400 & 0.2400 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4000 & 1.6000 & 0.4000 & 0 & 0 & -0.2400 & 0 & 0.2400 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4000 & 1.6000 & 0.4000 & 0 & 0 & -0.2400 & 0 & 0.2400 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4000 & 1.6000 & 0.4000 & 0 & 0 & -0.2400 & 0 & 0.2400 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4000 & 0.8000 & 0 & 0 & 0 & -0.2400 & 0.2400 \\ \hdashline -0.2400 & -0.2400 & 0 & 0 & 0 & 0.0960 & -0.0960 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2400 & 0 & -0.2400 & 0 & 0 & -0.0960 & 0.1920 & -0.0960 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2400 & 0 & -0.2400 & 0 & 0 & -0.0960 & 0.1920 & -0.0960 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2400 & 0 & -0.2400 & 0 & 0 & -0.0960 & 0.1920 & -0.0960 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2400 & 0.2400 & 0 & 0 & 0 & -0.0960 & 0.0960 \end{array}\right) \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix}$$

La nomenclartura asociada a las submatrices, como de costumbre, es

$$K = \left(\begin{array}{c:c} K_{11} & K_{12} \\ \hdashline K_{21} & K_{22} \end{array}\right)$$

Cálculo de las incógnitas

Al escribir $C = KD$, se extraen y se resuelven dos subsistemas con la finalidad de determinar primero las incógnitas y luego los desplazamientos.

El primer subsistema es como el de la ecuación $2 - 10$.

$$C_C = K_{11} D_D + K_{12} D_C$$

Como esta vez el vector D_C es diferente de cero, el despeje de los desplazamientos desconocidos es

$$D_D = {K_{11}}^{-1}(C_C - K_{12} D_C) \qquad (2-22)$$

En consecuencia,

$$\begin{pmatrix} \theta_A \\ \theta_B \\ \theta_C \\ \theta_D \\ \theta_E \end{pmatrix} = \frac{1}{3.42 \cdot 10^4} \begin{pmatrix} 0.8000 & 0.4000 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4000 & 1.6000 & 0.4000 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4000 & 1.6000 & 0.4000 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4000 & 1.6000 & 0.4000 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4000 & 0.8000 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$* \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12.5 \\ -12.5 \\ 0 \end{pmatrix} - (3.42 \cdot 10^4) \begin{pmatrix} -0.2400 & 0.2400 & 0 & 0 & 0 \\ -0.2400 & 0 & 0.2400 & 0 & 0 \\ 0 & -0.2400 & 0 & 0.2400 & 0 \\ 0 & 0 & -0.2400 & 0 & 0.2400 \\ 0 & 0 & 0 & -0.2400 & 0.2400 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.015 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$\begin{pmatrix} \theta_A \\ \theta_B \\ \theta_C \\ \theta_D \\ \theta_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.00037 rad \\ -0.000741 rad \\ 0.002593 rad \\ 0.000284 rad \\ -0.004642 rad \end{pmatrix}$$

El segundo subsistema es el denotado por la ecuación $2-11$.

$$C_D = K_{21}D_D + K_{22}D_C$$

Al usar los resultados recién obtenidos y simplificar se tiene

$$\begin{pmatrix} R_{Ey} \\ R_{Dy} \\ R_{Cy}-10 \\ R_{By}-10 \\ R_{Ay} \end{pmatrix} = (3.42\cdot 10^4)\begin{pmatrix} -0.2400 & -0.2400 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2400 & 0 & -0.2400 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2400 & 0 & -0.2400 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2400 & 0 & -0.2400 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2400 & 0.2400 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.00037 \\ -0.000741 \\ 0.002593 \\ 0.000284 \\ -0.004642 \end{pmatrix}$$

$$+(3.42\cdot 10^4)\begin{pmatrix} 0.0960 & 0.0960 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0960 & 0.1920 & -0.0960 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0960 & 0.1920 & -0.0960 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0960 & 0.1920 & -0.0960 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0960 & 0.0960 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.015 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} R_{Ey} \\ R_{Dy} \\ R_{Cy}-10 \\ R_{By}-10 \\ R_{Ay} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.04007 \\ -18.2404 \\ 40.8377 \\ -39.1144 \\ 13.4771 \end{pmatrix}$$

$$R_{Ey} = 3.04007 \Rightarrow \therefore R_{Ey} = 3.04007T\uparrow$$

$$R_{Dy} = -18.2404 \Rightarrow \therefore R_{Dy} = 18.2404T\downarrow$$

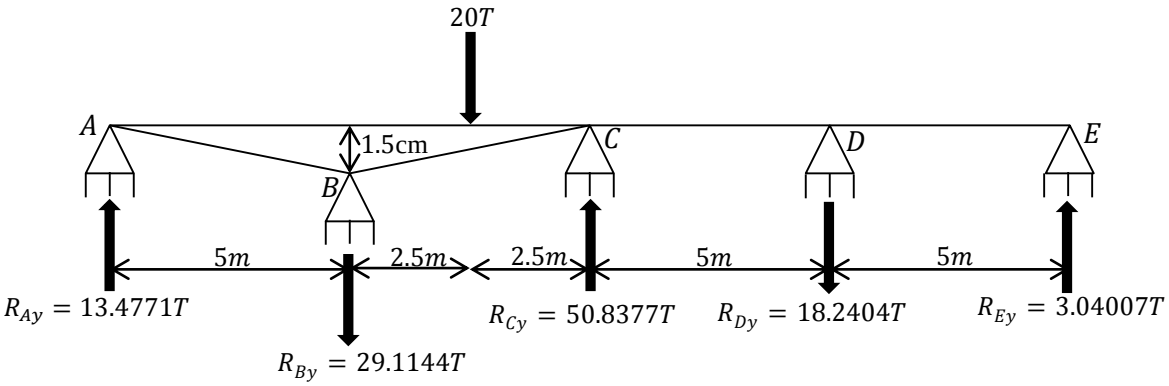
$$R_{Cy} - 10 = 40.8377 \Rightarrow R_{Cy} = 40.8377 + 10 = 50.8377 \Rightarrow \therefore R_{Cy} = 50.8377T\uparrow$$

$$R_{By} - 10 = -39.1144 \Rightarrow R_{By} = -39.1144 + 10 = -29.1144 \therefore \quad R_{By} = 29.1144T\downarrow$$

$$R_{Ay} = 13.4771 \Rightarrow \therefore R_{Ay} = 13.4771T\uparrow$$

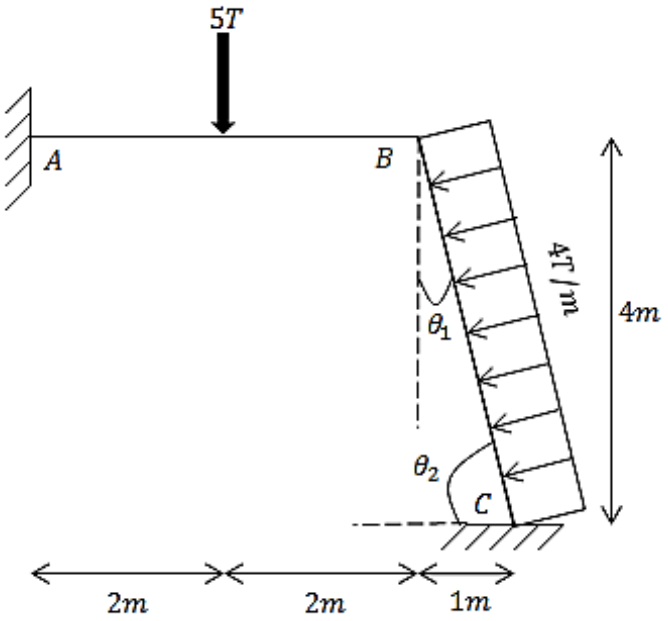
En el diagrama de la figura 2-13e pueden ser visualizados los valores de las reacciones en los soportes de la viga hiperestática cuyo apoyo B se asienta $1.5cm$.

(e)



Ejercicio 2.14 Resolución de un pórtico plano con el método de la rigidez directa.

Instrucciones Para el marco que se muestra en la figura 2-14a, calcule las reacciones en los empotramientos A y C. Obsérvese que la columna inclinada recibe una carga distribuida uniforme de $4T/m$ ortogonal a su eje. Considere para ambos miembros el módulo de elasticidad del concreto con $f'c = 250kg/cm^2$ y una sección transversal rectangular de base $b = 20cm$ y altura $h = 30cm$.



(a)

Figura 2-14

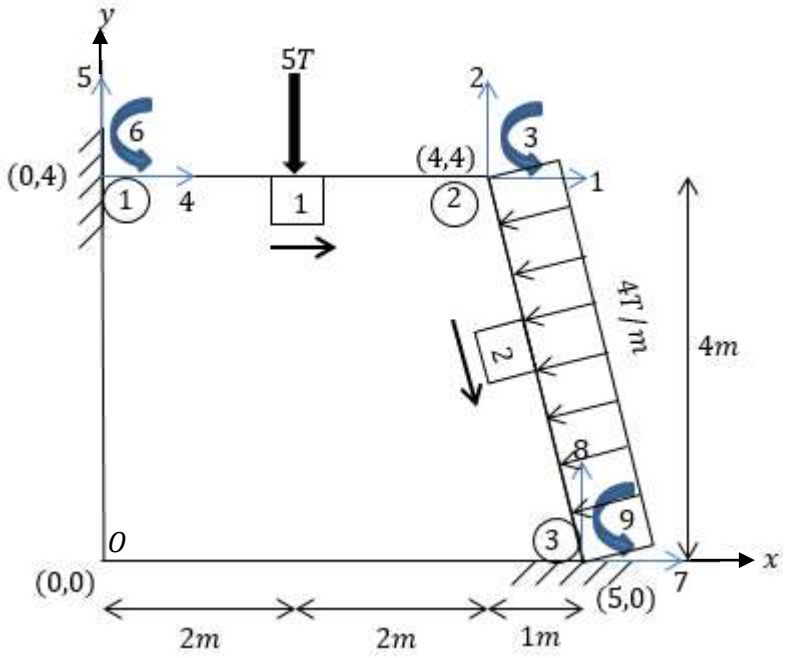
SOLUCIÓN

Notación

Se divide la estructura en elementos finitos. El marco tiene dos elementos y tres nodos que han sido identificados arbitrariamente por medio de números encerrados en un cuadrado y en un círculo, de manera respectiva, figura 2-14b. Se coloca una flecha adyacente en cada elemento para simbolizar de forma arbitraria sus extremos lejano F y cercano N, con el criterio de que la punta de la flecha se dirige hacia el extremo alejado. El origen de las coordenadas globales x, y, z que tienen su dirección positiva hacia la derecha, hacia arriba y en el sentido antihorario, es establecido en el punto O con la finalidad de que todos los nodos tengan coordenadas positivas.

En un marco, los efectos de la flexión, la fuerza cortante y la fuerza axial deben ser considerados, en consecuencia, en cada nodo hay tres grados de libertad, los cuales corresponden a un desplazamiento horizontal, un desplazamiento vertical y

una rotación. La estructura es cinemáticamente indeterminada de tercer grado, ya que de los nueve grados de libertad, tres no están restringidos. Los grados de libertad se codifican numéricamente de tal modo que los números más bajos de código representen los desplazamientos desconocidos, mientras que los números más altos indiquen desplazamientos conocidos.



(b)

Vector de desplazamientos

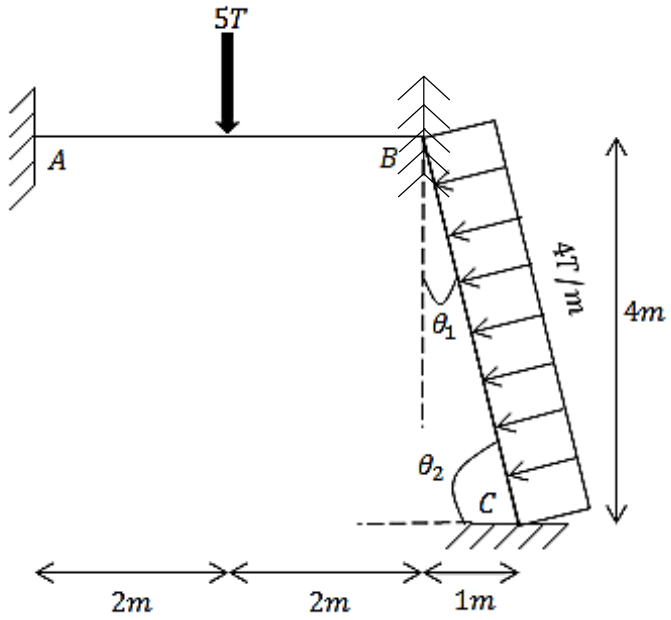
Como los empotramientos 1 y 2 restringen de movimiento a esos nodos, se tiene el siguiente vector de desplazamientos D, el cual se divide en dos vectores: el de desplazamientos desconocidos D_D y el de desplazamientos conocidos D_C.

$$D = \begin{pmatrix} D_D \\ \hline D_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ \hline D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \\ D_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_{HB} \\ \delta_{VB} \\ \theta_B \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix}$$

Vector de cargas

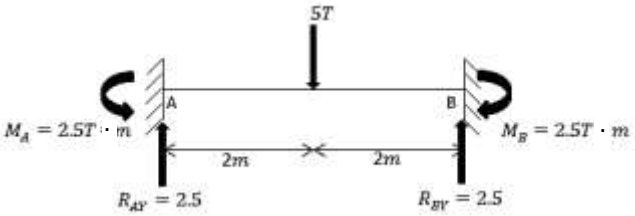
Si se impone una restricción total de movimiento en cada nodo, entonces todos los nodos estarán empotrados imaginariamente, figura 2-14c. Bajo esa condición, se calculan las fuerzas de fijación y momentos de empotramiento perfecto asociadas

a cada elemento, figuras 2-14d y 2-14e. Remítase a un formulario o dedúzcalas de preferencia.



(c)

Elemento 1.



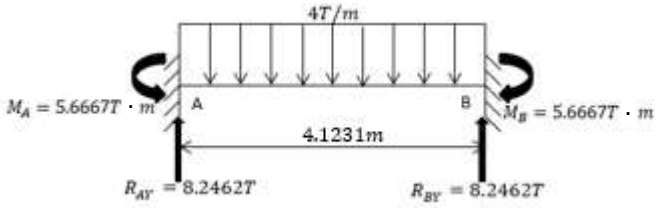
(d)

$$R_{AY} = R_{BY} = \frac{P}{2} = \frac{5T}{2} = 2.5\ T \uparrow$$

$$M_A = M_B = \frac{PL}{8} = \frac{5T(4m)}{8} = 2.5\ T \cdot m \circlearrowleft \circlearrowright$$

Elemento 2.

Al rotar el elemento 2 de tal modo que su eje sea horizontal y si se sabe que su longitud es $L = \sqrt{(4m)^2 + (1m)^2} = 4.1231m$, se tiene

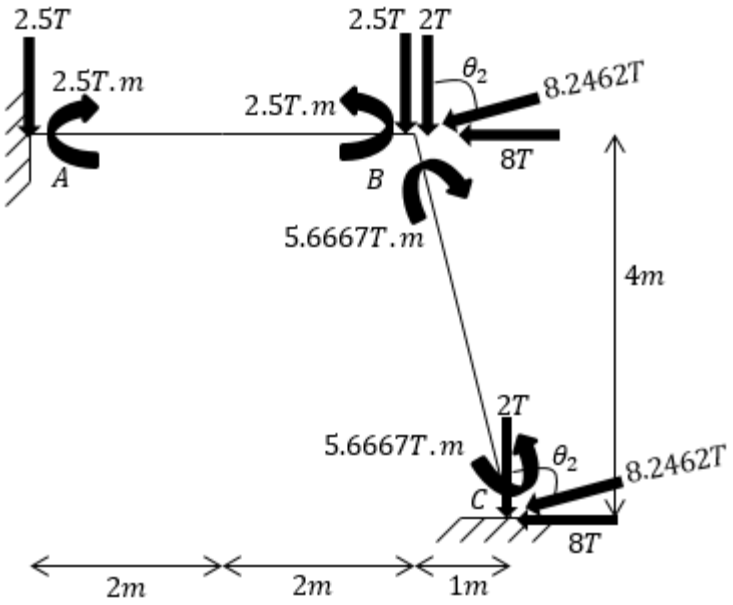


(e)

$$R_{AY} = R_{BY} = \frac{WL}{2} = \frac{(4T/m)(4.1231m)}{2} = 8.2462\ T\uparrow$$

$$M_A = M_B = \frac{WL^2}{12} = \frac{(4T/m)(4.1231m)^2}{12} = 5.6667\ T \cdot m\circlearrowleft\circlearrowright$$

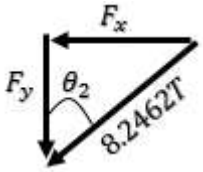
Las fuerzas de fijación y momentos de empotramiento calculados existirían si restringiéramos de movimiento a todos los nodos, algo que no ocurre realmente, pues el nodo B está libre. Por lo tanto, las fuerzas y momentos elásticos o efectivos sobre los nodos actúan verdaderamente en sentido opuesto al definido, así que para fines de análisis estas son las fuerzas que aparecen, figura 2-14f.



(f)

Evidentemente, las fuerzas de $8.2462T$ son ortogonales al miembro $B-C$; puesto que en los nodos B y C hay números de código en la dirección de los ejes globales, estas fuerzas deben ser resueltas en sus componentes rectangulares horizontal y vertical, figura 2-14g.

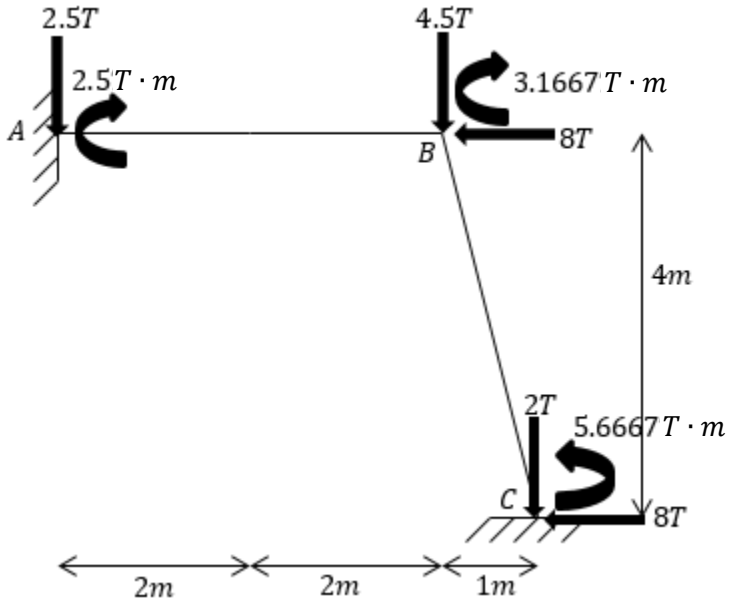
(g)



$$\theta_2 = \tan^{-1}\frac{4}{1} = 75.96°$$

$$F_y = 8.2462 \cdot \cos(75.96°) = 2T \qquad F_x = 8.2462 \cdot \sin(75.96°) = 8T$$

Al hacer la suma algebraica de las fuerzas y momentos en cada nodo se obtienen las acciones totales en ellos. Finalmente, el marco cargado que se analizará con el método de la rigidez es el que se observa en la figura 2-14h.



(h)

Al efectuar un cotejo entre esta figura y la 2-14b elaborado en la parte de notación, se concluye que el vector de cargas C, el cual se parte en un vector de cargas conocidas C_C y un vector de cargas desconocidas C_D, es

$$C = \begin{pmatrix} C_C \\ \hline C_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ \hline C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \\ C_8 \\ C_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4.5 \\ -3.1667 \\ \hline R_{Ax} \\ R_{Ay} - 2.5 \\ M_A - 2.5 \\ R_{Cx} - 8 \\ R_{Cy} - 2 \\ M_C + 5.6667 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix}$$

Cosenos directores y matriz de rigidez global para cada elemento

De acuerdo a la información proporcionada al inicio, para los dos elementos se tiene

$$A = (0.2m)(0.3m) = 0.06m^2$$

$$E = 14000\sqrt{250} = 221359.4362\ {}^{kg}/_{cm^2} = 2213594.362\ {}^{T}/_{m^2}$$

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{(0.2m)(0.3m)^3}{12} = 0.00045m^4$$

La matriz de rigidez global de un miembro de marco se obtiene de

$$k_i = \begin{array}{c} \begin{matrix} N_x & N_y & N_z & F_x & F_y & F_z \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} \left(\frac{AE}{L}\lambda_x^2 + \frac{12EI}{L^3}\lambda_y^2\right) & \left(\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)\lambda_x\lambda_y & -\frac{6EI}{L^2}\lambda_y & -\left(\frac{AE}{L}\lambda_x^2 + \frac{12EI}{L^3}\lambda_y^2\right) & -\left(\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)\lambda_x\lambda_y & -\frac{6EI}{L^2}\lambda_y \\ \left(\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)\lambda_x\lambda_y & \left(\frac{AE}{L}\lambda_y^2 + \frac{12EI}{L^3}\lambda_x^2\right) & \frac{6EI}{L^2}\lambda_x & -\left(\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)\lambda_x\lambda_y & -\left(\frac{AE}{L}\lambda_y^2 + \frac{12EI}{L^3}\lambda_x^2\right) & \frac{6EI}{L^2}\lambda_x \\ -\frac{6EI}{L^2}\lambda_y & \frac{6EI}{L^2}\lambda_x & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2}\lambda_y & -\frac{6EI}{L^2}\lambda_x & \frac{2EI}{L} \\ -\left(\frac{AE}{L}\lambda_x^2 + \frac{12EI}{L^3}\lambda_y^2\right) & -\left(\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)\lambda_x\lambda_y & \frac{6EI}{L^2}\lambda_y & \left(\frac{AE}{L}\lambda_x^2 + \frac{12EI}{L^3}\lambda_y^2\right) & \left(\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)\lambda_x\lambda_y & \frac{6EI}{L^2}\lambda_y \\ -\left(\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)\lambda_x\lambda_y & -\left(\frac{AE}{L}\lambda_y^2 + \frac{12EI}{L^3}\lambda_x^2\right) & -\frac{6EI}{L^2}\lambda_x & \left(\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)\lambda_x\lambda_y & \left(\frac{AE}{L}\lambda_y^2 + \frac{12EI}{L^3}\lambda_x^2\right) & -\frac{6EI}{L^2}\lambda_x \\ -\frac{6EI}{L^2}\lambda_y & \frac{6EI}{L^2}\lambda_x & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2}\lambda_y & -\frac{6EI}{L^2}\lambda_x & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix} \begin{matrix} N_x \\ N_y \\ N_z \\ F_x \\ F_y \\ F_z \end{matrix} \end{array} \qquad (2-23)$$

Se aplican las ecuaciones $2-2, 2-3$ y $2-23$ a cada elemento. Por consiguiente,

Elemento 1. Debido a que el extremo cercano es ① y el extremo lejano es ②, tenemos

$$L = 4m \qquad \lambda_x = \frac{4-0}{4} = 1 \qquad \lambda y = \frac{4-4}{4} = 0$$

$$k_1 = 10^4 \begin{array}{c} \begin{matrix} 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 3.3204 & 0 & 0 & -3.3204 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0187 & 0.0374 & 0 & -0.0187 & 0.0374 \\ 0 & 0.0374 & 0.0996 & 0 & -0.0374 & 0.0498 \\ -3.3204 & 0 & 0 & 3.3204 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0187 & -0.0374 & 0 & 0.0187 & -0.0374 \\ 0 & 0.0374 & 0.0498 & 0 & -0.0374 & 0.0996 \end{pmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \end{array}$$

Elemento 2. Puesto que el extremo cercano es ② y el extremo lejano es ③, se tiene

$$L = 4.1231\, m \qquad \lambda_x = \frac{5-4}{4.1231} = 0.2425 \qquad \lambda_y = \frac{0-4}{4.1231} = -0.9701$$

$$k_2 = 10^4 \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 7 & 8 & 9 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0.2055 & -0.7538 & 0.0341 & -0.2055 & 0.7538 & 0.0341 \\ -0.7538 & 3.0325 & 0.0085 & 0.7538 & -3.0325 & 0.0085 \\ 0.0341 & 0.0085 & 0.0966 & -0.0341 & -0.0085 & 0.0483 \\ -0.2055 & 0.7538 & -0.0341 & 0.2055 & -0.7538 & -0.0341 \\ 0.7538 & -3.0325 & -0.0085 & -0.7538 & 3.0325 & -0.0085 \\ 0.0341 & 0.0085 & 0.0483 & -0.0341 & -0.0085 & 0.0966 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix} \end{array}$$

Considere que las matrices de rigidez de los elementos deben ser simétricas.

Matriz de rigidez de la estructura y cálculo de las incógnitas

Para calcular la matriz de rigidez de la estructura K, la cual también es simétrica y tiene un orden de $9\ X\ 9$ dado que nueve grados de libertad fueron designados para el marco, se ensamblan las matrices anteriores.

$$K = 10^4 \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccc:ccc:ccc} 3.5259 & -0.7538 & 0.0341 & -3.3204 & 0 & 0 & -0.2055 & 0.7538 & 0.0341 \\ -0.7538 & 3.0512 & -0.0288 & 0 & -0.0187 & -0.0374 & 0.7538 & -3.0325 & 0.0085 \\ 0.0341 & -0.0288 & 0.1962 & 0 & 0.0374 & 0.0498 & -0.0341 & -0.0085 & 0.0483 \\ \hdashline -3.3204 & 0 & 0 & 3.3204 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0187 & 0.0374 & 0 & 0.0187 & 0.0374 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0374 & 0.0498 & 0 & 0.0374 & 0.0996 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline -0.2055 & 0.7538 & -0.0341 & 0 & 0 & 0 & 0.2055 & -0.7538 & -0.0341 \\ 0.7538 & -3.0325 & -0.0085 & 0 & 0 & 0 & -0.7538 & 3.0325 & -0.0085 \\ 0.0341 & 0.0085 & 0.0483 & 0 & 0 & 0 & 0.0341 & -0.0085 & 0.0966 \end{array}\right) \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix}$$

Como se tienen tres incógnitas de desplazamiento, la matriz anterior se secciona de tal modo que en la parte izquierda haya 3 columnas y en la porción superior haya 3 filas. Cada submatriz se identifica así

$$K = \left(\begin{array}{c:c} K_{11} & K_{12} \\ \hdashline K_{21} & K_{22} \end{array}\right)$$

Se requiere de $C = KD$. Particularmente, para este marco tenemos

$$\begin{pmatrix} -8 \\ -4.5 \\ -3.1667 \\ \hdashline R_{AX} \\ R_{AY} - 2.5 \\ M_A - 2.5 \\ R_{CX} - 8 \\ R_{CY} - 2 \\ M_C + 5.6667 \end{pmatrix} = 10^4 \begin{pmatrix} 3.5259 & -0.7538 & 0.0341 & -3.3204 & 0 & 0 & -0.2055 & 0.7538 & 0.0341 \\ -0.7538 & 3.0512 & -0.0288 & 0 & -0.0187 & -0.0374 & 0.7538 & -3.0325 & 0.0085 \\ 0.0341 & -0.0288 & 0.1962 & 0 & 0.0374 & 0.0498 & -0.0341 & -0.0085 & 0.0483 \\ \hdashline -3.3204 & 0 & 0 & 3.3204 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0187 & 0.0374 & 0 & 0.0187 & 0.0374 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0374 & 0.0498 & 0 & 0.0374 & 0.0996 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline -0.2055 & 0.7538 & -0.0341 & 0 & 0 & 0 & 0.2055 & -0.7538 & -0.0341 \\ 0.7538 & -3.0325 & -0.0085 & 0 & 0 & 0 & -0.7538 & 3.0325 & -0.0085 \\ 0.0341 & 0.0085 & 0.0483 & 0 & 0 & 0 & 0.0341 & -0.0085 & 0.0966 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_{HB} \\ \delta_{VB} \\ \theta_B \\ \hdashline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De forma general, el sistema matricial es

$$\left(\frac{C_C}{C_D}\right) = \left(\begin{array}{c:c} K_{11} & K_{12} \\ \hdashline K_{21} & K_{22} \end{array}\right)\left(\frac{D_D}{D_C}\right)$$

Los desplazamientos desconocidos se determinan extrayendo y resolviendo un primer subsistema correspondiente a

$$C_C = K_{11}D_D + K_{12}D_C$$

Debido a que D_C es un vector nulo, la ecuación anterior se simplifica a

$$C_C = K_{11}D_D$$

Por lo tanto,

$$\begin{pmatrix} -8 \\ -4.5 \\ 3.1667 \end{pmatrix} = 10^4 \begin{pmatrix} 3.5259 & -0.7538 & 0.0341 \\ -0.7538 & 3.0512 & -0.0288 \\ 0.0341 & -0.0288 & 0.1962 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_{HB} \\ \delta_{VB} \\ \theta_B \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \Delta_{HB} \\ \delta_{VB} \\ \theta_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.00025989\ m \\ -0.00022682\ m \\ -0.00160176\ rad \end{pmatrix}$$

Al realizar un análisis de estos resultados, notamos que el nodo B experimenta una rotación horaria de $0.0016\ rad$ y se desplaza horizontalmente hacia la izquierda $0.00026\ m$ y verticalmente hacia abajo $0.0016m$.

Las reacciones se obtienen a partir de resolver un segundo subsistema que es

$$C_D = K_{21} D_D + K_{22} D_C$$

Como ya se mencionó, D_C es un vector cero, así que

$$C_D = K_{21} D_D$$

Al usar los desplazamientos calculados se tiene

$$\begin{pmatrix} R_{Ax} \\ R_{Ay} - 2.5 \\ M_A - 2.5 \\ R_{Cx} - 8 \\ R_{Cy} - 2 \\ M_C + 5.6667 \end{pmatrix} = 10^4 \begin{pmatrix} -3.3204 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0187 & 0.0374 \\ 0 & -0.0374 & 0.0498 \\ -0.2055 & 0.7538 & -0.0341 \\ 0.7538 & -3.0325 & -0.0085 \\ 0.0341 & 0.0085 & 0.0483 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.00025989 \\ -0.00022682 \\ -0.00160176 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8.6294 \\ -0.5560 \\ -0.7130 \\ -0.6294 \\ 5.0560 \\ -0.8819 \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$R_{Ax} = 8.6294 \Rightarrow \therefore R_{Ax} = 8.6294T \rightarrow$$

$$R_{Ay} - 2.5 = -0.5560 \Rightarrow R_{Ay} = -0.5560 + 2.5 = 1.944 \Rightarrow \therefore R_{Ay} = 1.944T \uparrow$$

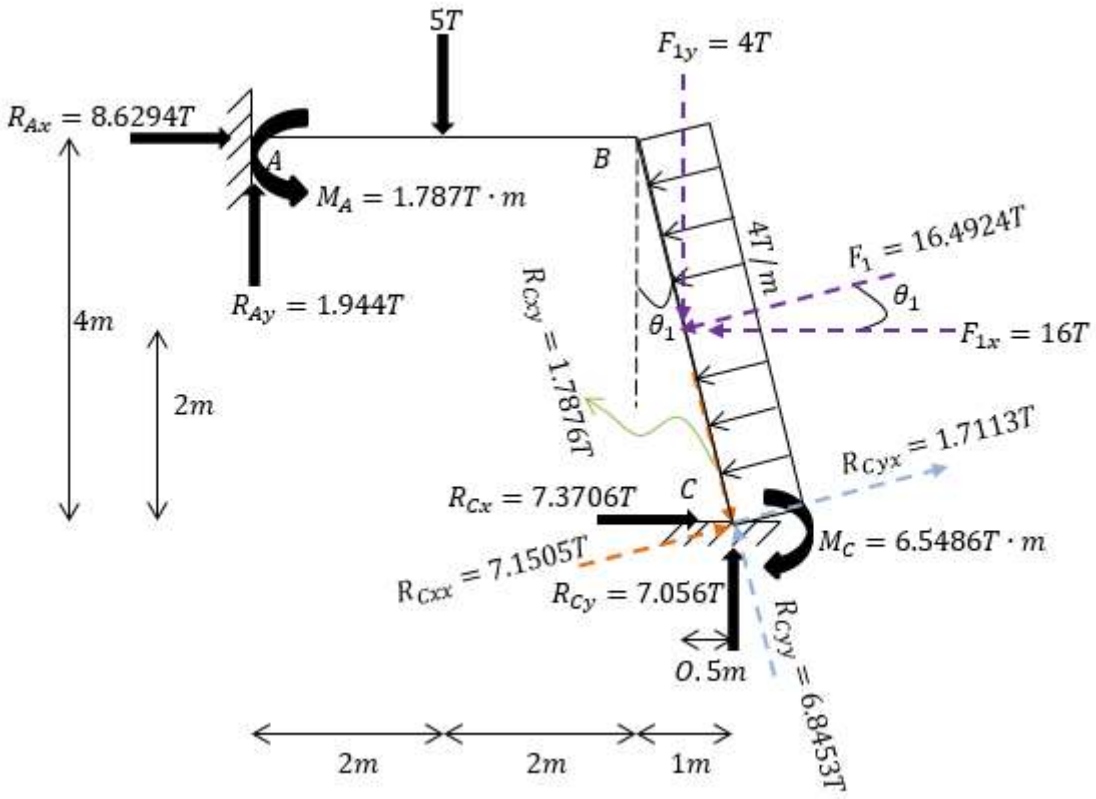
$$M_A - 2.5 = -0.7130 \Rightarrow M_A = -0.7130 + 2.5 = 1.787 \Rightarrow \therefore M_A = 1.787T \cdot m \circlearrowleft$$

$$R_{Cx} - 8 = -0.6294 \Rightarrow R_{Cx} = -0.6294 + 8 = 7.3706 \Rightarrow \therefore R_{Cx} = 7.3706T \rightarrow$$

$$R_{Cy} - 2 = 5.0560 \Rightarrow R_{Cy} = 5.0560 + 2 = 7.0560 \Rightarrow \therefore R_{Cy} = 7.0560T \uparrow$$

$$M_C + 5.6667 = -0.8819 \Rightarrow M_C = -0.8819 - 5.6667 = -6.5486 \Rightarrow \therefore M_C = 6.5486T \cdot m \circlearrowright$$

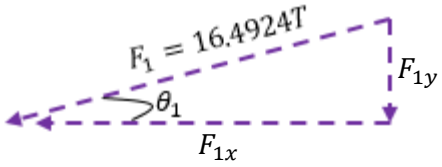
En la figura 2-14i se muestran las reacciones en los empotramientos del marco.



(i)

Se demuestra el equilibrio externo del marco. La fuerza resultante de la carga distribuida de $4T/m$, que obviamente tiene su punto de aplicación a la mitad del miembro $B-C$, es $F_1 = (4T/m)(4.1231m) = 16.4924T$, y al resolverla en sus componentes x, y, figura 2-14j, resulta

(j)



$$F_{1y} = F \cdot sin\theta_1 = 16.4924T\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = 4T$$

$$F_{1x} = F \cdot cos\theta_1 = 16.4924T\left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right) = 16T$$

$$+\rightarrow \sum Fx = 8.6294 - 16 + 7.3706 = 0 \quad ok$$

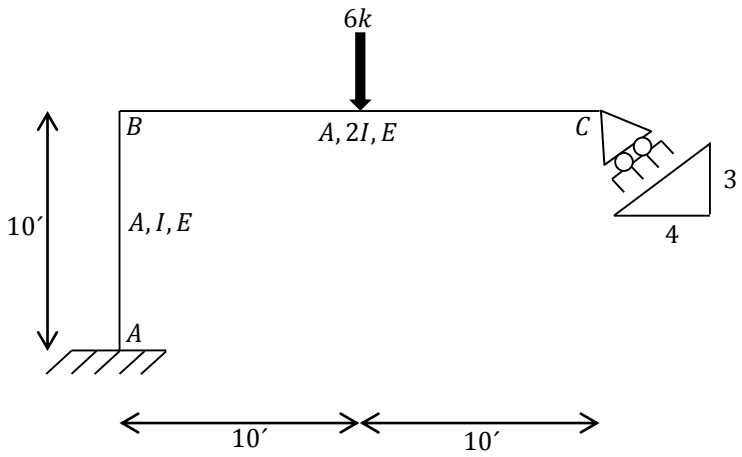
$$+\uparrow \sum Fy = 1.944 - 5 - 4 + 7.056 = 0 \quad ok$$

$$\circlearrowleft + \sum MA = 0$$

$$-1.787 + 5(2) - 7.3706(4) - 7.056(5) + 6.5486 + 16(2) + 4(4.5) \cong 0 \quad ok$$

Ejercicio 2.15 Análisis de un marco con un rodillo inclinado, en 2D, con el método matricial de la rigidez.

Instrucciones Use el método del análisis matricial por rigidez para calcular las reacciones en los apoyos de la estructura rígida mostrada en la figura 2-15a. En la ilustración se indican los valores relativos del área y del momento de inercia de la sección transversal de cada elemento de la estructura. $I = 500 pulg^4$ y $A = 20 pulg^2$. El módulo de elasticidad es igual para los dos elementos.

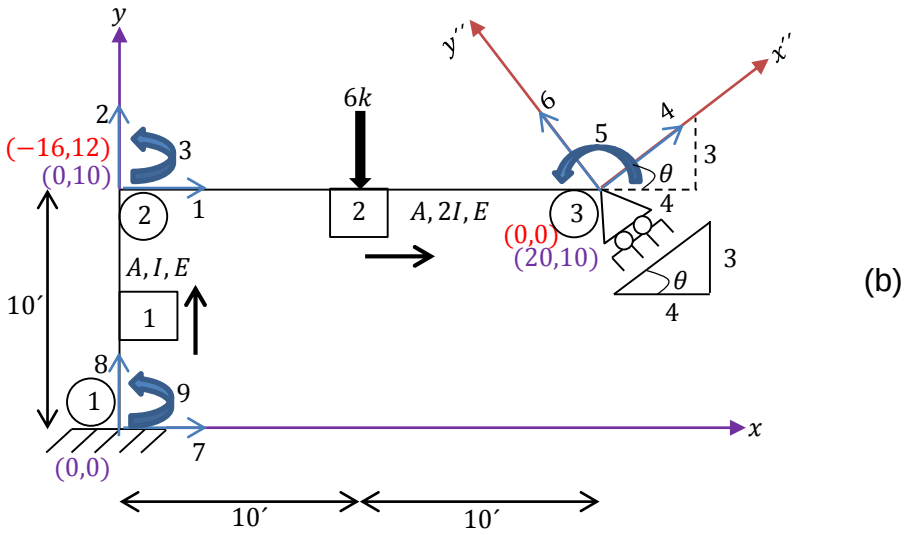


(a)

Figura 2-15

SOLUCIÓN

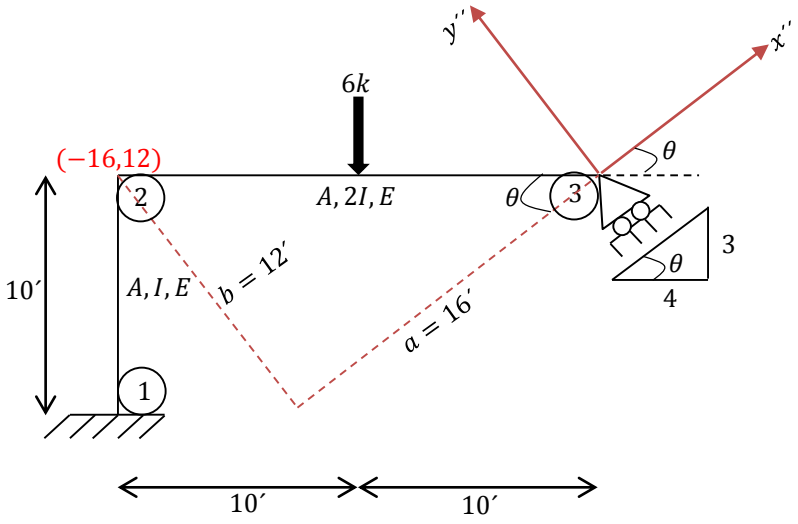
Notación



(b)

En el marco hay tres nodos y dos elementos que han sido debidamente identificados numéricamente, figura 2-15b. Como siempre, la punta de la flecha en cada elemento

está dirigida hacia el extremo lejano (F), por lo que el extremo contrario es el cercano (N), del mismo. Para el elemento 2, el extremo lejano tiene que ser necesariamente el nodo ③, ya que es ahí donde está el soporte girado. El origen de los ejes globales x, y, z se elige en el nodo ①. Como el soporte en rodillos ③ se sitúa en un plano inclinado, en este nodo se usan coordenadas nodales x'',y'', z''. La dirección del eje x'' debe coincidir con el plano de deslizamiento del soporte inclinado y luego el eje y'' es ortogonal a x'', es decir, la dirección de y'' coincide con la línea de acción de la reacción del soporte en ③. Se codifican los desplazamientos de tal forma que en primer lugar estén los no restringidos y después los restringidos. Observe que el desplazamiento codificado con 6 es nulo. Las coordenadas en los ejes x'', y'' para el nodo ② pueden obtenerse por trigonometría, figura 2-15c.



(c)

$$\tan\theta = \frac{3}{4} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\frac{3}{4} = 36.87°$$

$$a = 20\cos 36.87° = 16' \qquad b = 20\sin 36.87° = 12'$$

La tabla 2-8 presenta las coordenadas en los nodos.

	Ejes $x - y$		Ejes $x'' - y''$	
Nudo	x (pies)	y (pies)	x''(pies)	y''(pies)
1	0	0		
2	0	10	-16	12
3	20	10	0	0

Tabla 2-8

Remitiéndonos a la figura 2-15b, se tienen los siguientes datos de las tablas 2-9 y 2-10.

Miembro	Nudo		A (pie^2)	I (pie^4)	L (pie)
	N	F			
1	1	2	0.1389	0.0241	10
2	2	3	0.1389	0.0482	20

Tabla 2-9

Elemento	Numeración de los grados de libertad								
	N_x	N_y	N_z	$F_{x''}$	$F_{y''}$	$F_{z''}$	F_x	F_y	F_z
1	7	8	9				1	2	3
2	1	2	3	4	5	6			

Tabla 2-10

$$A = 20pulg^2\left(\frac{(1pie)^2}{(12pulg)^2}\right) \cong 0.1389pie^2;\ I = 50pulg^4\left(\frac{(1pie)^4}{(12pulg)^4}\right) \cong 0.0241pie^4$$

Vector de desplazamientos

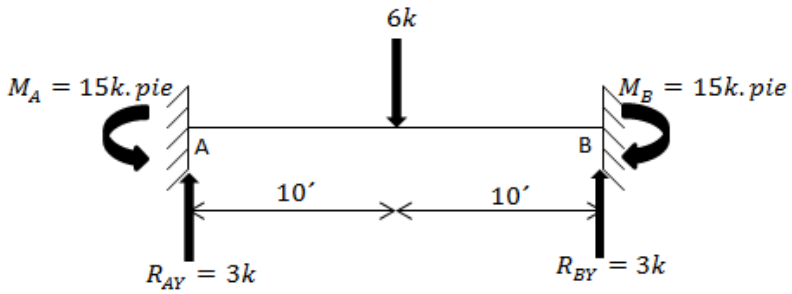
La matriz de deslazamientos D es

$$D = \begin{pmatrix} D_D \\ \hline D_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ \hline D_6 \\ D_7 \\ D_8 \\ D_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_{HB} \\ \delta_{VB} \\ \theta_B \\ \theta_C \\ \Delta_C \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix}$$

Vector de Cargas

Una vez que se restringe imaginariamente de movimiento a cada nodo del marco al imponerles un empotramiento, se determinan las fuerzas de fijación y los momentos de empotramiento perfecto del elemento cargado, figura 2-15d.

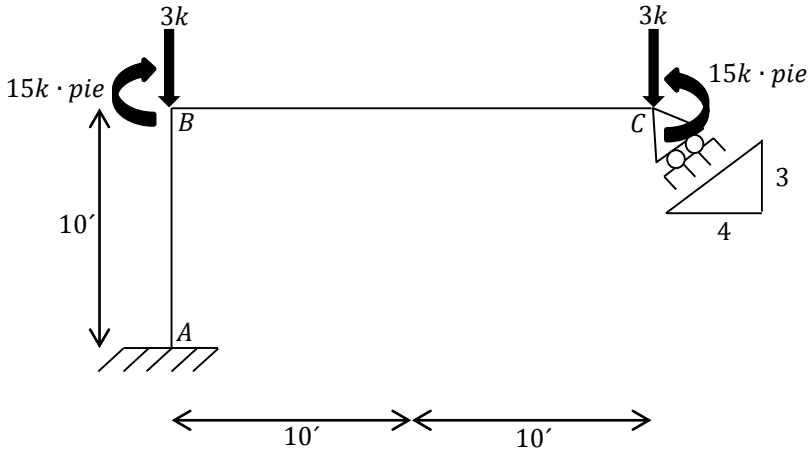
Elemento 1.



(d)

$$R_{AY} = R_{BY} = \frac{P}{2} = \frac{6k}{2} = 3k \uparrow \qquad M_A = M_B = \frac{PL}{8} = \frac{(6k)(20')}{8} = 15\ k \cdot pie \circlearrowright$$

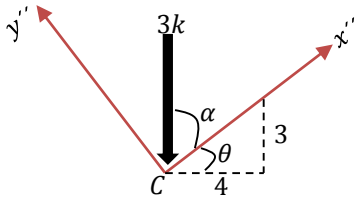
Las fuerzas y momentos elásticos sobre los nodos actúan en realidad en sentido opuesto al definido, así que, para fines de análisis las acciones que aparecen son las que se muestran en la figura 2-15e.



(e)

Como el nodo C tiene números de código en la dirección de los ejes nodales, la fuerza de $3k$ debe ser resuelta en sus componentes rectangulares cuyas líneas de acción coinciden con x'', y'', figuras 2-15f y 2-15g.

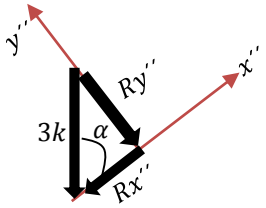
(f)



$$\alpha = 90° - \theta = 90° - 36.87° = 53.13°$$

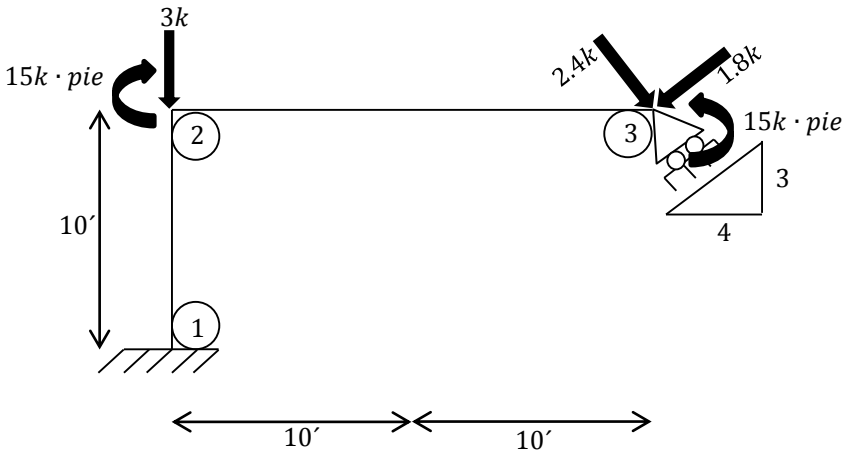
$$\sin\alpha = \frac{Ry''}{3k} \Rightarrow Ry'' = (3k)(\sin 53.13°) = 2.40k$$

$$\cos\alpha = \frac{Rx''}{3k} \Rightarrow Rx'' = (3k)(\cos 53.13°) = 1.8k$$



(g)

En consecuencia, las acciones totales en cada nodo del marco a analizarse son las que se representan en la figura 2-15h.



(h)

La matriz de cargas C se obtiene al efectuar un cotejo entre las figuras 2-15h y 2-15b.

$$C = \begin{pmatrix} C_C \\ \hline C_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ \hline C_6 \\ C_7 \\ C_8 \\ C_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -15 \\ -1.8 \\ 15 \\ \hline R_C - 2.4 \\ R_{Ax} \\ R_{Ay} \\ M_A \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix}$$

Cosenos directores y matriz de rigidez global para cada elemento

Debido a que el elemento 1 sólo tiene números de código en la dirección de los ejes globales, únicamente se determinan los cosenos directores λ_x y λ_y, a través de las ecuaciones $2-2$ y $2-3$, y su matriz de rigidez queda definida por la ecuación $2-23$. En cambio, el elemento 2, por estar conectado al soporte girado, tiene números de código en la dirección de los ejes globales y nodales, en sus nodos inicial y final, respectivamente, por lo tanto, aparte de tener cosenos directores λ_x y λ_y, implica el cálculo de cosenos directores $\lambda_{x''}$ y $\lambda_{y''}$ por medio de las ecuaciones $2-16$ y $2-17$, y su matriz de rigidez global se determina con la ecuación $2-24$.

Elemento 1.

$$\lambda_x = \frac{x_F - x_N}{L} = \frac{0-0}{10} = 0 \qquad \lambda_y = \frac{y_F - y_N}{L} = \frac{10-0}{10} = 1$$

$$k_1 = E\begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 & 1 & 2 & 3 \\ 0.0003 & 0 & -0.0014 & -0.0003 & 0 & -0.0014 \\ 0 & 0.0139 & 0 & 0 & -0.0139 & 0 \\ -0.0014 & 0 & 0.0096 & 0.0014 & 0 & 0.0048 \\ -0.0003 & 0 & 0.0014 & 0.0003 & 0 & 0.0014 \\ 0 & -0.0139 & 0 & 0 & 0.0139 & 0 \\ -0.0014 & 0 & 0.0048 & 0.0014 & 0 & 0.0096 \end{pmatrix}\begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

Elemento 2.

$$\lambda_x = \frac{20-0}{20} = 1 \qquad \lambda_y = \frac{10-10}{20} = 0$$

$$\lambda_{x''} = \frac{x''_F - x''_N}{L} = \frac{0-(-16)}{20} = 0.8 \qquad \lambda_{y''} = \frac{y''_F - y''_N}{L} = \frac{0-12}{20} = -0.6$$

Se tiene que la matriz de rigidez para cada miembro i del marco que está conectado a un soporte de rodillos inclinado es:

$$k_i = \begin{pmatrix} N_x & N_y & N_z & F_{x''} & F_{y''} & F_{z''} \\ \left(\frac{AE}{L}\lambda_x^2 + \frac{12EI}{L^3}\lambda_y^2\right) & \left(\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)\lambda_x\lambda_y & -\frac{6EI}{L^2}\lambda_y & -\left(\frac{AE}{L}\lambda_x\lambda_{x''} + \frac{12EI}{L^3}\lambda_y\lambda_{y''}\right) & -\frac{AE}{L}\lambda_x\lambda_{y''} + \frac{12EI}{L^3}\lambda_y\lambda_{x''} & -\frac{6EI}{L^2}\lambda_y \\ \left(\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)\lambda_x\lambda_y & \left(\frac{AE}{L}\lambda_y^2 + \frac{12EI}{L^3}\lambda_x^2\right) & \frac{6EI}{L^2}\lambda_x & -\frac{AE}{L}\lambda_{x''}\lambda_y + \frac{12EI}{L^3}\lambda_{y''}\lambda_x & -\left(\frac{AE}{L}\lambda_y\lambda_{y''} + \frac{12EI}{L^3}\lambda_x\lambda_{x''}\right) & \frac{6EI}{L^2}\lambda_x \\ -\frac{6EI}{L^2}\lambda_y & \frac{6EI}{L^2}\lambda_x & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2}\lambda_{y''} & -\frac{6EI}{L^2}\lambda_{x''} & \frac{2EI}{L} \\ -\left(\frac{AE}{L}\lambda_x\lambda_{x''} + \frac{12EI}{L^3}\lambda_y\lambda_{y''}\right) & -\frac{AE}{L}\lambda_{x''}\lambda_y + \frac{12EI}{L^3}\lambda_{y''}\lambda_x & \frac{6EI}{L^2}\lambda_{y''} & \left(\frac{AE}{L}\lambda_{x''}^2 + \frac{12EI}{L^3}\lambda_{y''}^2\right) & \left(\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)\lambda_{x''}\lambda_{y''} & \frac{6EI}{L^2}\lambda_{y''} \\ -\frac{AE}{L}\lambda_x\lambda_{y''} + \frac{12EI}{L^3}\lambda_y\lambda_{x''} & -\left(\frac{AE}{L}\lambda_y\lambda_{y''} + \frac{12EI}{L^3}\lambda_x\lambda_{x''}\right) & -\frac{6EI}{L^2}\lambda_{x''} & \left(\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)\lambda_{x''}\lambda_{y''} & \left(\frac{AE}{L}\lambda_{y''}^2 + \frac{12EI}{L^3}\lambda_{x''}^2\right) & -\frac{6EI}{L^2}\lambda_{x''} \\ -\frac{6EI}{L^2}\lambda_y & \frac{6EI}{L^2}\lambda_x & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2}\lambda_{y''} & -\frac{6EI}{L^2}\lambda_{x''} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix}\begin{matrix} N_x \\ N_y \\ N_z \\ F_{x''} \\ F_{y''} \\ F_{z''} \end{matrix}$$

$$(2-24)$$

Por consiguiente,

$$k_2 = E\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 5 \\ 0.0069 & 0 & 0 & -0.0056 & 0.0042 & 0 \\ 0 & 0.0001 & 0.0007 & -0.0000 & -0.0001 & 0.0007 \\ 0 & 0.0007 & 0.0096 & -0.0004 & -0.0006 & 0.0048 \\ -0.0056 & -0.0000 & -0.0004 & 0.0045 & -0.0033 & -0.0004 \\ 0.0042 & -0.0001 & -0.0006 & -0.0033 & 0.0025 & -0.0006 \\ 0 & 0.0007 & 0.0048 & -0.0004 & -0.0006 & 0.0096 \end{pmatrix}\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \\ 5 \end{matrix}$$

Matriz de rigidez de la estructura y cálculo de las incógnitas

Los elementos correspondientes de las dos matrices anteriores se suman algebraicamente para dar origen a la matriz de rigidez de la estructura K, la cual es

de 9X9 ya que en el marco se tienen nueve grados de libertad y luego se secciona de tal forma que en sus partes izquierda y superior, haya un número de columnas y filas, respectivamente, igual al número de desplazamientos desconocidos.

$$K = E\begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccccc:cccc} 0.0072 & 0 & 0.0014 & -0.0056 & 0 & 0.0042 & -0.0003 & 0 & 0.0014 \\ 0 & 0.0140 & 0.0007 & -0.0000 & 0.0007 & -0.0001 & 0 & -0.0139 & 0 \\ 0.0014 & 0.0007 & 0.0193 & -0.0004 & 0.0048 & -0.0006 & -0.0014 & 0 & 0.0048 \\ -0.0056 & -0.0000 & -0.0004 & 0.0045 & -0.0004 & -0.0033 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0007 & 0.0048 & -0.0004 & 0.0096 & -0.0006 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0.0042 & -0.0001 & -0.0006 & -0.0033 & -0.0006 & 0.0025 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0003 & 0 & -0.0014 & 0 & 0 & 0 & 0.0003 & 0 & -0.0014 \\ 0 & -0.0139 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0139 & 0 \\ 0.0014 & 0 & 0.0048 & 0 & 0 & 0 & -0.0014 & 0 & 0.0096 \end{array}\right) \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix}$$

Se formula $C = KD$. Del siguiente primer subsistema se obtienen los desplazamientos desconocidos.

$$\begin{pmatrix} \Delta_{HB} \\ \delta_{VB} \\ \theta_B \\ \theta_C \\ \Delta_C \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \cdot \begin{pmatrix} 0.0072 & 0 & 0.0014 & -0.0056 & 0 \\ 0 & 0.0140 & 0.0007 & -0.0000 & 0.0007 \\ 0.0014 & 0.0007 & 0.0193 & -0.0004 & 0.0048 \\ -0.0056 & -0.0000 & -0.0004 & 0.0045 & -0.0004 \\ 0 & 0.0007 & 0.0048 & -0.0004 & 0.0096 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -15 \\ -1.8 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \Delta_{HB} \\ \delta_{VB} \\ \theta_B \\ \theta_C \\ \Delta_C \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \cdot 10^3 \begin{pmatrix} 0.7268 \\ -0.2602 \\ -1.3829 \\ 0.5865 \\ 2.2934 \end{pmatrix}$$

Al plantear un segundo subsistema y emplear los resultados calculados, se calculan las reacciones en los soportes.

$$\begin{pmatrix} R_C - 2.4 \\ R_{Ax} \\ R_{Ay} \\ M_A \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} 0.0042 & -0.0001 & -0.0006 & -0.0033 & -0.0006 \\ -0.0003 & 0 & -0.0014 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0139 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0014 & 0 & 0.0048 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{E} \cdot 10^3 \begin{pmatrix} 0.7268 \\ -0.2602 \\ -1.3829 \\ 0.5865 \\ 2.2934 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5825 \\ 1.7895 \\ 3.6140 \\ -5.6146 \end{pmatrix}$$

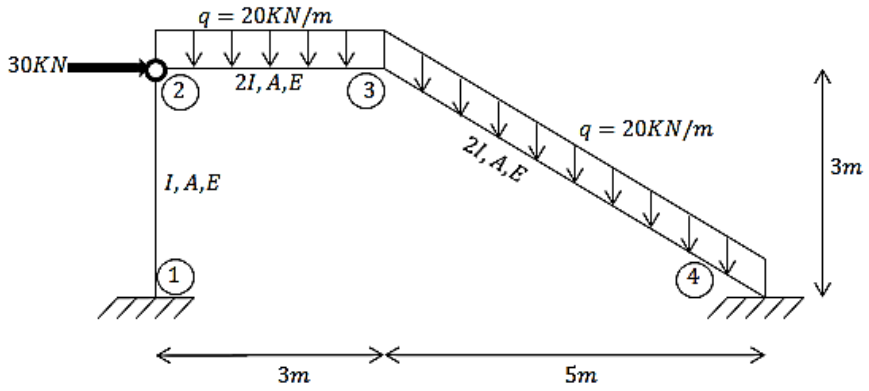
$$R_C - 2.4 = 0.5825 \Rightarrow R_C = 0.5825 + 2.4 = 2.9825 \Rightarrow \therefore R_C = 2.9825k \nwarrow$$

$$R_{Ax} = 1.7895 \Rightarrow \therefore R_{Ax} = 1.7895k \longrightarrow \qquad R_{Ay} = 3.6140 \Rightarrow \therefore R_{Ay} = 3.6140k \uparrow$$

$$M_A = -5.6146 \Rightarrow \therefore M_A = 5.6146k \cdot pie \circlearrowleft$$

Ejercicio 2.16 Resolución de un marco en el plano, con una rótula intermedia, aplicando el método matricial de la rigidez.

Instrucciones Determine las reacciones en los empotramientos y deduzca las funciones de las acciones internas con el método de secciones del marco de la figura 2-16a. Obsérvese que existe una articulación en el nodo ② y que la carga distribuida uniforme de $20KN/m$ actúa en forma gravitacional, por lo que no es perpendicular a la columna inclinada. Considere $E = 210Gpa, A = 4000mm^2$ e $I = 8000(10^4)mm^4$.

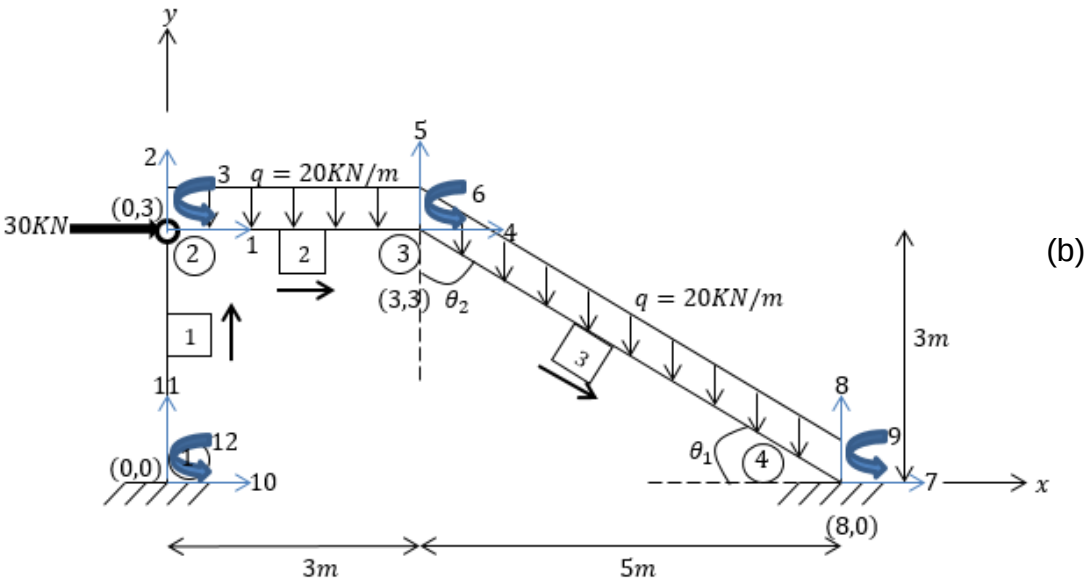


(a)

Figura 2-16

SOLUCIÓN

Notación



(b)

El marco tiene tres elementos y cuatro nodos, los cuales son identificados por números dentro de un cuadrado y dentro de un círculo, respectivamente. Se

establece el origen del sistema de coordenadas globales en ①, figura 2-16b. En este caso, la estructura es indeterminada cinemáticamente de sexto grado. Hay doce grados de libertad, por lo que los números de código del 1 al 6 representan grados de libertad no restringidos, mientras que los números de código restantes hacen referencia a los grados de libertad nulos.

Vector de desplazamientos

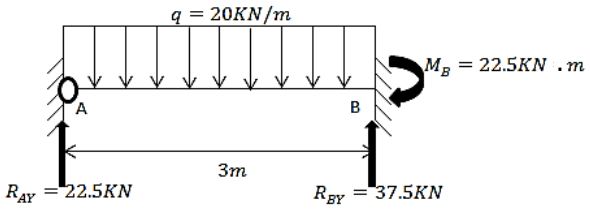
A partir de las restricciones en ① y ④ tenemos que la matriz de desplazamientos es

$$D = \begin{pmatrix} D_D \\ \hline D_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ \hline D_7 \\ D_8 \\ D_9 \\ D_{10} \\ D_{11} \\ D_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_{H2} \\ \delta_{V2} \\ \theta_2 \\ \Delta_{H3} \\ \delta_{V3} \\ \theta_3 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ \hline 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix}$$

Vector de Cargas

Si imaginariamente se empotran todos los nodos para restringirlos de movimiento, entonces se tienen las siguientes fuerzas de fijación y momentos de empotramiento perfecto en los elementos 2 y 3, figuras 2-16c y 2-16d.

Elemento 2.



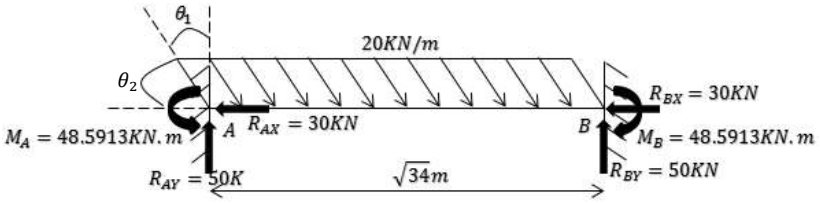
(c)

$$R_{AY} = \frac{3WL}{8} = \frac{3(20KN/m)(3m)}{8} = 22.5\ KN\uparrow \qquad R_{BY} = \frac{5WL}{8} = \frac{5(20KN/m)(3m)}{8} = 37.5\ KN\uparrow$$

$$M_B = \frac{WL^2}{8} = \frac{(20KN/m)(3m)^2}{8} = 22.5KN \cdot m\circlearrowright$$

Elemento 3.

Al rotar el elemento 3 de tal forma que su eje sea horizontal y si se conoce que su longitud es $L = \sqrt{(5m)^2 + (3m)^2} = \sqrt{34}m$, se tiene



(d)

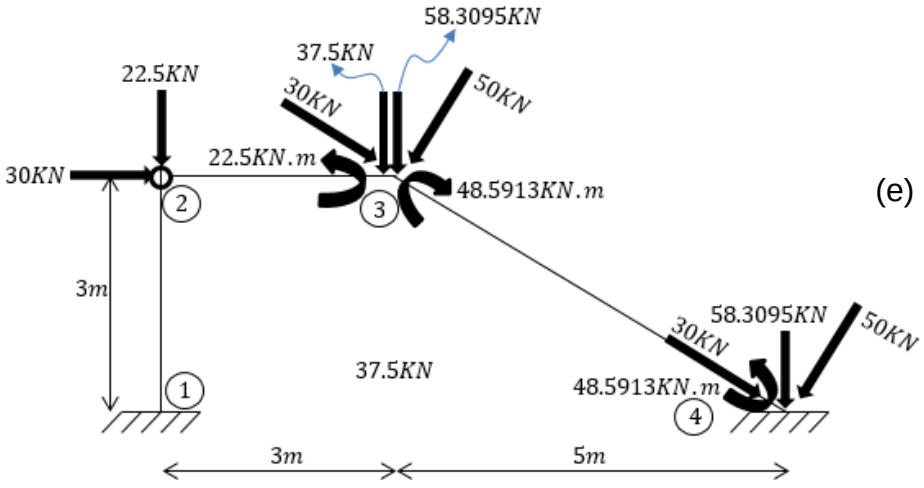
$$\theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) = 30.96375653° \qquad \theta_2 = 90° - \theta_1 = 59.03624°$$

$$R_{AY} = R_{BY} = \left(\frac{WL}{2}\right)(sin\alpha) = \left(\frac{(20KN/m)(\sqrt{34}m)}{2}\right)(sin59.03624°) = 50\ KN\uparrow$$

$$R_{AX} = R_{BX} = \left(\frac{WL}{2}\right)(cos\alpha) = \left(\frac{(20KN/m)(\sqrt{34}m)}{2}\right)(cos59.03624°) = 30\ KN\leftarrow$$

$$M_A = M_B = \left(\frac{WL^2}{12}\right)(sin\alpha) = \frac{20(\sqrt{34})^2}{12}(sin59.03624°) = 48.5913KN\cdot m\circlearrowleft\circlearrowright$$

No obstante, las fuerzas y momentos elásticos o efectivos sobre los nodos actúan verdaderamente en sentido opuesto al definido. Luego, la carga de $30KN$ ya viene aplicada directamente al nodo ②. En consecuencia, las fuerzas apropiadas para efectuar el análisis son las que se muestran en la figura 2-16e.



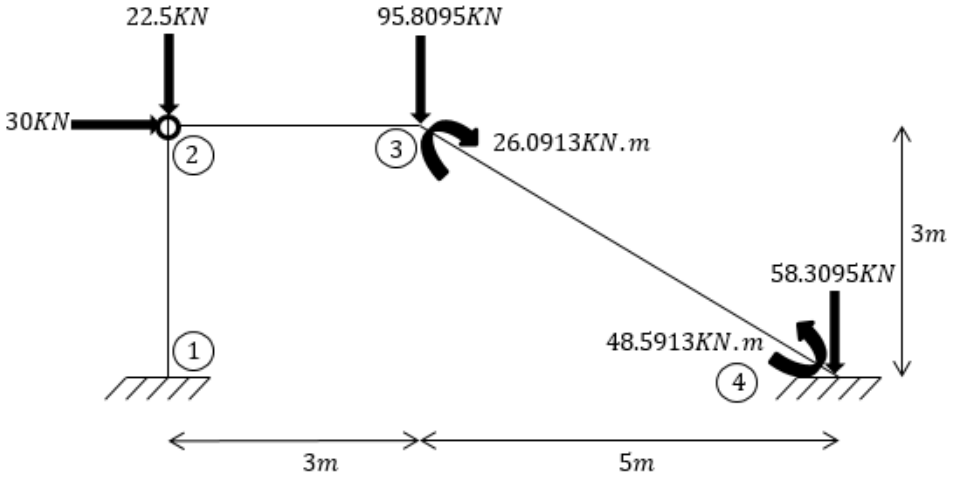
(e)

El elemento 3 tiene números de código en la dirección de los ejes globales. Por tal motivo, se debe calcular la resultante de las fuerzas concurrrentes de $30KN$ y $50KN$

en los nodos ③ y ④, ya que estas actúan en forma paralela y perpendicular al eje de la viga y no en las direcciones x, y.

$$R = \sqrt{(50KN)^2 + (30KN)^2} = 58.3095KN\downarrow$$

En la figura 2-16f se observan las acciones totales en cada nodo del marco.



(f)

De acuerdo a las figuras 2-16b y 2-16f, la matriz de cargas es

$$C = \begin{pmatrix} C_C \\ \hline C_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ \hline C_7 \\ C_8 \\ C_9 \\ C_{10} \\ C_{11} \\ C_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ -22.5 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ -95.8095 \\ -26.0913 \\ \hline R_{4x} \\ R_{4y} - 58.3095 \\ M_4 + 48.5913 \\ R_{1x} \\ R_{1y} \\ M_1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix}$$

Cosenos directores y matriz de rigidez global para cada elemento

Se calculan los cosenos directores de los tres elementos con las ecuaciones $2-2$ y $2-3$. Luego, la matriz de rigidez en coordenadas globales de los elementos 1 y 3 viene dada por la expresión $2-23$, mientras que la del miembro 2 se define por la ecuación $2-25$. El módulo de elasticidad y el área de la sección transversal para las dos columnas y la viga son

$E = 210GPa = 210 \cdot 10^9\, {}^{N}/_{m^2} = 210000000\, {}^{KN}/_{m^2} \qquad A = 4000mm^2 = 0.004m^2$

La inercia para el elemento 1 es $I = 0.00008m^4$, en tanto, la inercia para los elementos 2 y 3 es $I = 0.00016m^4$.

Elemento 1.

$$L = 3m \qquad \lambda_x = \frac{0-0}{3} = 0 \qquad \lambda_y = \frac{3-0}{3} = 1$$

$$k_1 = \begin{matrix} \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} 10 & 11 & 12 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 7466.67 & 0 & -11200 & -7466.67 & 0 & -11200 \\ 0 & 280000 & 0 & 0 & -280000 & 0 \\ -11200 & 0 & 22400 & 11200 & 0 & 11200 \\ -7466.67 & 0 & 11200 & 7466.67 & 0 & 11200 \\ 0 & -280000 & 0 & 0 & 280000 & 0 \\ -11200 & 0 & 11200 & 11200 & 0 & 22400 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Elemento 2.

$$L = 3m \qquad \lambda_x = \frac{3-0}{3} = 1 \qquad \lambda_y = \frac{3-3}{3} = 0$$

$$k_i = \begin{pmatrix} \left(\frac{AE}{L}\lambda_x^2 + \frac{3EI}{L^3}\lambda_y^2\right) & \left(\frac{AE}{L} - \frac{3EI}{L^3}\right)\lambda_x\lambda_y & 0 & -\left(\frac{AE}{L}\lambda_x^2 + \frac{3EI}{L^3}\lambda_y^2\right) & \left(\frac{3EI}{L^3} - \frac{AE}{L}\right)\lambda_x\lambda_y & -\frac{3EI}{L^2}\lambda_y \\ \left(\frac{AE}{L} - \frac{3EI}{L^3}\right)\lambda_x\lambda_y & \left(\frac{3EI}{L^3}\lambda_x^2 + \frac{AE}{L}\lambda_y^2\right) & 0 & \left(\frac{3EI}{L^3} - \frac{AE}{L}\right)\lambda_x\lambda_y & -\left(\frac{3EI}{L^3}\lambda_x^2 + \frac{AE}{L}\lambda_y^2\right) & \frac{3EI}{L^2}\lambda_x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\left(\frac{AE}{L}\lambda_x^2 + \frac{3EI}{L^3}\lambda_y^2\right) & \left(\frac{3EI}{L^3} - \frac{AE}{L}\right)\lambda_x\lambda_y & 0 & \left(\frac{AE}{L}\lambda_x^2 + \frac{3EI}{L^3}\lambda_y^2\right) & \left(\frac{AE}{L} - \frac{3EI}{L^3}\right)\lambda_x\lambda_y & \frac{3EI}{L^2}\lambda_y \\ \left(\frac{3EI}{L^3} - \frac{AE}{L}\right)\lambda_x\lambda_y & -\left(\frac{3EI}{L^3}\lambda_x^2 + \frac{AE}{L}\lambda_y^2\right) & 0 & \left(\frac{AE}{L} - \frac{3EI}{L^3}\right)\lambda_x\lambda_y & \left(\frac{3EI}{L^3}\lambda_x^2 + \frac{AE}{L}\lambda_y^2\right) & -\frac{3EI}{L^2}\lambda_x \\ -\frac{3EI}{L^2}\lambda_y & \frac{3EI}{L^2}\lambda_x & 0 & \frac{3EI}{L^2}\lambda_y & -\frac{3EI}{L^2}\lambda_x & \frac{3EI}{L} \end{pmatrix} \begin{matrix} N_x \\ N_y \\ N_z \\ F_x \\ F_y \\ F_z \end{matrix} \qquad (2-25)$$

$$k_2 = \begin{matrix} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 280000 & 0 & 0 & -280000 & 0 & 0 \\ 0 & 3733.33 & 0 & 0 & -3733.33 & 11200 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -280000 & 0 & 0 & 280000 & 0 & 0 \\ 0 & -3733.33 & 0 & 0 & 3733.33 & -11200 \\ 0 & 11200 & 0 & 0 & -11200 & 33600 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Elemento 3.

$$L = \sqrt{34}m \qquad \lambda_x = \frac{8-3}{\sqrt{34}} = 0.8575 \qquad \lambda_y = \frac{0-3}{\sqrt{34}} = -0.5145$$

$$k_3 = \begin{array}{c} \begin{matrix} 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 106463.95 & -62658.10 & 3050.66 & -106463.95 & 62658.10 & 3050.66 \\ -62658.10 & 39628.64 & 5084.43 & 62658.10 & -39628.64 & 5084.43 \\ 3050.66 & 5084.43 & 23049.41 & -3050.66 & 5084.43 & 11524.71 \\ -106463.95 & 62658.10 & -3050.66 & 106463.95 & -62658.10 & -3050.66 \\ 62658.10 & -39628.64 & -5084.43 & -62658.10 & 39628.6 & -5084.43 \\ 3050.66 & 5084.43 & 11524.71 & -3050.66 & -5084.43 & 23049.41 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix}$$

Matriz de rigidez de la estructura y cálculo de las incógnitas

Al ensamblar las tres matrices anteriores, se forma K y se le hace una partición.

$$K = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 287466.67 & 0 & 11200 & -280000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -7466.67 & 0 & 11200 \\ 0 & 283733.33 & 0 & 0 & -3733.33 & 11200 & 0 & 0 & 0 & 0 & -280000 & 0 \\ 11200 & 0 & 22400 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -11200 & 0 & 11200 \\ -280000 & 0 & 0 & 386463.95 & -62658.1 & 3050.66 & -106463.95 & 62658.10 & 3050.66 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3733.33 & 0 & -62658.1 & 43361.97 & -6115.57 & 62658.10 & -39628.64 & 5084.43 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 11200 & 0 & 3050.66 & -6115.57 & 56649.41 & -3050.66 & 5084.43 & 11524.71 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -106463.95 & 62658.10 & -3050.66 & 106463.95 & -62658.10 & -3050.66 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 62658.10 & -39628.64 & -5084.43 & -62658.1 & 39628.64 & -5084.43 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3050.66 & 5084.43 & 11524.71 & -3050.66 & -5084.43 & 23049.41 & 0 & 0 & 0 \\ -7466.67 & 0 & -11200 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7466.67 & 0 & -11200 \\ 0 & -280000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 280000 & 0 \\ 11200 & 0 & 11200 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -11200 & 0 & 22400 \end{array}\right) \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix}$$

Se escribe $C = KD$ y se resuelven los desplazamientos desconocidos.

$$\begin{pmatrix} 30 \\ -22.5 \\ 0 \\ 0 \\ -95.8095 \\ -26.093 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 287466.67 & 0 & 11200 & -280000 & 0 & 0 \\ 0 & 283733.33 & 0 & 0 & -3733.33 & 11200 \\ 11200 & 0 & 22400 & 0 & 0 & 0 \\ -280000 & 0 & 0 & 386463.95 & -62658.1 & 3050.66 \\ 0 & -3733.33 & 0 & -62658.1 & 43361.97 & -6115.57 \\ 0 & 11200 & 0 & 3050.66 & -6115.57 & 56649.41 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_{H2} \\ \delta_{V2} \\ \theta_2 \\ \Delta_{H3} \\ \delta_{V3} \\ \theta_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \Delta_{H2} \\ \delta_{V2} \\ \theta_2 \\ \Delta_{H3} \\ \delta_{V3} \\ \theta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.00646m \\ -0.000183m \\ 0.00323rad \\ -0.00661m \\ -0.011968m \\ -0.00136rad \end{pmatrix}$$

Se resuelven las reacciones.

$$\begin{pmatrix} R_{4x} \\ R_{4y} - 58.3095 \\ M_4 + 48.5913 \\ R_{1x} \\ R_{1y} \\ M_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -106463.95 & 62658.10 & -3050.66 \\ 0 & 0 & 0 & 62658.10 & -39628.64 & -5084.43 \\ 0 & 0 & 0 & 3050.66 & 5084.43 & 11524.71 \\ -7466.67 & 0 & -11200 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -280000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 11200 & 0 & 11200 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.00646 \\ -0.000183 \\ 0.00323 \\ -0.00661 \\ -0.011968 \\ -0.00136 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -42.0579 \\ 67.0489 \\ -96.6955 \\ 12.0579 \\ 51.2606 \\ -36.1736 \end{pmatrix}$$

$$R_{4x} = -42.0579 \Rightarrow R_{4x} = 42.0579KN \longleftarrow$$

$$R_{4y} = 58.3095 + 67.0489 \Rightarrow\therefore R_{4y} = 125.3584KN \uparrow$$

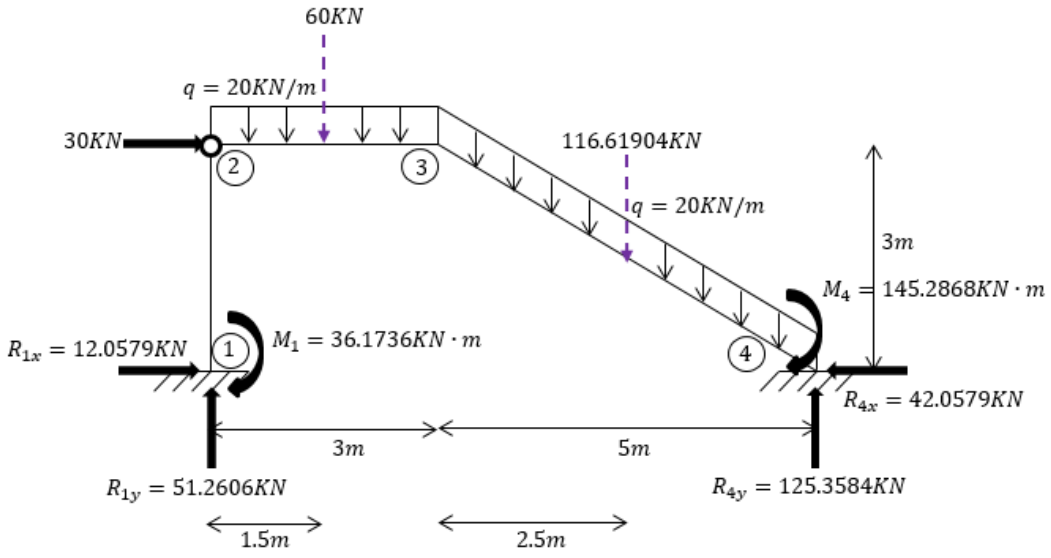
$$M_4 = -48.5913 - 96.6955 \Rightarrow\therefore M_4 = 145.2868KN \cdot m \circlearrowright$$

$$R_{1x} = 12.0579 \Rightarrow \therefore R_{1x} = 12.0579KN \longrightarrow$$

$$R_{1y} = 51.2606 \Rightarrow \therefore R_{1y} = 51.2606KN \uparrow$$

$$M_1 = -36.1736 \Rightarrow\therefore M_1 = 36.1736KN \cdot m \circlearrowright$$

En la figura 2-16g se muestran esquemáticamente los resultados obtenidos para las reacciones en los dos empotramientos.



(g)

Con base en la figura 2-1g, se comprueba el equilibrio externo de la estructura. Para todo el marco se tiene

$$+\rightarrow \sum Fx = 12.0579 + 30 - 42.0579 = 0 \quad ok$$

$$+\uparrow \sum Fy = 51.2606 - 60 - 116.619 + 125.3584 = 0 \quad ok$$

$$\circlearrowright + \sum M1 = 36.1736 + 30(3) + 60(1.5)$$

$$+116.619(5.5) + 145.2868 - 125.3584(8) \cong 0 \quad ok$$

Para la columna 1, debido a la articulación en ②, tenemos

$$\circlearrowright + \sum M2 = 36.1736 - 12.0579(3) \cong 0 \quad ok$$

Funciones de fuerzas cortante y normal, y de momento flector

Al aplicar el método de secciones en el marco, figuras 2-16h, 2-16i y 2-16j, se tiene

Miembro 1 – 2.

$$0 \le x_1 \le 3m$$

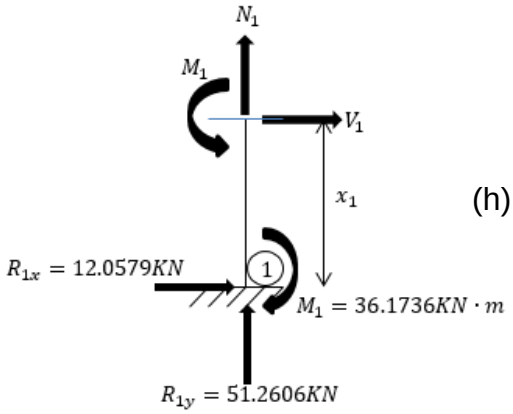
$$\circlearrowright + \sum Mcorte = 0$$

$$-M_1 + 36.1736 - 12.0579(x_1) = 0$$

$$M_1 = 36.1736 - 12.0579x_1$$

$$V_1 = \frac{dM_1}{dx_1} = -12.0579$$

$$+\uparrow \sum Fy = 0 \Rightarrow N_1 = -51.2606$$



(h)

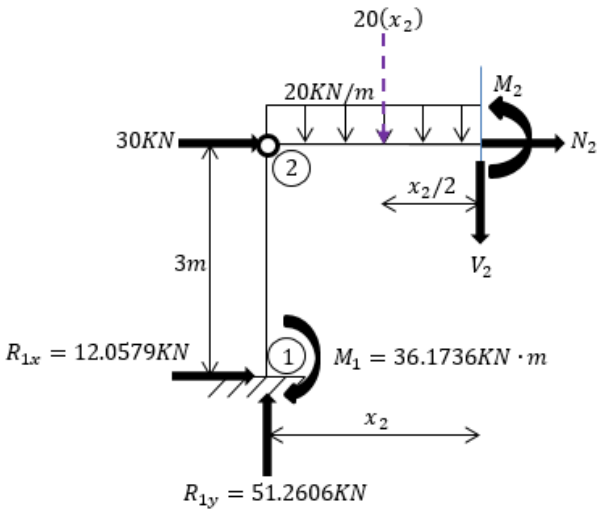
Miembro 2 – 3.

$$0 \le x_2 \le 3m$$

$$\circlearrowright + \sum Mcorte = 0 \Rightarrow M_2 = 36.1736 - 12.0579(3) - 20(x_2)\left(\frac{x_2}{2}\right) + 51.2606x_2$$

$$M_2 = 51.2606x_2 - 10x_2^2 \qquad V_2 = \frac{dM_2}{dx_2} = 51.2606 - 20x_2$$

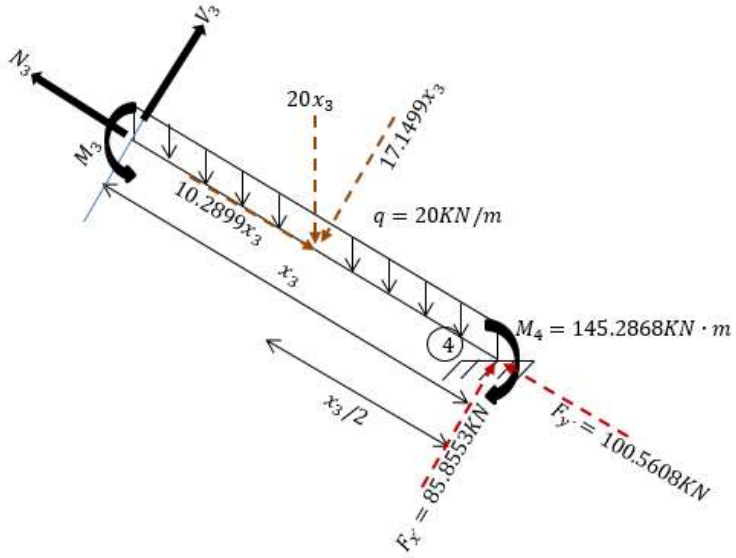
$$+\rightarrow \sum Fx = 0 \Rightarrow N_2 = -42.0579$$



(i)

Miembro $4-3$.

$$0 \leq x_3 \leq \sqrt{34}m$$



(j)

$$\circlearrowright + \sum Mcorte = 0 \Rightarrow M_3 = 145.2868 - 85.8553x_3 + 17.1944(x_3)\left(\frac{x_3}{2}\right)$$

$$M_3 = 145.2868 - 85.8553x_3 + 8.57495x_3^2$$

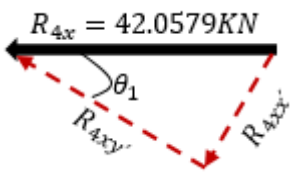
$$V_3 = \frac{dM_3}{dx_3} = -85.8553 + 17.1499x_3$$

$$\nwarrow + \sum Fy' = 0 \Rightarrow N_3 = 10.2899x_3 - 100.5608$$

Al efectuar el equilibrio de esta porción de estructura, se requirió de calcular las componentes rectangulares de la resultante, cuyas líneas de acción coinciden con la fuerza cortante y normal del miembro $4-3$, para el sistema de fuerzas concurrentes en el nodo ④.

Para ello, en primera instancia, se determinaron las componentes de R_{4x} y R_{4y}, figuras 2-16k y 2-16l, respectivamente.

(k)

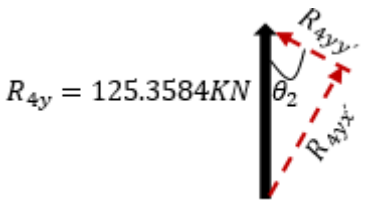


$$R_{4xx'} = 42.0579KN(sen30.96375653°) = 21.6386KN$$

$$R_{4xy'} = 42.0579KN(cos30.96375653°) = 36.0644KN$$

$$R_{4yy'} = 125.3584KN\left(\frac{3}{\sqrt{34}}\right) = 64.4964KN$$

$$R_{4yx'} = 125.3584KN\left(\frac{5}{\sqrt{34}}\right) = 107.4939KN$$



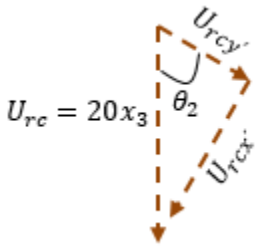
(l)

Al sumar algebraicamente las fuerzas se tiene

$$F_x' = -21.6386KN + 107.4939KN = 85.8553KN$$

$$F_y' = 36.0644KN + 107.4939KN = 100.5608KN$$

Luego, la fuerza resultante de la carga distribuida del corte es $U_{rc} = 20x_3$ y viene aplicada a la mitad del miembro seccionado. Las componentes rectangulares de tal carga concentrada se obtienen con base en la figura 2-7m.



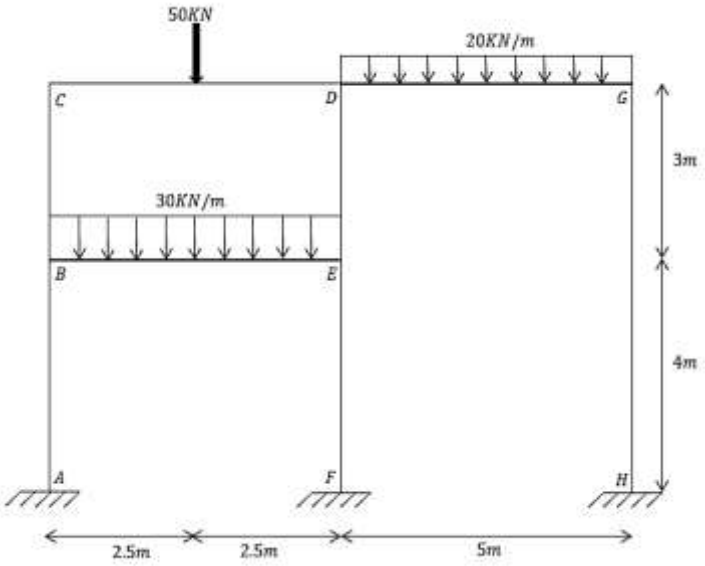
(m)

$$U_{rcy'} = (20x_3)\left(\frac{3}{\sqrt{34}}\right) = 10.2899x_3$$

$$U_{rcx'} = (20x_3)\left(\frac{5}{\sqrt{34}}\right) = 17.1499x_3$$

Ejercicio 2.17 Resolución de un pórtico con una columna de doble altura, empleando el método de la rigidez directa.

Instrucciones En la figura 2-17a se representa un marco con una columna de doble altura. Calcule las reacciones en los empotramientos A, F y H. Considere para todos los miembros una sección transversal rectangular de base $b = 20cm$ y altura $h = 50cm$ y el módulo de elasticidad del concreto.



(a)

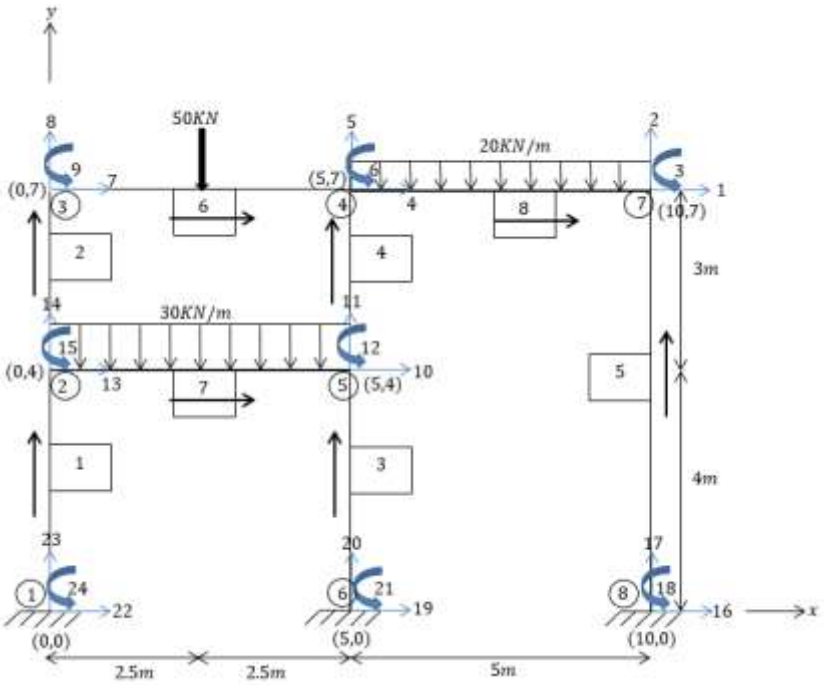
Figura 2-17

SOLUCIÓN

Notación

Este marco se compone de ocho elementos y tiene ocho nodos que han sido numerados como se observa en la figura 2-17b. El origen de las coordenadas globales x, y, z se encuentra en ①. En cada nodo se especifican numéricamente los desplazamientos horizontal y vertical, y la rotación. Como siempre, los números de código más bajos son utilizados para denotar los grados de libertad no restringidos. Obsérvese que la estructura es indeterminada cinéticamente en grado 15, ya que existe tal número de desplazamientos desconocidos.

(b)



Vector de desplazamientos

Es evidente que en los cinco nodos donde no hay algún soporte, los tres grados de libertad son incógnitas, mientras que en los tres empotramientos ocurre lo contrario, ya que las dos componentes de desplazamiento lineal y la rotación valen cero. Siendo así, el vector D es

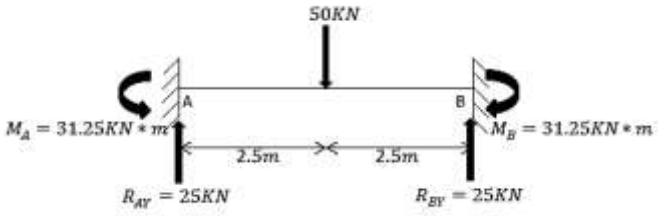
$$D = \begin{pmatrix} D_D \\ \hline D_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \\ D_9 \\ D_{10} \\ D_{11} \\ D_{12} \\ D_{13} \\ D_{14} \\ D_{15} \\ \hline D_{16} \\ D_{17} \\ D_{18} \\ D_{19} \\ D_{20} \\ D_{21} \\ D_{22} \\ D_{23} \\ D_{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_{HG} \\ \delta_{VG} \\ \theta_G \\ \Delta_{HD} \\ \delta_{VD} \\ \theta_D \\ \Delta_{HC} \\ \delta_{VC} \\ \theta_C \\ \Delta_{HE} \\ \delta_{VE} \\ \theta_E \\ \Delta_{HB} \\ \delta_{VB} \\ \theta_B \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \\ 15 \\ \hline 16 \\ 17 \\ 18 \\ 19 \\ 20 \\ 21 \\ 22 \\ 23 \\ 24 \end{matrix}$$

Vector de Cargas

Una vez que imaginariamente se restringe de movimiento a cada nodo del marco, se determinan las fuerzas de fijación y los momentos de empotramiento perfecto de los elementos cargados, figuras 2-17c, 2-17d y 2-117e.

Elemento 6.

(c)

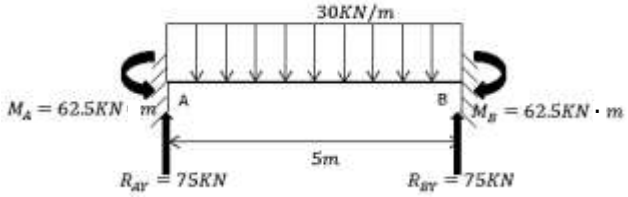


$$R_{AY} = R_{BY} = \frac{P}{2} = \frac{50KN}{2} = 25\ KN \uparrow$$

$$M_A = M_B = \frac{PL}{8} = \frac{(50KN)(5m)}{8} = 31.25\ KN \cdot m \circlearrowright$$

Elemento 7.

(d)

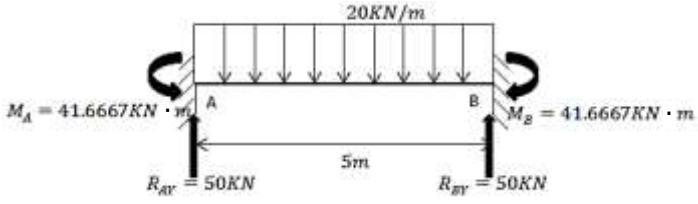


$$R_{AY} = R_{BY} = \frac{WL}{2} = \frac{(30\ ^{KN}/_{m})(5m)}{2} = 75KN \uparrow$$

$$M_A = M_B = \frac{WL^2}{12} = \frac{(30\ ^{KN}/_{m})((5m)^2)}{12} = 62.5\ KN \cdot m \circlearrowright$$

Elemento 8.

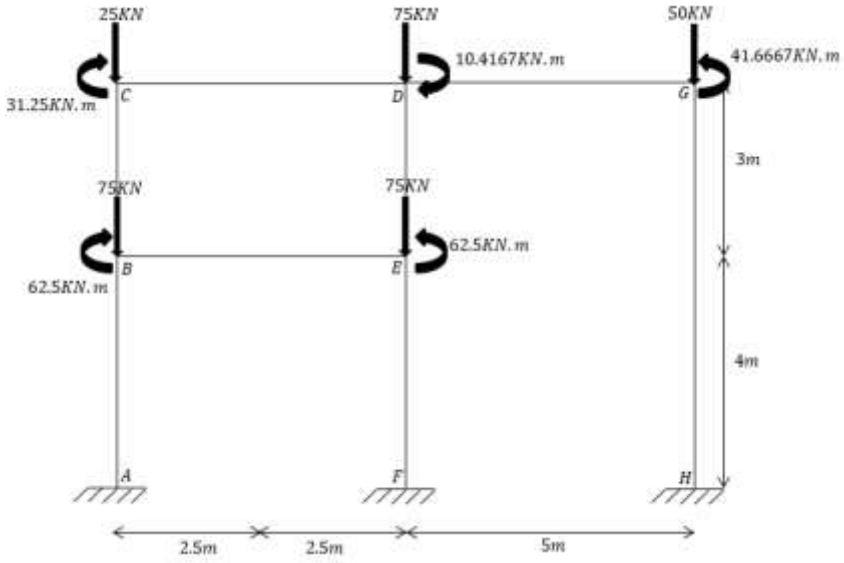
(e)



$$R_{AY} = R_{BY} = \frac{WL}{2} = \frac{(20\ ^{KN}/_{m})(5m)}{2} = 50KN \uparrow$$

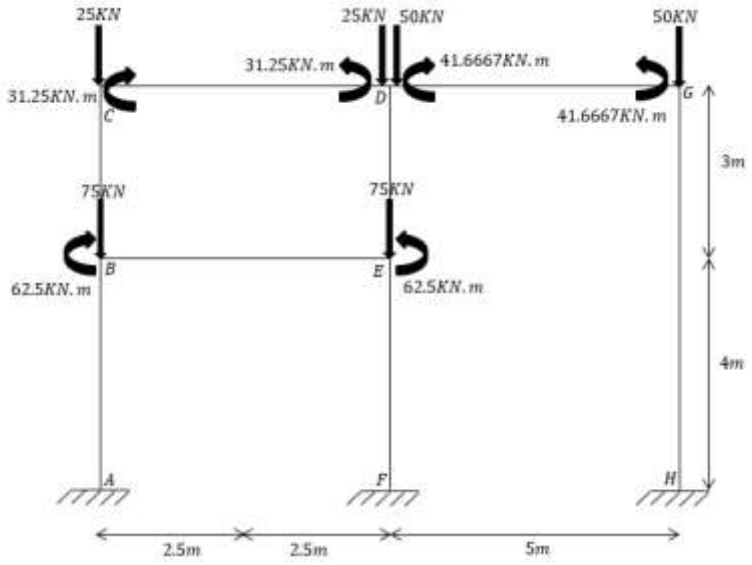
$$M_A = M_B = \frac{WL^2}{12} = \frac{(20\,{}^{KN}/_{m})((5m)^2)}{12} = 41.6667\ KN \cdot m$$

Sin embargo, como se oberva en la figura 2-17f, en realidad, las fuerzas y momentos elásticos sobre los nodos actúan en sentido contrario al que se definió.



(f)

En consecuencia, el marco con acciones totales en los nodos a analizarse a través del método de la rigidez es el que se representa en la figura 2-17g.



(g)

Entonces, el vector de cargas es

$$C = \begin{pmatrix} C_C \\ \hline C_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \\ C_8 \\ C_9 \\ C_{10} \\ C_{11} \\ C_{12} \\ C_{13} \\ C_{14} \\ C_{15} \\ \hline C_{16} \\ C_{17} \\ C_{18} \\ C_{19} \\ C_{20} \\ C_{21} \\ C_{22} \\ C_{23} \\ C_{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -50 \\ 41.6667 \\ 0 \\ -75 \\ -10.4167 \\ 0 \\ -25 \\ -31.25 \\ 0 \\ -75 \\ 62.5 \\ 0 \\ -75 \\ -62.5 \\ \hline R_{Hx} \\ R_{Hy} \\ M_H \\ R_{Fx} \\ R_{Fy} \\ M_F \\ R_{Ax} \\ R_{Ay} \\ M_A \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \\ 15 \\ 16 \\ 17 \\ 18 \\ 19 \\ 20 \\ 21 \\ 22 \\ 23 \\ 24 \end{matrix}$$

Cosenos directores y matriz de rigidez global para cada elemento

Se aplican las ecuaciones $2-2, 2-3$ y $2-23$ a cada elemento. El área de la sección transversal, el módulo de elasticidad y el momento de inercia para todos los elementos del marco son

$$A = (0.2m)(0.5m) = 0.1m^2$$

$$E = 2213594.362\ {}^{T}/_{m^2} = 21707947.03\ {}^{KN}/_{m^2}$$

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{(0.2m)(0.5m)^3}{12} = 0.002083333m^4$$

Elemento 1.

$$L = 4m \qquad \lambda_x = \frac{0-0}{4} = 0 \qquad \lambda_y = \frac{4-0}{4} = 1$$

$$k_1 = 10^5 \begin{array}{c} \begin{matrix} 22 & 23 & 24 & 13 & 14 & 15 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0.0848 & 0 & -0.1696 & -0.0848 & 0 & -0.1696 \\ 0 & 5.4270 & 0 & 0 & -5.427 & 0 \\ -0.1696 & 0 & 0.4522 & 0.1696 & 0 & 0.2261 \\ -0.0848 & 0 & 0.1696 & 0.0848 & 0 & 0.1696 \\ 0 & -5.4270 & 0 & 0 & 5.427 & 0 \\ -0.1696 & 0 & 0.2261 & 0.1696 & 0 & 0.4522 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} 22 \\ 23 \\ 24 \\ 13 \\ 14 \\ 15 \end{matrix}$$

Elemento 2.

$$L = 3m \qquad \lambda_x = \frac{0-0}{3} = 0 \qquad \lambda_y = \frac{7-4}{3} = 1$$

$$k_2 = 10^5 \begin{array}{c} \begin{matrix} 13 & 14 & 15 & 7 & 8 & 9 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0.201 & 0 & -0.3015 & -0.2010 & 0 & -0.3015 \\ 0 & 7.236 & 0 & 0 & -7.236 & 0 \\ -0.3015 & 0 & 0.6030 & 0.3015 & 0 & 0.3015 \\ -0.2010 & 0 & 0.3015 & 0.2010 & 0 & 0.3015 \\ 0 & -7.236 & 0 & 0 & 7.236 & 0 \\ -0.3015 & 0 & 0.3015 & 0.3015 & 0 & 0.603 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} 13 \\ 14 \\ 15 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix}$$

Elemento 3.

$$L = 4m \qquad \lambda_x = \frac{5-5}{4} = 0 \qquad \lambda_y = \frac{4-0}{4} = 1$$

$$k_3 = 10^5 \begin{array}{c} \begin{matrix} 19 & 20 & 21 & 10 & 11 & 12 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0.0848 & 0 & -0.1696 & -0.0848 & 0 & -0.1696 \\ 0 & 5.4270 & 0 & 0 & -5.427 & 0 \\ -0.1696 & 0 & 0.4522 & 0.1696 & 0 & 0.2261 \\ -0.0848 & 0 & 0.1696 & 0.0848 & 0 & 0.1696 \\ 0 & -5.4270 & 0 & 0 & 5.427 & 0 \\ -0.1696 & 0 & 0.2261 & 0.1696 & 0 & 0.4522 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} 19 \\ 20 \\ 21 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix}$$

Elemento 4.

$$L = 3m \qquad \lambda_x = \frac{5-5}{3} = 0 \qquad \lambda_y = \frac{7-4}{3} = 1$$

$$k_4 = 10^5 \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} 10 & 11 & 12 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0.201 & 0 & -0.3015 & -0.2010 & 0 & -0.3015 \\ 0 & 7.236 & 0 & 0 & -7.236 & 0 \\ -0.3015 & 0 & 0.6030 & 0.3015 & 0 & 0.3015 \\ -0.2010 & 0 & 0.3015 & 0.2010 & 0 & 0.3015 \\ 0 & -7.236 & 0 & 0 & 7.236 & 0 \\ -0.3015 & 0 & 0.3015 & 0.3015 & 0 & 0.6030 \end{pmatrix} \begin{matrix} 10 \\ 11 \\ 12 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

Elemento 5.

$$L = 7m \qquad \lambda_x = \frac{10-10}{7} = 0 \qquad \lambda_y = \frac{7-0}{7} = 1$$

$$k_5 = 10^5 \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} 16 & 17 & 18 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0.0158 & 0 & -0.0554 & -0.0158 & 0 & -0.0554 \\ 0 & 3.1011 & 0 & 0 & -3.1011 & 0 \\ -0.0554 & 0 & 0.2584 & 0.0554 & 0 & 0.1292 \\ -0.0158 & 0 & 0.0554 & 0.0158 & 0 & 0.0554 \\ 0 & -3.1011 & 0 & 0 & 3.1011 & 0 \\ -0.0554 & 0 & 0.1292 & 0.0554 & 0 & 0.2584 \end{pmatrix} \begin{matrix} 16 \\ 17 \\ 18 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

Elemento 6.

$$L = 5m \qquad \lambda_x = \frac{5-0}{5} = 1 \qquad \lambda_y = \frac{7-7}{5} = 0$$

$$k_6 = 10^5 \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} 7 & 8 & 9 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \begin{pmatrix} 4.3416 & 0 & 0 & -4.3416 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0434 & 0.1085 & 0 & -0.0434 & 0.1085 \\ 0 & 0.1085 & 0.3618 & 0 & -0.1085 & 0.1809 \\ -4.3416 & 0 & 0 & 4.3416 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0434 & -0.1085 & 0 & 0.0434 & -0.1085 \\ 0 & 0.1085 & 0.1809 & 0 & -0.1085 & 0.3618 \end{pmatrix} \begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

Elemento 7.

$$L = 5m \qquad \lambda_x = \frac{5-0}{5} = 1 \qquad \lambda_y = \frac{4-4}{5} = 0$$

$$k_7 = 10^5 \begin{matrix} \\ 13 \\ 14 \\ 15 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} 13 & 14 & 15 & 10 & 11 & 12 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 4.3416 & 0 & 0 & -4.3416 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0434 & 0.1085 & 0 & -0.0434 & 0.1085 \\ 0 & 0.1085 & 0.3618 & 0 & -0.1085 & 0.1809 \\ -4.3416 & 0 & 0 & 4.3416 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0434 & -0.1085 & 0 & 0.0434 & -0.1085 \\ 0 & 0.1085 & 0.1809 & 0 & -0.1085 & 0.3618 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Elemento 8.

$$L = 5m \qquad \lambda_x = \frac{10-5}{5} = 1 \qquad \lambda_y = \frac{7-7}{5} = 0$$

$$k_8 = 10^5 \begin{matrix} \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 4.3416 & 0 & 0 & -4.3416 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0434 & 0.1085 & 0 & -0.0434 & 0.1085 \\ 0 & 0.1085 & 0.3618 & 0 & -0.1085 & 0.1809 \\ -4.3416 & 0 & 0 & 4.3416 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0434 & -0.1085 & 0 & 0.0434 & -0.1085 \\ 0 & 0.1085 & 0.1809 & 0 & -0.1085 & 0.3618 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Matriz de rigidez de la estructura y cálculo de las incógnitas

Para formar K, la cual debe ser de 24X24 dado que veinticuatro grados de libertad fueron designados en el marco, ensamblamos las matrices anteriores y luego se le hace una partición de tal modo cada una de sus submatrices son

Submatriz K_{11}.

$$K_{11} = 10^6 *$$

Columnas desde la 1 hasta la 9

1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.4357	0	0.0055	−0.4342	0	0	0	0	0
0	0.3145	−0.0109	0	−0.0043	−0.0109	0	0	0
0.0055	−0.0109	0.062	0	0.0109	0.0181	0	0	0
−0.4342	0	0	0.8884	0	0.0301	−0.4342	0	0
0	−0.0043	0.0109	0	0.7323	0	0	−0.0043	−0.0109
0	−0.0109	0.0181	0.0301	0	0.1327	0	0.0109	0.0181
0	0	0	−0.4342	0	0	0.4543	0	0.0301
0	0	0	0	−0.0043	0.0109	0	0.7279	0.0109
0	0	0	0	−0.0109	0.0181	0.0301	0.0109	0.0965
0	0	0	−0.0201	0	−0.0301	0	0	0
0	0	0	0	−0.7236	0	0	0	0
0	0	0	0.0301	0	0.0301	0	0	0
0	0	0	0	0	0	−0.0201	0	−0.0301
0	0	0	0	0	0	0	−0.7236	0
0	0	0	0	0	0	0.0301	0	0.0301

Columnas desde la 10 hasta la 15

10	11	12	13	14	15	
0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	2
0	0	0	0	0	0	3
−0.0201	0	0.0301	0	0	0	4
0	−0.7236	0	0	0	0	5
−0.0301	0	0.0301	0	0	0	6
0	0	0	−0.0201	0	0.0301	7
0	0	0	0	−0.7236	0	8
0	0	0	−0.0301	0	0.0301	9
0.4627	0	−0.0132	−0.4342	0	0	10
0	1.2706	−0.0109	0	−0.0043	−0.0109	11
−0.0132	−0.0109	0.1417	0	0.0109	0.0181	12
−0.4342	0	0	0.4627	0	−0.0132	13
0	−0.0043	0.0109	0	1.2706	0.0109	14
0	−0.0109	0.0181	−0.0132	0.0109	0.1417	15

Submatriz K_{12}.

$$K_{12} = 10^6 *$$

16	17	18	19	20	21	22	23	24	
−0.0016	0	0.0055	0	0	0	0	0	0	1
0	−0.3101	0	0	0	0	0	0	0	2
−0.0055	0	0.0129	0	0	0	0	0	0	3
0	0	0	0	0	0	0	0	0	4
0	0	0	0	0	0	0	0	0	5
0	0	0	0	0	0	0	0	0	6
0	0	0	0	0	0	0	0	0	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	9
0	0	0	−0.0085	0	0.017	0	0	0	10
0	0	0	0	−0.5427	0	0	0	0	11
0	0	0	−0.017	0	0.0226	0	0	0	12
0	0	0	0	0	0	−0.0085	0	0.017	13
0	0	0	0	0	0	0	−0.5427	0	14
0	0	0	0	0	0	−0.017	0	0.0226	15

Submatriz K_{21}.

Columnas desde la 1 hasta la 9

$$K_{21} = 10^6 * \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{matrix}$$
$$\begin{bmatrix} -0.0016 & 0 & -0.0055 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.3101 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0055 & 0 & 0.0129 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Columnas desde la 10 hasta 15

$$\begin{matrix} 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & \end{matrix}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18 \\ -0.0085 & 0 & -0.0170 & 0 & 0 & 0 & 19 \\ 0 & -0.5427 & 0 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0.0170 & 0 & 0.0226 & 0 & 0 & 0 & 21 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0085 & 0 & -0.0170 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5427 & 0 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0170 & 0 & 0.0226 & 24 \end{bmatrix}$$

Submatriz K_{22}.

$$\begin{matrix} 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 \end{matrix}$$
$$K_{22} = 10^6 * \begin{pmatrix} 0.0016 & 0 & -0.0055 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3101 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0055 & 0 & 0.0258 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0085 & 0 & -0.017 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5427 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.017 & 0 & 0.0452 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0085 & 0 & -0.017 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5427 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.017 & 0 & 0.0452 \end{pmatrix} \begin{matrix} 16 \\ 17 \\ 18 \\ 19 \\ 20 \\ 21 \\ 22 \\ 23 \\ 24 \end{matrix}$$

De $C = KD$ se extrae un primer subsistema y se resuelven los desplazamientos desconocidos.

$$C_C = K_{11} D_D \Rightarrow D_D = (K_{11})^{-1} C_C$$

$$\begin{pmatrix}\Delta_{HG}\\ \delta_{VG}\\ \theta_G\\ \Delta_{HD}\\ \delta_{VD}\\ \theta_D\\ \Delta_{HC}\\ \delta_{VC}\\ \theta_C\\ \Delta_{HE}\\ \delta_{VE}\\ \theta_E\\ \Delta_{HB}\\ \delta_{VB}\\ \theta_B\end{pmatrix} = 10^{-3}\begin{pmatrix}-0.0839m\\ -0.1479m\\ 0.8230rad\\ -0.0737m\\ -0.4079m\\ -0.3367rad\\ -0.0374m\\ -0.2043m\\ -0.2181rad\\ -0.3131m\\ -0.2914m\\ 0.5538rad\\ -0.3237m\\ -0.1769m\\ -0.4963rad\end{pmatrix}$$

Las reacciones en los soportes son resultado del siguiente segundo subsistema:

$$C_D = K_{21}D_D$$

$$\begin{pmatrix}R_{Hx}\\ R_{Hy}\\ M_H\\ R_{Fx}\\ R_{Fy}\\ M_F\\ R_{Ax}\\ R_{Ay}\\ M_A\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4.4248\\ 45.8505\\ 10.1696\\ -6.7375\\ 158.1651\\ 7.2135\\ 11.1623\\ 95.9845\\ -16.7131\end{pmatrix}$$

$R_{Hx} = 4.4248\ KN$ ⬅ $R_{Hy} = 45.8505\ KN$ ⬆ $M_H = 10.1696\ KN \cdot m$ ↺

$R_{Fx} = 6.7375\ KN$ ⬅ $R_{Fy} = 158.1651\ KN$ ⬆ $M_F = 7.2135 KN \cdot m$ ↺

$R_{Ax} = 11.1623\ KN$ ➡ $R_{Ay} = 95.9845\ KN$ ⬆ $M_A = 16.7131\ KN \cdot m$ ↻

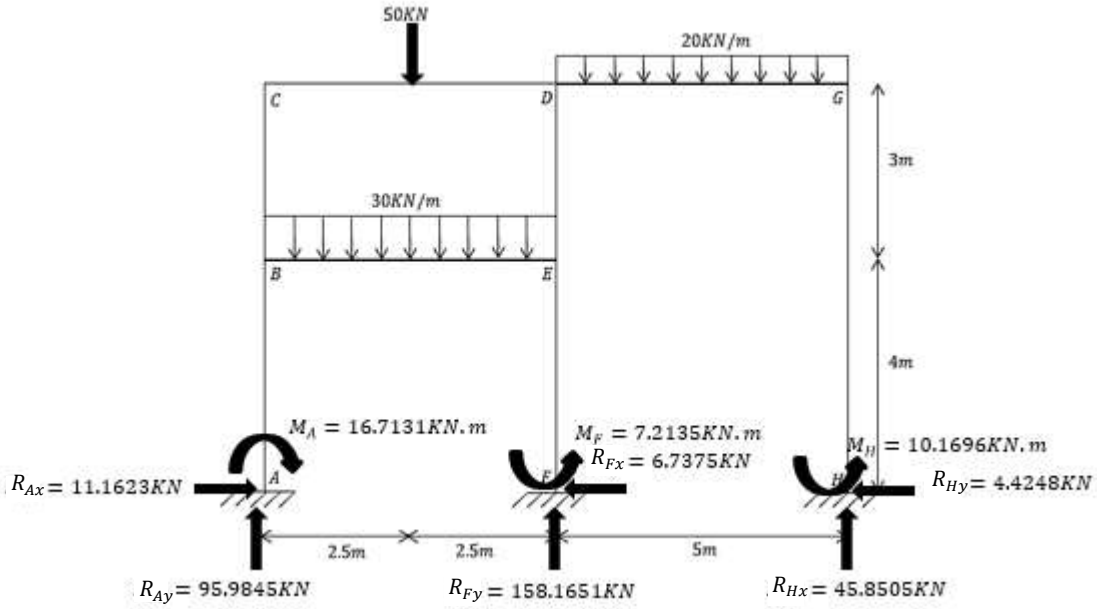
Se dibuja la estructura con los resultados obtenidos, figura 2-17h, y se comprueba su equilibrio externo.

$$+\rightarrow \sum Fx = 11.1623 - 6.7375 - 4.4248 = 0 \quad ok$$

$$+\uparrow \sum Fy = -50 - 150 - 100 + 95.9845 + 158.1651 + 45.8505 \cong 0 \quad ok$$

$$\circlearrowright + \sum MA = 16.7131 + 50(2.5) + 150(2.5) - 7.2135$$

$$-158.1651(5) + 100(7.5) - 10.1696 - 45.8505(10) \cong 0 \quad ok$$



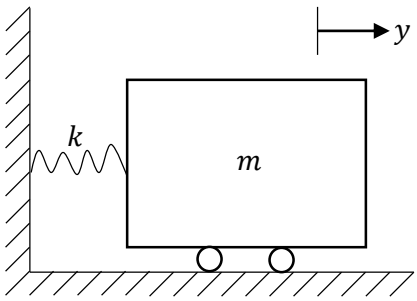
(h)

CAPÍTULO 3

INTRODUCCIÓN A LA DINÁMICA ESTRUCTURAL

Ejercicio 3.1 Análisis de un sistema de un grado de libertad, sin amortiguación.

Instrucciones Resuelva la ecuación la ecuación diferencial del movimiento para un sistema de un grado de libertad, sin amortiguación, figura 3-1a.

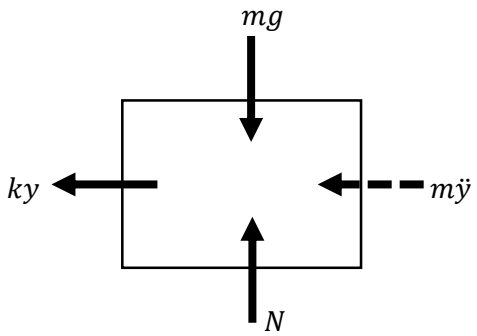


(a)

Figura 3-1

SOLUCIÓN

En primer lugar se efectúa un diagrama de cuerpo libre, figura 3-1b.



(b)

En este caso, para obtener la ecuación del movimiento, se emplea el principio D'Alembert, el cual indica que todo sistema estructural puede ser llevado a un estado de equilibrio dinámico si se añade a las fuerzas externas una fuerza ficticia denominada fuerza de inercia, que actúa en dirección contraria al desplazamiento y, y que es equivalente al producto de la masa por la aceleración $(m\ddot{y})$. Aquí el oscilador es desplazado en la dirección de la coordenada y positiva (hacia la derecha).

Asimismo, en la figura 3-1b aparecen la fuerza del resorte lineal $F_r = ky$, donde k es la constante elástica del resorte, el peso del cuerpo que es igual al producto de la masa por la aceleración de la gravedad, es decir, mg, y la reacción normal N de la superficie soportante. En consecuencia, de la sumatoria de fuerzas en y, se obtiene

$$m\ddot{y} + ky = 0 - - - (1)$$

Se procede a resolver la ecuación diferencial del movimiento previa.

Si $y = e^{\lambda t}$, entonces su primera derivada es $\dot{y} = \lambda e^{\lambda t}$ y su segunda derivada es $\ddot{y} = \lambda^2 e^{\lambda t}$, de tal modo que la ecuación (1) pasa a ser

$$m\lambda^2 e^{\lambda t} + ke^{\lambda t} = 0 - - - (2)$$

Factorizando en la ecuación (2), se tiene

$$(m\lambda^2 + k)e^{\lambda t} = 0 - - - (3)$$

Con $e^{\lambda t} \neq 0$, tenemos que la ecuación característica del sistema es

$$m\lambda^2 + k = 0 - - - (4)$$

Se determinan las raíces de la expresión (4).

$$\lambda^2 = -k/m$$

Si $\omega^2 = k/m$, donde ω es la frecuencia natural del sistema, se obtiene

$$\lambda^2 = -\omega^2$$

$$\lambda = \sqrt{-\omega^2} = \pm i\omega$$

$$\lambda_1 = i\omega \qquad \lambda_2 = -i\omega$$

Por consiguiente, la solución general para la ecuación diferencial (1) de segundo orden es

$$y = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t} - - - (5)$$

Si se diferencia con respecto al tiempo la ecuación (5), se infiere la ecuación de la velocidad $\dot{y}$.

$$\dot{y} = C_1 i\omega e^{i\omega t} - C_2 i\omega e^{-i\omega t} - - - (6)$$

Ahora se determinarán las constantes de integración C_1 y C_2. Para ello, se consideran las siguientes condiciones iniciales referentes a la inicialización del movimiento para el desplazamiento y la velocidad: 1) $y = y_0$, en $t = 0$ y 2) $\dot{y} = v_0$, en $t = 0$.

Reemplazando la condición 1) en la ecuación (5) da

$$y_0 = C_1 + C_2 - - - (7)$$

Aplicando la condición 2) a la ecuación (6) da

$$v_0 = C_1 i\omega - C_2 i\omega - - - (8)$$

Se resuelve el sistema simultáneo de ecuaciones (7) y (8).

Se despeja C_1 de la ecuación (7).

$$C_1 = y_0 - C_2 - - - (9)$$

Se combina la ecuación (9) con la ecuación (8).

$$v_0 = (y_0 - C_2)i\omega - C_2 i\omega$$

$$v_0 = i\omega y_0 - 2i\omega C_2 - - - (10)$$

Con base en la ecuación (10), se obtiene directamente C_2.

$$C_2 = \frac{i\omega y_0 - v_0}{2i\omega}$$

$$= \left(\frac{i\omega y_0 - v_0}{2i\omega}\right)\left(\frac{i}{i}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\omega y_0 + i v_0}{\omega}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(y_0 + i\frac{v_0}{\omega}\right)$$

En consecuencia, de sustituir el valor previamente calculado de C_2 en la ecuación (9), resulta

$$C_1 = y_0 - \frac{1}{2}\left(y_0 + i\frac{v_0}{\omega}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(y_0 - i\frac{v_0}{\omega}\right)$$

Por lo tanto, al usar lo resultados recién obtenidos para C_1 y C_2 en la expresión algebraica (5), se llega a

$$y = \frac{1}{2}\left(y_0 - i\frac{v_0}{\omega}\right)e^{i\omega t} + \frac{1}{2}\left(y_0 + i\frac{v_0}{\omega}\right)e^{-i\omega t} - - - (11)$$

No obstante, las siguientes relaciones de Euler:

$$e^{\pm i\omega t} = \cos\omega t \pm i\sin\omega t$$

conllevan a que la ecuación (11) se convierta en

$$y = \frac{1}{2}\left(y_0 - i\frac{v_0}{\omega}\right)(\cos\omega t + i\sin\omega t) + \frac{1}{2}\left(y_0 + i\frac{v_0}{\omega}\right)(\cos\omega t - i\sin\omega t) - - - (12)$$

Finalmente, expandiendo y simplificando la ecuación precedente, resulta

$$y = \frac{1}{2}y_0\cos\omega t + \frac{1}{2}y_0 i\sin\omega t - \frac{v_0}{2\omega}i\cos\omega t - \frac{v_0}{2\omega}i^2\sin\omega t$$

$$+\frac{1}{2}y_0\cos\omega t - \frac{1}{2}y_0 i\sin\omega t + \frac{v_0}{2\omega}i\cos\omega t - \frac{v_0}{2\omega}i^2\sin\omega t$$

$$y = y_0\cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t - - - (13)$$

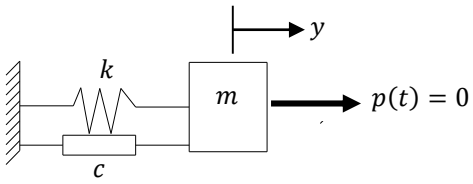
Aquí $\omega = \sqrt{k/m}$.

Nota: recuerde que el valor de la unidad imaginaria es $i = \sqrt{-1}$, de ese modo tenemos que $i^2 = \left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1$.

La ecuación (13) representa la respuesta de un sistema de un grado de libertad en vibración libre sin amortiguamiento.

Ejercicio 3.2 Análisis de un sistema de un grado de libertad, con amortiguación.

Instrucciones Resuelva la ecuación la ecuación diferencial del movimiento para un sistema de un grado de libertad, con amortiguación viscosa, figura 3-2a.



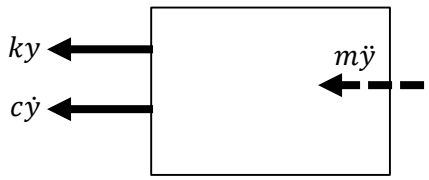
(a)

Figura 3-2

SOLUCIÓN

Para el oscilador simple con amortiguación viscosa, figura 3-2a, aparece un nuevo término, c, que es el coeficiente de amortiguación viscosa. Por su parte, k y m siguen siendo la constante del resorte y la masa, de forma correspondiente.

Con base en el diagrama de cuerpo libre mostrado en la figura 3-2b, en el que se ha incorporado la fuerza de inercia $m\ddot{y}$ con el objeto de aplicar el principio D'Alembert, con las fuerzas del resorte ky y de fricción $c\dot{y}$ actuando hacia la izquierda, considerando que el desplazamiento es positivo hacia la derecha, y si además se supone que $p(t)$ es una carga nula, o sea, $p(t) = 0$, de la suma de fuerzas en la dirección y se obtiene la siguiente ecuación diferencial del movimiento:



(b)

$$+\rightarrow \sum Fy = 0$$

$$-ky - c\dot{y} - m\ddot{y} = 0 \Rightarrow m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = 0 - - - (I)$$

La función exponencial $y = Ce^{\lambda t}$ representa una solución que satisface la ecuación (I). Luego, se tiene que la primera derivada y la segunda derivada de la función previa son $\dot{y} = C\lambda e^{\lambda t}$ y $\ddot{y} = C\lambda^2 e^{\lambda t}$. Al efectuar las sustituciones apropiadas, la ecuación (I) se convierte en

$$mC\lambda^2 e^{\lambda t} + cC\lambda e^{\lambda t} + kCe^{\lambda t} = 0 - - - (II)$$

Si se simplifica la ecuación (II), se obtiene la ecuación característica del sistema.

$$(m\lambda^2 + c\lambda + k)Ce^{\lambda t} = 0 \Rightarrow m\lambda^2 + c\lambda + k = 0 - - - (III)$$

Se hallan las raíces de la ecuación (III) empleando la fórmula general.

$$\lambda = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} = -\frac{c}{2m} \pm \frac{\sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$$

$$= -\frac{c}{2m} \pm \frac{\sqrt{c^2 - 4mk}}{\sqrt{(2m)^2}} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\frac{c^2 - 4mk}{(2m)^2}} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\frac{c^2}{(2m)^2} - \frac{4mk}{(2m)^2}} - - - (IV)$$

$$\lambda_1 = -\frac{c}{2m} + \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \qquad \lambda_2 = -\frac{c}{2m} - \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

En consecuencia, la solución general de la ecuación (I) es resultado de la superposición de las dos soluciones precedentes, es decir,

$$y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} = C_1 e^{\left(-\frac{c}{2m} + \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}\right)t} + C_2 e^{\left(-\frac{c}{2m} - \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}\right)t} - - - (V)$$

donde

$C_1, C_2 =$ constantes de integración que se determinan con base en las condiciones iniciales.

Luego, para un sistema con un grado de libertad, con amortiguación, existen tres casos: a) sistema con amortiguación crítica, b) sistema con sobreamortiguación y c) sistema con subamortiguación.

- Caso I→ Sistema con amortiguación crítica.

Aquí, la cantidad bajo el radical en la expresión matemática (IV) debe ser equivalente a cero.

$$\left(\frac{c_r}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} = 0 - - - (1)$$

El coeficiente de amortiguación crítica c_r se puede determinar despejándolo de la ecuación (1). Recuérdese que $\omega^2 = k/m$, donde ω es la frecuencia natural del sistema.

$$\left(\frac{c_r}{2m}\right)^2 - \omega^2 = 0 \Rightarrow \sqrt{\left(\frac{c_r}{2m}\right)^2} = \sqrt{\omega^2} \Rightarrow c_r = 2m\omega$$

Por otra parte, la razón de amortiguación del sistema se define como

$$\xi = \frac{c}{c_r}$$

En consecuencia, el coeficiente de amortiguación viscosa también puede expresarse así:

$$c = \xi c_r = 2\xi m\omega - - - (2)$$

Combinando las ecuaciones (IV) y (2), con $\omega^2 = k/m$, se obtiene

$$\lambda = -\frac{2\xi m\omega}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{2\xi m\omega}{2m}\right)^2 - \omega^2} = -\xi\omega \pm \sqrt{\xi^2\omega^2 - \omega^2}$$

$$\lambda = -\xi\omega \pm \omega\sqrt{\xi^2 - 1} - - - (3)$$

Evidentemente, se debe cumplir que $\xi = 1$ para que la expresión bajo el radical de la ecuación (3) también sea nula. Entonces,

$$\lambda = -(1)(\omega) \pm \omega\sqrt{1^2 - 1} = -\omega - - - (4)$$

Obsérvese que en este primer caso, se tiene que para la ecuación característica, las raíces son reales y repetidas, ya que simplemente $\lambda = -\omega$. Entonces, para la ecuación diferencial de segundo orden (I), existen dos soluciones linealmente independientes que forman la solución general.

Una primera solución independiente está dada por:

$$y_1(t) = e^{-\omega t} - - - (5)$$

Para obtener una segunda solución independiente, se propone que $y_2(t) = y_1(t) \cdot f(t)$, donde $f(t)$ es una función a determinar.

$$y_2(t) = e^{-\omega t} f(t) - - - (6)$$

Derivando dos veces la ecuación (6) respecto del tiempo, se obtiene

$$\dot{y}_2 = e^{-\omega t} f(\dot{t}) + (-\omega) e^{-\omega t} f(t) = \left[f(\dot{t}) - \omega f(t)\right] e^{-\omega t} - - - (7)$$

$$\ddot{y_2} = \left[f(\dot{t}) - \omega f(t)\right](-\omega e^{-\omega t}) + \left[f(\ddot{t}) - \omega f(\dot{t})\right](e^{-\omega t})$$

$$= \left[-\omega f(\dot{t}) + \omega^2 f(t) + f(\ddot{t}) - \omega f(\dot{t})\right](e^{-\omega t}) = \left[f(\ddot{t}) - 2\omega f(\dot{t}) + \omega^2 f(t)\right](e^{-\omega t}) - - - (8)$$

Combinando las ecuaciones (7) y (8) con la ecuación (I), tenemos

$$m\left[f(\ddot{t}) - 2\omega f(\dot{t}) + \omega^2 f(t)\right](e^{-\omega t}) + c\left[f(\dot{t}) - \omega f(t)\right] e^{-\omega t} + k e^{-\omega t} f(t) = 0$$

$$\left[m f(\ddot{t}) + (-2\omega m + c) f(\dot{t}) + (m\omega^2 - c\omega + k) f(t)\right] e^{-\omega t} = 0$$

Para obtener la solución no trivial se requiere que

$$e^{-\omega t} \neq 0$$

$$m f(\ddot{t}) + (c - 2\omega m) f(\dot{t}) + (m\omega^2 - c\omega + k) f(t) = 0 - - - (9)$$

Considerando que

$$\omega^2 = \frac{k}{m}, \xi = 1$$

$$c = \xi c_r = 2\xi m\omega = 2(1) m\omega = 2m\omega$$

Al reemplazar los valores precedentes en la expresión matemática (9) y simplificar, resulta

$$m f(\ddot{t}) + [2m\omega - 2m\omega] f(\dot{t}) + \left[m\left(\frac{k}{m}\right) - (2m\omega)\omega + k\right] f(t) = 0$$

$$m f(\ddot{t}) + (k - 2m\omega^2 + k) f(t) = 0$$

$$m f(\ddot{t}) + \left(2k - 2m\left(\frac{k}{m}\right)\right) f(t) = 0$$

$$mf\ddot{(t)} + (2k - 2k)f(t) = 0$$

$$mf\ddot{(t)} = 0 - - - (10)$$

Finalmente, el valor de la función $f(t)$ se halla resolviendo la ecuación diferencial (10) empleando el método de separación de variables.

$$m\frac{d^2f(t)}{dt^2} = 0 \Rightarrow m\frac{d}{dt}\left(\frac{df(t)}{dt}\right) = 0$$

$$\int d\left(\frac{df(t)}{dt}\right) = \int \frac{0}{m}dt$$

$$\left(\frac{df(t)}{dt}\right) = k_1$$

$$\int df(t) = \int k_1 dt$$

$$f(t) = k_1 t + k_2 - - - (11)$$

donde k_1 y k_2 son determinadas constantes de integración.

Al sustituir la ecuación (11) en la ecuación (6) da

$$y_2(t) = e^{-\omega t}(k_1 t + k_2) - - - (12)$$

A continuación se comprueba que las dos soluciones son funciones linealmente independientes a través del Wronskiano W, el cual se define como:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ \dot{y_1} & \dot{y_2} \end{vmatrix}$$

Por lo que,

$$y_1 = e^{-\omega t} \qquad y_2 = te^{-\omega t}$$

$$\dot{y_1} = -\omega e^{-\omega t} \qquad \dot{y_2} = t(-\omega e^{-\omega t}) + e^{-\omega t} = (-\omega t + 1)e^{-\omega t}$$

$$W = \begin{vmatrix} e^{-\omega t} & te^{-\omega t} \\ -\omega e^{-\omega t} & (1 - \omega t)e^{-\omega t} \end{vmatrix} = e^{-\omega t}(e^{-\omega t}) \begin{vmatrix} 1 & t \\ -\omega & 1 - \omega t \end{vmatrix}$$

$$e^{-2\omega t}[1(1 - \omega t) - (-\omega)t] = e^{-2\omega t}(1 - \omega t + \omega t) = e^{-2\omega t}$$

Debido a que $e^{-2\omega t} \neq 0$, y_1 y y_2 son linealmente independientes. En consecuencia, la solución general tiene la siguiente forma:

$$y(t) = a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t) - - - (13)$$

Sustituyendo las ecuaciones (5) y (12) en la ecuación (13) da

$$y(t) = a_1 e^{-\omega t} + a_2 e^{-\omega t}(k_1 t + k_2) = a_1 e^{-\omega t} + a_2 k_1 t e^{-\omega t} + a_2 k_2 e^{-\omega t}$$

$$= (a_1 + a_2 k_2) e^{-\omega t} + a_2 k_1 t e^{-\omega t}$$

Si $a_1 + a_2 k_2$ y $a_2 k_1$ son ciertas constantes, o sea,

$$C_1 = a_1 + a_2 k_2$$

$$C_2 = a_2 k_1$$

Entonces, la solución general de un sistema con amortiguación crítica viene dada por

$$y(t) = C_1 e^{-\omega t} + C_2 t e^{-\omega t} = (C_1 + C_2 t) e^{-\omega t} - - - (14)$$

O bien, retomando que $c = \xi c_r = 2\xi m\omega \Rightarrow \omega = c_r/2m$, la ecuación (14) también puede ser expresada del siguiente modo:

$$y(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-(c_r/2m)t} - - - (15)$$

Enseguida se calculan las constantes C_1 y C_2 a partir de las condiciones iniciales de desplazamiento y de velocidad, que son: 1) $y(0) = y_0$ o $y(t) = y_0$, en $t = 0$ y 2) $\dot{y}(0) = v_0$ o $\dot{y}(t) = v_0$, en $t = 0$.

Al derivar la expresión (14) respecto del tiempo, se tiene

$$\dot{y}(t) = -\omega C_1 e^{-\omega t} + C_2[(1 - \omega t) e^{-\omega t}] - - - (16)$$

Aplicando la condición 1) en la ecuación (14) resulta

$$y_0 = \big(C_1 + C_2(0)\big) e^{-\omega(0)} = C_1 - - - (17)$$

Aplicando la condición 2) en la ecuación (16) se llega a

$$v_0 = -\omega C_1 e^{-\omega(0)} + C_2\big[\big(1 - \omega(0)\big) e^{-\omega(0)}\big]$$

$$v_0 = -\omega C_1 + C_2 v_0 = -\omega y_0 + C_2 - - - (18)$$

Luego, se resuelve el sistema simultáneo de ecuaciones (17) y (18). Al despejar C_2 de la ecuación (18), se tiene

$$C_2 = v_0 + \omega y_0 - - - (19)$$

El reemplazamiento de las ecuaciones (17) y (19) en la ecuación (14) conlleva a

$$y(t) = [y_0 + (v_0 + \omega y_0)t]e^{-\omega t}$$

- Caso II→ sistema sobreamortiguado.

Debido a que en un sistema estructural con sobreamortiguación siempre se cumple que $c > c_r$, la cantidad bajo el radical en la ecuación (IV) es forzosamente positiva. En consecuencia, existen dos raíces reales y distintas de la ecuación característica. De ese modo, la solución general en este caso es como la ecuación (V), es decir,

$$y(t) = C_1 e^{\left(-\frac{c}{2m}+\sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2-\frac{k}{m}}\right)t} + C_2 e^{\left(-\frac{c}{2m}-\sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2-\frac{k}{m}}\right)t}$$

Por otra parte, también debe satisfacerse que $\xi > 1$ para que la expresión bajo el radical de la ecuación (3) de igual forma sea positiva. Entonces, las raíces pueden escribirse alternativamente como

$$\lambda = -\xi\omega \pm \omega\sqrt{\xi^2 - 1}$$

Por lo que la solución general para el caso II es equivalente a

$$y(t) = C_1 e^{\left(-\xi\omega+\omega\sqrt{\xi^2-1}\right)t} + C_2 e^{\left(-\xi\omega-\omega\sqrt{\xi^2-1}\right)t} - - - (1´)$$

Si la frecuencia del sistema con sobreamortiguación está definida por

$$\omega_D = \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} = \omega\sqrt{\xi^2 - 1}$$

Entonces, otra forma de escribir la ecuación $(1´)$ es

$$y(t) = C_1 e^{(-\xi\omega+\omega_D)t} + C_2 e^{(-\xi\omega-\omega_D)t} = C_1 e^{-\xi\omega t} e^{\omega_D t} + C_2 e^{-\xi\omega t} e^{-\omega_D t}$$

$$y(t) = e^{-\xi\omega t}\left(C_1 e^{(\omega_D t)} + C_2 e^{(-\omega_D t)}\right) - - - (2´)$$

A continuación se calculan las constantes C_1 y C_2.

Derivando la ecuación $(2')$, resulta

$$\dot{y}(t) = C_1(-\xi\omega + \omega_D)e^{(-\xi\omega+\omega_D)t} + C_2(-\xi\omega - \omega_D)e^{(-\xi\omega-\omega_D)t} - - - (3')$$

Las condiciones iniciales son: 1) $y(0) = y_0$ y 2) $\dot{y}(0) = v_0$.

Sustituyendo la condición 1) en la ecuación $(2')$, se obtiene

$$y_0 = e^{-\xi\omega(0)}\left(C_1 e^{(\omega_D(0))} + C_2 e^{(-\omega_D(0))}\right)$$

$$y_0 = e^0(C_1 e^0 + C_2 e^0)$$

$$y_0 = C_1 + C_2 - - - (4')$$

Sustituyendo la condición 2) en la ecuación $(3')$ da

$$v_0 = C_1(-\xi\omega + \omega_D)e^{(0)} + C_2(-\xi\omega - \omega_D)e^{(0)}$$

$$v_0 = C_1(-\xi\omega + \omega_D) + C_2(-\xi\omega - \omega_D) - - - (5')$$

Se resuelve el sistema lineal de ecuaciones $(4')$ y $(5')$. De la ecuación $(4')$ se llega a

$$C_1 = y_0 - C_2 - - - (6')$$

Sustituyendo la ecuación $(6')$ en la ecuación $(5')$ y despejando C_2, obtenemos

$$v_0 = (y_0 - C_2)(-\xi\omega + \omega_D) + (C_2)(-\xi\omega - \omega_D)$$

$$v_0 = (y_0)(-\xi\omega + \omega_D) - (C_2)(-\xi\omega + \omega_D) - (C_2)(\xi\omega + \omega_D)$$

$$v_0 = (y_0)(-\xi\omega + \omega_D) - (C_2)(2\omega_D) \Rightarrow v_0 + 2\omega_D C_2 = (y_0)(-\xi\omega + \omega_D)$$

$$2\omega_D C_2 = (y_0)(-\xi\omega + \omega_D) - v_0 \Rightarrow C_2 = \frac{(y_0)(-\xi\omega + \omega_D) - v_0}{2\omega_D}$$

$$C_2 = \frac{1}{2}\left(-\frac{y_0\xi\omega}{\omega_D} + \frac{y_0\omega_D}{\omega_D} - \frac{v_0}{\omega_D}\right) = \frac{1}{2}\left[y_0\left(-\frac{\xi\omega}{\omega_D} + 1\right) - \frac{v_0}{\omega_D}\right]$$

Si

$$\frac{\omega}{\omega_D} = \frac{\omega}{\omega\sqrt{\xi^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{\xi^2 - 1}}$$

Entonces

$$C_2 = \frac{1}{2}\left[y_0\left(1 - \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}}\right) - \frac{v_0}{\omega_D}\right] - - - (7')$$

Sustituyendo la ecuación $(7')$ en la ecuación $(6')$ da

$$C_1 = y_0 - \frac{1}{2}\left[y_0\left(1 - \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}}\right) - \frac{v_0}{\omega_D}\right]$$

$$C_1 = y_0 - \frac{1}{2}y_0(1) - \frac{1}{2}\left[-y_0\left(\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}}\right) - \frac{v_0}{\omega_D}\right] = \frac{1}{2}y_0 + \frac{1}{2}\left[y_0\left(\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}}\right) + \frac{v_0}{\omega_D}\right]$$

$$C_1 = \frac{1}{2}y_0 + \frac{1}{2}\left[y_0\left(\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}}\right) + \frac{v_0}{\omega_D}\right] = \frac{1}{2}\left[y_0\left(1 + \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}}\right) + \frac{v_0}{\omega_D}\right] - - - (8')$$

En consecuencia, si se reemplazan las ecuaciones $(7')$ y $(8')$ en la expresión matemática $(2')$, resulta

$$y(t) = e^{-\xi\omega t}\left\{\frac{1}{2}\left[y_0\left(1 + \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}}\right) + \frac{v_0}{\omega_D}\right]e^{(\omega_D t)} + \frac{1}{2}\left[y_0\left(1 - \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}}\right) - \frac{v_0}{\omega_D}\right]e^{(-\omega_D t)}\right\}$$

Caso III→ sistema subamortiguado.

Puesto que en un sistema estructural con subamortiguación siempre se cumple que la cantidad bajo el radical en la ecuación (IV) es negativa, en este último caso $c < c_r$. Aquí las raíces son conjugadas complejas y corresponden a

$$\lambda_1 = -\frac{c}{2m} + i\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} \qquad \lambda_2 = -\frac{c}{2m} - i\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}$$

donde $i = \sqrt{-1}$ es la unidad imaginaria.

Por consiguiente, la solución general es

$$y(t) = C_1 e^{\left(-\frac{c}{2m} + i\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}\right)t} + C_2 e^{\left(-\frac{c}{2m} - i\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}\right)t} - - - (1'')$$

Asimismo, también debe cumplirse que $\xi < 1$ para que la expresión bajo el radical de la ecuación (3) sea negativa. Entonces, una forma alterna de escribir las raíces es

$$\lambda = -\xi\omega \pm i\omega\sqrt{1-\xi^2}$$

Si además se considera que la frecuencia del sistema con subamortiguación está definida por

$$\omega_D = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} = \omega\sqrt{1-\xi^2}$$

Otra manera de denotar la ecuación $(1'')$ es

$$y(t) = C_1 e^{(-\xi\omega + i\omega_D)t} + C_2 e^{(-\xi\omega - i\omega_D)t} - - - (2'')$$

Se procede a inferir el valor tanto de la constante C_1 como el de la constante C_2.

La primera derivada de la ecuación $(2'')$ es

$$\dot{y}(t) = C_1(-\xi\omega + i\omega_D)e^{(-\xi\omega + i\omega_D)t} + C_2(-\xi\omega - i\omega_D)e^{(-\xi\omega - i\omega_D)t} - - - (3'')$$

Se tienen las siguientes condiciones iniciales: 1) $y(0) = y_0$ y 2) $\dot{y}(0) = v_0$.

Sustituyendo la condición 1) en la ecuación $(2'')$, se obtiene

$$y_0 = C_1 e^{(-\xi\omega + i\omega_D)(0)} + C_2 e^{(-\xi\omega - i\omega_D)(0)}$$

$$y_0 = C_1 e^0 + C_2 e^0$$

$$y_0 = C_1 + C_2 - - - (4'')$$

Sustituyendo la condición 2) en la ecuación $(3'')$ da

$$v_0 = C_1(-\xi\omega + i\omega_D)e^{(-\xi\omega + i\omega_D)(0)} + C_2(-\xi\omega - i\omega_D)e^{(-\xi\omega - i\omega_D)(0)}$$

$$v_0 = C_1(-\xi\omega + i\omega_D) + C_2(-\xi\omega - i\omega_D) - - - (5'')$$

Se soluciona el sistema simultáneo de ecuaciones $(4'')$ y $(5'')$. De la ecuación $(4'')$ se despeja C_1.

$$C_1 = y_0 - C_2 - - - (6'')$$

Reemplazando la ecuación $(6'')$ en la ecuación $(5'')$ y despejando C_2, resulta

$$v_0 = (y_0 - C_2)(-\xi\omega + i\omega_D) + (C_2)(-\xi\omega - i\omega_D)$$

$$v_0 = (y_0)(-\xi\omega + i\omega_D) - (C_2)(-\xi\omega + i\omega_D) + (C_2)(-\xi\omega - i\omega_D)$$

$$v_0 = -\xi\omega y_0 + i\omega_D y_0 + \xi\omega C_2 - i\omega_D C_2 - \xi\omega C_2 - i\omega_D C_2$$

$$v_0 = -\xi\omega y_0 + i\omega_D y_0 - 2i\omega_D C_2$$

$$C_2 = \left(\frac{v_0 + \xi\omega y_0 - i\omega_D y_0}{-2i\omega_D}\right)\left(\frac{i}{i}\right) = \frac{v_0 i + \xi\omega y_0 i - i^2\omega_D y_0}{-2i^2\omega_D}$$

Con $i^2 = \left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1$, se obtiene

$$C_2 = \frac{v_0 i + \xi\omega y_0 i + \omega_D y_0}{2\omega_D} = \frac{i(v_0 + \xi\omega y_0) + \omega_D y_0}{2\omega_D}$$

$$C_2 = \frac{i(v_0 + \xi\omega y_0)}{2\omega_D} + \frac{\omega_D y_0}{2\omega_D} = \frac{1}{2}\left(y_0 + i\left(\frac{v_0 + \xi\omega y_0}{\omega_D}\right)\right) - - - (7'')$$

Sustituyendo la ecuación $(7'')$ en la ecuación $(6'')$ da

$$C_1 = y_0 - \left[\frac{1}{2}\left(y_0 + i\left(\frac{v_0 + \xi\omega y_0}{\omega_D}\right)\right)\right] = \frac{1}{2}\left[y_0 - i\left(\frac{v_0 + \xi\omega y_0}{\omega_D}\right)\right] - - - (8'')$$

Se reescribe la ecuación $(2'')$ y se simplifica.

$$y(t) = C_1 e^{(-\xi\omega + i\omega_D)t} + C_2 e^{(-\xi\omega - i\omega_D)t} = e^{-\xi\omega t}\left(C_1 e^{i\omega_D t} + C_2 e^{-i\omega_D t}\right) - - - (9'')$$

Si se aplican en la ecuación $(9'')$ las relaciones de Euler descritas en el ejercicio 3.1, y se simplifica, entonces

$$y(t) = e^{-\xi\omega t}[C_1(\cos\omega_D t + i\sin\omega_D t) + C_2(\cos\omega_D t - i\sin\omega_D t)]$$

$$y(t) = e^{-\xi\omega t}[(C_1 + C_2)\cos\omega_D t + i(C_1 - C_2)\sin\omega_D t] - - - (10'')$$

Sin embargo, al sumar las ecuaciones $(8'')$ y $(7'')$, se tiene

$$C_1 + C_2 = \frac{1}{2}\left[y_0 - i\left(\frac{v_0 + \xi\omega y_0}{\omega_D}\right)\right] + \frac{1}{2}\left(y_0 + i\left(\frac{v_0 + \xi\omega y_0}{\omega_D}\right)\right) = y_0 - - - (11'')$$

y al multiplicar por i la resta de la ecuación $(8'')$ menos la ecuación $(7'')$, resulta

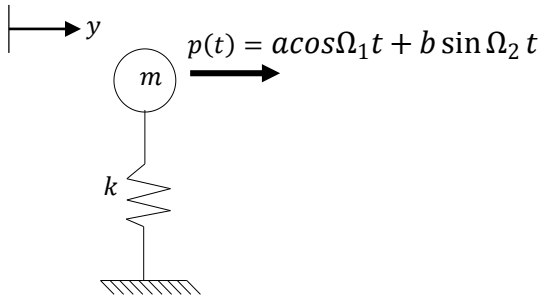
$$i(C_1 - C_2) = \frac{1}{2}\left[iy_0 + \left(\frac{v_0 + \xi\omega y_0}{\omega_D}\right)\right] - \frac{1}{2}\left[iy_0 - \left(\frac{v_0 + \xi\omega y_0}{\omega_D}\right)\right] = \frac{v_0 + \xi\omega y_0}{\omega_D} - - - (12'')$$

Por último, al combinar las ecuaciones $(11'')$ y $(12'')$ con la ecuación $(9'')$, se obtiene

$$y(t) = e^{-\xi\omega t}\left[y_0\cos\omega_D t + \frac{v_0 + \xi\omega y_0}{\omega_D}\sin\omega_D t\right]$$

Ejercicio 3.3 Respuesta de un sistema de un grado de libertad sin amortiguación, a excitación armónica.

Instrucciones Obtenga la solución para la ecuación diferencial de la respuesta de un sistema de un grado de libertad, sin amortiguamiento, con periodo T, rigidez k, sometido a una excitación $p(t) = acos\Omega_1 t + b \sin \Omega_2 t$, $\Omega_1 \neq \Omega_2$, figura 3-3a.



(a)

Figura 3-3

SOLUCIÓN

La ecuación del movimiento para un sistema de un grado de libertad sin amortiguación es

$$m\ddot{y} + ky = p(t) - - - (1)$$

Con base en la figura 3.3a, haciendo $p(t) = acos\Omega_1 t + b \sin \Omega_2 t$ en la ecuación (1), se tiene

$$m\ddot{y} + ky = acos\Omega_1 t + b \sin \Omega_2 t - - - (2)$$

Dividiendo la ecuación (2) entre m, resulta

$$\ddot{y} + \frac{k}{m} y = \frac{1}{m}(acos\Omega_1 t + b \sin \Omega_2 t) - - - (3)$$

Si

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \frac{1}{m} = \frac{\omega^2}{k}$$

Entonces, la ecuación (3) pasa a ser

$$\ddot{y} + \omega^2 y = \frac{\omega^2}{k}(acos\Omega_1 t + b\sin\Omega_2\, t) - - - (4)$$

Una forma de expresar la solución de la ecuación (4) es

$$y(t) = y_c(t) + y_p(t) - - - \ (5)$$

Aquí $y_c(t)$ representa la solución complementaria que satisface a la ecuación diferencial homogénea, es decir, la ecuación (2) con $acos\Omega_1 t + b\sin\Omega_2\, t = 0$, mientras que $y_p(t)$ es la solución particular de la ecuación diferencial no homogénea, o sea, la ecuación (2).

Las soluciones citadas vendrían dadas de forma respectiva por:

$$y_c(t) = C_1 cos\omega t + C_2 sin\omega t - - - (6)$$

$$y_p(t) = Acos\Omega_1 t + B\sin\Omega_1 t + Ccos\Omega_2 t + D\sin\Omega_2 t - - - (7)$$

Derivando dos veces la ecuación (7) respecto del tiempo, se obtiene

$$\dot{y}_p(t) = -\Omega_1 Asin\Omega_1 t + \Omega_1 B\cos\Omega_1 t - \Omega_2 Csin\Omega_2 t + \Omega_2 D\cos\Omega_2 t$$

$$\ddot{y}_p(t) = -{\Omega_1}^2 Acos\Omega_1 t - {\Omega_1}^2 B\sin\Omega_1 t - {\Omega_2}^2 Ccos\Omega_2 t - {\Omega_2}^2 D\sin\Omega_2 t - - - (8)$$

Sustituyendo las ecuaciones (7) y (8) en la ecuación (4) se llega a

$$-{\Omega_1}^2 Acos\Omega_1 t - {\Omega_1}^2 B\sin\Omega_1 t - {\Omega_2}^2 Ccos\Omega_2 t - {\Omega_2}^2 D\sin\Omega_2 t$$

$$+\omega^2(Acos\Omega_1 t + B\sin\Omega_1 t + Ccos\Omega_2 t + D\sin\Omega_2 t) = \frac{\omega^2}{k}(acos\Omega_1 t + b\sin\Omega_2\, t) - - - (9)$$

Agrupando términos en la expresión (9) da

$$\left(\omega^2 - {\Omega_1}^2\right)Acos\Omega_1 t + \left(\omega^2 - {\Omega_1}^2\right)B\sin\Omega_1 t + \left(\omega^2 - {\Omega_2}^2\right)Ccos\Omega_2 t$$
$$+ \left(\omega^2 - {\Omega_2}^2\right)Dsin\Omega_2 t = \frac{\omega^2}{k}(acos\Omega_1 t + b\sin\Omega_2\, t) - - - \ (10)$$

Igualando coeficientes obtenemos

$$\left(\omega^2 - {\Omega_1}^2\right)A = \frac{\omega^2 a}{k} \Rightarrow A = \frac{\omega^2 a}{k\left(\omega^2 - {\Omega_1}^2\right)}$$

$$\left(\omega^2 - {\Omega_1}^2\right)B = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$\left(\omega^2 - {\Omega_2}^2\right)C = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$\left(\omega^2 - {\Omega_2}^2\right)D = \frac{\omega^2 b}{k} \Rightarrow D = \frac{\omega^2 b}{k\left(\omega^2 - {\Omega_2}^2\right)}$$

Sustituyendo los valores obtenidos para A, B, C y D en la ecuación (7), se tiene que la solución particular es

$$y_p(t) = \frac{\omega^2 a}{k\left(\omega^2 - {\Omega_1}^2\right)} cos\Omega_1 t + \frac{\omega^2 b}{k\left(\omega^2 - {\Omega_2}^2\right)} \sin \Omega_2 \, t - - - (11)$$

Combinando las ecuaciones (11) y (6) con la ecuación (5), resulta

$$y(t) = C_1 cos\omega t + C_2 sin\omega t + \frac{\omega^2 a}{k\left(\omega^2 - {\Omega_1}^2\right)} cos\Omega_1 t + \frac{\omega^2 b}{k\left(\omega^2 - {\Omega_2}^2\right)} \sin \Omega_2 \, t$$

$$y(t) = C_1 cos\omega t + C_2 sin\omega t + \frac{\omega^2}{k}\left[\frac{a}{\left(\omega^2 - {\Omega_1}^2\right)} cos\Omega_1 t + \frac{b}{\left(\omega^2 - {\Omega_2}^2\right)} \sin \Omega_2 \, t \right] - - - (12)$$

A continuación se calculan las constantes C_1 y C_2. Las condiciones iniciales son 1) $y(0) = y_0$ y 2) $\dot{y}(0) = v_0$.

Derivando la ecuación (12) respecto del tiempo da

$$\dot{y}(t) = -\omega C_1 sin\omega t + \omega C_2 cos\omega t + \frac{\omega^2}{k}\left[-\frac{a\Omega_1}{\left(\omega^2 - {\Omega_1}^2\right)} sin\Omega_1 t + \frac{b\Omega_2}{\left(\omega^2 - {\Omega_2}^2\right)} \cos \Omega_2 \, t \right] - - - \ (13)$$

Aplicando la condición 1) en la ecuación (12) se obtiene

$$y_0 = C_1 + \frac{\omega^2}{k}\left[\frac{a}{\left(\omega^2 - {\Omega_1}^2\right)}\right] \Rightarrow C_1 = y_0 - \frac{\omega^2}{k}\left[\frac{a}{\left(\omega^2 - {\Omega_1}^2\right)}\right] - - - (14)$$

Aplicando la condición 2) en la expresión algebraica (13) da

$$v_0 = \omega C_2 + \frac{\omega^2}{k}\left[\frac{b\Omega_2}{\left(\omega^2 - {\Omega_2}^2\right)}\right] \Rightarrow \omega C_2 = v_0 - \frac{\omega^2}{k}\left[\frac{b\Omega_2}{\left(\omega^2 - {\Omega_2}^2\right)}\right]$$

$$C_2 = \frac{v_0}{\omega} - \frac{\omega}{k}\left[\frac{b\Omega_2}{\left(\omega^2 - {\Omega_2}^2\right)}\right] - - - (15)$$

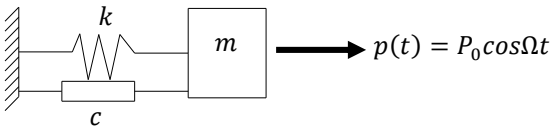
La sustitución de las ecuaciones (14) y (15) en la ecuación (12) conlleva a

$$y(t) = \left\{y_0 - \frac{\omega^2}{k}\left[\frac{a}{\left(\omega^2 - {\Omega_1}^2\right)}\right]\right\} cos\omega t + \left\{\frac{v_0}{\omega} - \frac{\omega}{k}\left[\frac{b\Omega_2}{\left(\omega^2 - {\Omega_2}^2\right)}\right]\right\} sin\omega t$$

$$+ \frac{\omega^2}{k}\left[\frac{a}{\left(\omega^2 - {\Omega_1}^2\right)} cos\Omega_1 t + \frac{b}{\left(\omega^2 - {\Omega_2}^2\right)} \sin \Omega_2 \, t \right]$$

Ejercicio 3.4 Respuesta de un sistema de un grado de libertad amortiguado, a excitación armónica.

Instrucciones Obtenga la solución particular para la ecuación diferencial de la respuesta de un sistema de un grado de libertad, con amortiguamiento, sometido a una excitación $p(t) = P_0 cos\Omega t$, figura 3-4a.



(a)

Figura 3-4

SOLUCIÓN

La ecuación general para sistemas amortiguados con un grado de libertad es

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = p(t) - - - (1)$$

Si el oscilador de la figura 3-4a está sometido a una carga armónica definida por $p(t) = P_0 cos\Omega t$, en la que P_0 representa la amplitud máxima del sistema y Ω es la frecuencia de la fuerza en radianes por segundo, entonces la ecuación (1) se convierte en

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = P_0 cos\Omega t - - - (2)$$

Dividiendo la ecuación (2) entre m, se tiene

$$\ddot{y} + \frac{c}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y = \frac{P_0}{m}cos\Omega t$$

Empleando los siguientes valores que ya han sido definidos en los ejercicios anteriores

$$\omega^2 = \frac{k}{m}, c = 2m\omega\xi \Rightarrow \frac{c}{m} = 2\omega\xi$$

e introduciendo el concepto del desplazamiento estático $\mu_0 = P_0/k$ del resorte

$$\mu_0\omega^2 = \frac{P_0}{k}\left(\frac{k}{m}\right) = \frac{P_0}{m}$$

la ecuación diferencial resulta en

$$\ddot{y} + 2\omega\xi\dot{y} + \omega^2 y = \mu_0\omega^2 cos\Omega t - - - (3)$$

La solución particular es

$$y_p(t) = A\cos\Omega t + B\sin\Omega t - - - (4)$$

Derivando la ecuación (4) dos veces con respecto al tiempo obtenemos

$$\dot{y_p}(t) = -\Omega sin\Omega t + \Omega B cos\Omega t - - - (5)$$

$$\ddot{y_p}(t) = -\Omega^2 A cos\Omega t - \Omega^2 B sin\Omega t - - - (6)$$

Combinando las ecuaciones (5) y (6) con la ecuación (3) se llega a

$$-\Omega^2 A cos\Omega t - \Omega^2 B sin\Omega t + 2\omega\xi(-\Omega A sin\Omega t + \Omega B cos\Omega t) + \omega^2(A\cos\Omega t + B\sin\Omega t)$$
$$= \mu_0\omega^2 cos\Omega t$$

Factorizando la expresión previa da

$$(-\Omega^2 A + 2\omega\xi\Omega B + \omega^2 A)cos\Omega t + (-\Omega^2 B - 2\omega\xi\Omega A + \omega^2 B)sin\Omega t = \mu_0\omega^2 cos\Omega t - - - (7)$$

Igualando coeficientes tenemos

$$-\Omega^2 A + 2\omega\xi\Omega B + \omega^2 A = \mu_0\omega^2$$

$$-\Omega^2 B - 2\omega\xi\Omega A + \omega^2 B = 0$$

Factorizando en las dos ecuaciones precedentes, se tiene

$$(\omega^2 - \Omega^2)A + 2\omega\xi\Omega B = \mu_0\omega^2 - - - (8)$$

$$-2\omega\xi\Omega A + (\omega^2 - \Omega^2)B = 0 - - - (9)$$

Si se define a la razón de frecuencias r como la razón entre la frecuencia de la fuerza aplicada Ω y la frecuencia natural de vibración ω del sistema, es decir, $r = \Omega/\omega$, entonces, sustituyendo $\Omega = r\omega$ en las ecuaciones (8) y (9) se obtiene

$$(\omega^2 - r^2\omega^2)A + 2\omega\xi r\omega B = \mu_0\omega^2 - - - (10)$$

$$-2\omega\xi r\omega A + (\omega^2 - r^2\omega^2)B = 0 - - - (11)$$

Simplificando las expresiones algebraicas (10) y (11), resulta

$$\omega^2(1 - r^2)A + 2\omega^2\xi r B = \mu_0\omega^2 - - - - - (12)$$

$$-2\omega^2\xi r A + \omega^2(1 - r^2)B = 0 - - - - - (13)$$

Se multiplican las ecuaciones (12) y (13) por $\frac{1}{\omega^2}$, lo cual conduce a

$$(1 - r^2)A + 2\xi r B = \mu_0 - - - - - (14)$$

$$-2\xi r A + (1 - r^2)B = 0 - - - - - (15)$$

Se despeja A de la ecuación (15).

$$A = \frac{1-r^2}{2\xi r} B \; - - - - - (16)$$

Se reemplaza la ecuación (16) en la ecuación (14) y se despeja B.

$$(1-r^2)\left(\frac{1-r^2}{2\xi r}\right) B + 2\xi r B = \mu_0$$

$$\frac{(1-r^2)^2}{2\xi r} B + 2\xi r B = \mu_0 \Rightarrow \left[\frac{(1-r^2)^2}{2\xi r} + 2\xi r\right] B = \mu_0$$

$$\frac{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}{2\xi r} B = \mu_0 \Rightarrow B = \mu_0 \frac{2\xi r}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2} - - - (17)$$

Sustituyendo la ecuación (17) en la ecuación (16), resulta

$$A = \frac{1-r^2}{2\xi r} \mu_0 \frac{2\xi r}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2} = \mu_0 \frac{1-r^2}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}$$

Por consiguiente, la solución particular, que se infiere de combinar las expresiones matemáticas (16) y (17) con la expresión (4), es

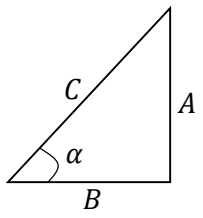
$$y_p(t) = \mu_0 \frac{1-r^2}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2} cos\Omega t + \mu_0 \frac{2\xi r}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2} sin\,\Omega t$$

$$= \frac{\mu_0}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2} [(1-r^2) cos\Omega t + 2\xi r\, sin\,\Omega t]$$

No obstante, la solución particular aún se puede simplificar. Si la ecuación (4) se multiplica por C/C, esta no se altera.

$$y_p(t) = \frac{C}{C}(A cos\Omega t + B\, sin\,\Omega t) = C\left(\frac{A}{C} cos\Omega t + \frac{B}{C} sin\,\Omega t\right) - - - (18)$$

Los términos A, B y C se pueden acomodar en un triángulo rectángulo, figura 3-4b.



(b)

Por trigonometría se tiene

$$\sin\alpha = \frac{A}{C} \qquad \cos\alpha = \frac{B}{C} \qquad \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{A}{B}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{A}{B} \qquad C = \sqrt{A^2 + B^2}$$

Se reemplazan los valores precedentes en la ecuación (18).

$$y_P(t) = C(\sin\alpha\, cos\Omega t + \cos\alpha \sin\Omega t) - - - (19)$$

Al emplear la siguiente identidad trigonométrica:

$$\sin(\alpha + \Omega t) = \sin\alpha\, cos\Omega t + \cos\alpha \sin\Omega t$$

la ecuación (19) se convierte en

$$y_P(t) = C\sin(\alpha + \Omega t) = \sqrt{A^2 + B^2}\sin(\alpha + \Omega t) - - - (20)$$

donde

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{{\mu_0}^2\frac{(1-r^2)^2}{[(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2]^2} + {\mu_0}^2\frac{(2\xi r)^2}{[(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2]^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{{\mu_0}^2}{[(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2]^2}[(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2]}$$

$$= \sqrt{\frac{{\mu_0}^2}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} = \frac{\sqrt{{\mu_0}^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} = \frac{\mu_0}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

Sea el factor de amplificación dinámica

$$D = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

Entonces

$$C = D\mu_0$$

En consecuencia,

$$y_P(t) = C\sin(\alpha + \Omega t) = D\mu_0\sin(\alpha + \Omega t)$$

donde

$$\mu_0 = \frac{P_0}{k} \qquad \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{\mu_0\dfrac{1-r^2}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}{\mu_0\dfrac{2\xi r}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}\right) = \tan^{-1}\frac{1-r^2}{2\xi r}$$

BIBLIOGRAFÍA

González, O. (2011). *Análisis Estructural*. México: LIMUSA.

Hibbeler, R. (2012). *Análisis Estructural*. México: PEARSON.

Villarreal, G. (2009). *Análisis Estructural*. Perú: INDEPENDIENTE.

Magdaleno, C. (1978). *Análisis Matricial de Estructuras Reticulares*. México: INDEPENDIENTE.

Beaufait, W. F.(1977). Análisis Estructural. Colombia. PRENTICE/HALL.

Tena, A. (2007). *Análisis de Estructuras con Métodos Matriciales*. México: LIMUSA.

Colindres, R. (1978). *Dinámica de Suelos y Estructuras Aplicadas a la Ingeniería Sísmica*. México: LIMUSA.

Paz, M. (1992). *Dinámica Estructural: Teoría y Cálculo*. México: REVERTÉ,S.A.

Beer, F., Johnston, E. & Elliot, R.(2007). *Mecánica Vectorial para Ingenieros: Estática*. México: MCGRAWHILL.

Villarreal, G. (2011). *Estática: Problemas Resueltos*. Perú: INDEPENDIENTE.

Fitzgerald, R. (2011). *Resistencia de Materiales*. México: ALFAOMEGA.

Ortiz D., Marcos M., Hugo M., et al. (2014). *Estructuras Isostáticas en 2D: Problemas Resueltos.* México: INDEPENDIENTE.

Ortiz, D. (2013). Tesis: *Problemario de Análisis de Estructuras Isostáticas e Hiperestáticas para Vigas, Marcos y Armaduras.* México: UNAM.

Nota: De suma importancia han sido los cursos adquiridos por el autor de Análisis Estructural impartido por el Dr. Ernesto Pineda León en el propedéutico, de Análisis Estructural impartido por el Dr. Esteban Flores Méndez en el primer semestre de la maestría y de Dinámica Estructural impartido por el Dr. Jorge Luis Alamilla López en el segundo semestre de la maestría, en la SEPI ESIA UZ.

LA REPRESIÓN DE LAS AUTORIDADES HACIA LOS ESTUDIANTES SE HIZO PRESENTE

Paralelamente al movimiento estudiantil del IPN, una serie de sucesos trágicos se desencadenaron en México.

43 estudiantes normalistas del Estado de Gurrero, del municipio de Iguala, específicamente en Ayotzinapa, fueron desaparecidos misteriosamente. El pueblo mexicano responsabiliza al Estado. Hoy en día (16 de Enero del 2015, los hechos no han sido esclarecidos). Ante este suceso, el IPN y otras universidades no dudaron en solidarizarse con la lucha que los familiares de los estudiantes citados emprendieron.

Aunque las autoridades garantizaron la no represión a los estudiantes del movimiento IPN y a los solidarios, esto no fue así.

Una balacera en la máxima casa de estudios de México, la UNAM, tuvo lugar el sábado 15 de noviembre del 2014, dejando un saldo de dos personas heridas de bala, así como una mascota.

A manera de intimidación, balazos en las inmediaciones de la ESIA UZ IPN fueron arrojados cuando los estudiantes salvaguardaban la unidad.

En una marcha en solidaridad a los desaparecidos de Ayotzinapa, un grupo de jóvenes de vocacionales del IPN fueron brutalmente golpeados por paramilitares y fuerzas policiales. Producto de este hecho, el compañero del IPN, Ariel Flores Pérez, y los compañeros de la UNAM, Demian Reyes y Óscar Espinoza, fueron detenidos y encarcelados de manera injusta.

No es caso aislado, la detención arbitraria de la compañera de excelencia de la FES Aragón UNAM, Jaqueline Santana.

El pueblo de México responsabiliza de igual forma al Estado por los recientes asesinatos que no han sido del todo esclarecidos de los estudiantes activistas: Edith Gutiérrez y Luis Daniel García, ambos del IPN, y David Flores del Posgrado de la UNAM.

También, la estudiante destacada de la UNAM, Anayeli Bautista, fue privada de su vida por secuestradores.

“El pueblo de México, lamentamos profundamente estos hechos y externamos toda nuestra solidaridad con los familiares de los estudiantes asesinados, desaparecidos y/o encarcelados injustamente”…“ Por nuestros compañeros caídos, no un minuto de silencio, sino toda una vida de lucha”. ..“Exigimos justicia y alto a la represión”.

ANÁLISIS ESTRUCTURAL: Problemas resueltos

El libro se ha escrito con la finalidad de contribuir en el apoyo a profesores, estudiantes y todos los interesados en general en la enseñanza y el aprendizaje del análisis estructural, el cual representa un apartado trascendental en el área de la Ingeniería Estructural. Esta a su vez, constituye una de las partes más importantes de la carrera de Ingeniería Civil y de otras carreras como Ingeniería Mecánica, Ingeniería Aeronáutica y Arquitectura.

Novedades en esta edición

El autor, bajo la misma tendencia de elaborar literatura de Ingeniería altruista, consiente y combativa, en esta edición lanza un mensaje de solidaridad hacia el movimiento estudiantil gestado inicialmente en ESIA UZ y que a la postre se convirtió en global del IPN, Institución a la que pertenece. En la portada se aprecia una imagen que dice ESIA Zacatenco en pie de lucha, acompañada de la frase “prometimos vencer y vencimos”.

Se presenta un ejemplo resuelto de una viga con sección variable, empleando el método de las fuerzas. Se incluyen ejercicios resueltos de armaduras por el método de flexibilidades, para los casos en el que la estructura es indeterminada externamente y es indeterminada tanto externamente como internamente. Asimismo, se implementan ejercicios para marcos con un soporte girado y con una columna inclinada, por el método de las fuerzas. Se incorpora la resolución de marcos con el método de la rigidez directa, para los casos de: la existencia de un soporte de rodillos inclinado, alguna rótula intermedia, y con una columna de doble altura. Se ofrece una explicación mucho mejor de la solución de la ecuación diferencial del movimiento para los sistemas de un grado de libertad con y sin amortiguamiento. En las páginas finales del libro, el autor hace una síntesis de lo que fue el movimiento estudiantil citado.

Contenido

El libro se divide en tres capítulos. En el capítulo 1 se analizan estructuras isostáticas únicamente, específicamente, vigas, pórticos, armaduras y arcos. Esta parte vendría siendo una introducción al análisis estructural; se explica la forma de calcular el grado de indeterminación, las reacciones en los soportes, de determinar las funciones de las fuerzas cortante y normal, y de momento flexionante empleando el método de las secciones, de dibujar los diagramas de los elementos mecánicos, de inferir las fuerzas en las barras con el método de los nodos en las armaduras, etc.

En el capítulo 2 se estudian las estructuras estáticamente indeterminadas; los métodos que se emplean para ello son el de flexibilidades (también llamado de las fuerzas) y el matricial de la rigidez (también conocido como de la rigidez directa), y se aplican solo a armaduras, vigas y marcos, en el plano.

Finalmente, el capítulo 3 se enfoca a la resolución de sistemas de un grado de libertad con y sin amortiguamiento, tanto para casos en los que la carga es nula como para los casos en los que hay excitación armónica.

Para más información, visita la página de Facebook de la Biblioteca denominada Problemario de Análisis de Estructuras en 2D y 3D

Número de Registro de Obra 03-2018-072610372700-01